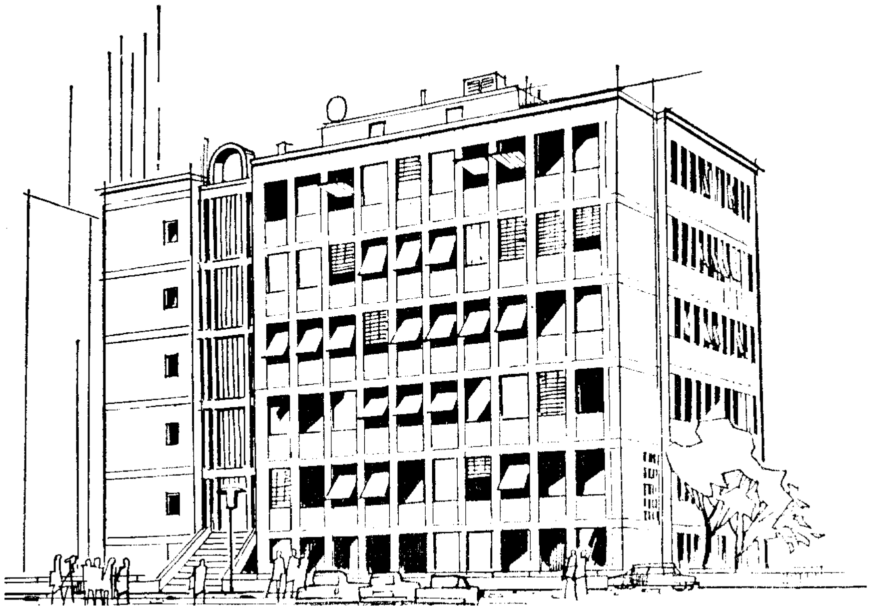
PRAKTIKUMSANLEITUNG

TEIL B

Simulationsmethoden in der Nachrichtentechnik

von Günter Söder



Lehrstuhl für Nachrichtentechnik
Technische Universität München
Prof. Dr.-Ing. Joachim Hagenauer

Vorwort

Das Praktikum *Simulationsmethoden in der Nachrichtentechnik* wird vom Lehrstuhl für Nachrichtentechnik der Technischen Universität München seit dem Sommersemester 1997 als Wahlpflichtlehrveranstaltung für Studierende der Fachrichtung *Elektrotechnik und Informationstechnik* (Studienplan B) angeboten. Es bildet zusammen mit der im Wintersemester durchgeführten Veranstaltung *Simulation digitaler Übertragungssysteme* eine gewisse Einheit: Der in beiden Praktika dargebotene Lehrstoff ergänzt sich, ohne daß es zu gravierenden Überschneidungen kommt. Deshalb kann jede dieser beiden Lehrveranstaltungen auch unabhängig voneinander besucht werden.

Vorläufer beider Praktika war *Simulation von Nachrichtensystemen*, das erstmals im Wintersemester 1987/88 stattgefunden hat. Dieses entstand ebenso wie das dazugehörige Lehr–Softwarepaket *LNTsim* auf Anregung von Herrn Akad. Dir. Gottfried Binkert, dem ich an dieser Stelle für die Idee ebenso danken möchte wie für die großartige Unterstützung bei der Beschaffung der benötigten Rechnerausstattung in den Anfangsjahren.

In der nun vorliegenden Version 4.0 beinhaltet *LNTsim* insgesamt 24 interaktive Graphikprogramme, von denen Sie 16 in diesem Praktikum kennenlernen werden. Vier weitere werden – zusammen mit einigen WINDOWS–Programmen – für das Praktikum *Simulation digitaler Übertragungssysteme* herangezogen. Daneben sind neuerdings auch die vier Lehrprogramme zur *Systemtheorie* in das Programmpaket *LNTsim* integriert.

Alle diese Programme wurden im Rahmen von Diplomarbeiten konzipiert und für unterschiedliche Rechnerplattformen implementiert. Ich möchte an mich dieser Stelle bei all meinen Diplomand(inn)en für die besonders intensive und freundschaftliche Zusammenarbeit recht herzlich bedanken. In der ersten Phase (etwa von 1984 bis 1988) wurden Programme für Mehrbenutzer–Rechner (RSX und UNIX) entwickelt. Die ersten grundlegenden Arbeiten stammen von Herrn *Günter Fröschl*, dessen Konzipierung der Systemtheorie–Versuche auch in der jetzigen Version noch weitgehend zu erkennen ist. Herr *Rainer Gebhart* hat während seiner Diplomarbeit die Praktikumsversuche zu den *Statistischen Methoden der Nachrichtentechnik* gestaltet (siehe Kapitel 1, 3, 4 und 5). Das Thema von Herrn *Bernhard Knull* waren die *Anwendungen der Korrelationsfunktionen*, die Sie in dieser Anleitung in den Kapiteln 9 und 10 finden. Herr *Christian Riedl* hat sich in seiner Diplomarbeit ausführlich mit der *Digitalen Basisbandübertragung* auseinandergesetzt und damit die Grundlagen der Kapitel 13 und 14 geschaffen. Die Programme zu den *Digitalen Modulationsverfahren* gehen auf die Diplomarbeit von Herrn *Manfred Kugler* zurück. Herr *Gerhard Schöps* hatte zum Abschluß der ersten Phase die Aufgabe, die entstandenen Programme und Anleitungen sowohl inhaltlich als auch didaktisch zu überarbeiten, sie zu koordinieren und die Übungsaufgaben zu konzipieren.

Durch die Anschaffung von Personal Computern im Jahre 1991 konnten auch für das Praktikum *Simulation von Nachrichtensystemen* wesentliche Verbesserungen erzielt werden. Dazu war allerdings auch noch sehr viel Arbeit notwendig. Herr *Martin Igmandy* hat dabei die wesentlichen Grundlagen für die Umsetzung der zahlreichen Graphikroutinen geschaffen und die DOS–Programme zu den Kapiteln 1, 3, 4, 5 und 13 portiert. Herr *Stefan Rasspe* hatte die Aufgabe, das neu hinzugekommene Kapitel 2 zu erstellen und die Programme zu Kapitel 9 und 10 anzupassen.

Die neu aufgenommenen Kapitel 7 und 8 zur *Diskreten Fouriertransformation* sind das Ergebnis der Diplomarbeit von Herrn *Oliver Siegel*. Ebenso wurde das Kapitel 11 neu gestaltet, und zwar von Frau *Dorothea Pabst,* die auch für den *Korrelationsempfänger* verantwortlich ist. Das Programm *Codierte und mehrstufige Übertragung*, das Sie im Kapitel 15 kennenlernen werden, geht auf Herrn *Helmut Frohnwieser* zurück, ebenso wie der Teil Viterbi–Empfänger des Programms *Korrelations– und Viterbi–Empfänger*. Die Routinen zur Graphikeingabe und zur Menüsteuerung wurden von Herrn *Erik Hogl* und Herrn *Hans–Peter Christoph* geschaffen, die auch die Lehrprogramme *Digitale Basisbandübertragung* (Kapitel 14), *Nyquistsysteme* (Kapitel 16), *Digitale Modulationsverfahren* sowie *Digitale Phasenmodulation* auf die Erfordernisse der neuen Rechner anpaßten. Herr *Theodoros Papavassiliu* hat die neuen Programme zur Systemtheorie erstellt.

Im Rahmen einer Zulassungsarbeit für das Lehramt an beruflichen Schulen wurde schließlich 1996/97 von Herrn *Peter Werthan* noch die *Pulscodemodulation* realisiert (Kapitel 12). Dieses Programm vervollständigt das Software–Paket *LNTsim*.

Mein Dank gilt weiter meinem langjährigen Kollegen *Dr.–Ing. Klaus Eichin* sowie meinen ehemaligen Kolleg(inn)en Frau *Dipl.–Ing. Daphne Popescu* (in den Jahren 90/91 Gastwissenschaftlerin von der Hochschule für Elektronik und Telekommunikation in Bukarest, jetzt Siemens AG, München), Herrn *Prof. Dr.–Ing. Frowin Derr* (jetzt Fachhochschule Ulm), Herrn *Dr–Ing. Michael Fleischmann* (jetzt VIAG Interkom, München), Herrn *Prof. Dr–Ing. Jürgen Franz* (jetzt Fachhochschule Düsseldorf) sowie Herrn *Dr.–Ing. Norbert Hanik* (jetzt Telekom, Berlin), die diese Diplomarbeiten teilweise mitbetreut haben und viele interessante Anregungen gaben.

Nicht ganz ohne Stolz möchte ich noch erwähnen, daß das Software–Paket *LNTsim* und die dahinter stehende Idee im Oktober 1992 mit dem Deutsch–Österreichischen Hochschul–Software–Preis ausgezeichnet wurde und dadurch über unsere Hochschule hinaus bekannt wurde. Wir freuen uns, daß inzwischen "unser" Praktikum an mehreren Universitäten und Fachhochschulen in Deutschland und Österreich eingesetzt wird.

Ich hoffe, daß Sie als Teilnehmer im Verlauf dieses Praktikums Ihr Wissen aus dem Gebiet der Nachrichtentechnik etwas auffrischen können und vielleicht sogar das eine oder andere Neue erfahren. Bitte haben Sie Nachsicht, wenn nicht alles Ihren Vorstellungen entspricht. Für Ihre (negative oder positive) Kritik sind wir Ihnen sehr dankbar.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg und Spaß im Praktikum!

München, im März 1999 Günter Söder

Hinweis: Bei eventuellen Fragen wenden Sie sich bitte an:

Priv.–Doz. Dr.–Ing. habil. Günter Söder

Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Technische Universität München, D–80290 München

Tel: (089) 289–23486, Fax: (089) 289–23490, Email: guenter.soeder@ei.tum.de

Die Anleitung zu diesem Praktikum wird in zwei Teilen ausgegeben. Teil A beinhaltet die Versuche der ersten drei Termine, der Teil B die letzten vier.

Inhaltsverzeichnis - Teil A

Inhaltsverzeichnis - Teil B

9 Stochastische Prozesse

Inhalt: Zur Beschreibung der inneren statistischen Bindungen von Zufallsprozessen werden häufig die Autokorrelationsfunktion (AKF) sowie das Leistungsdichtespektrum (LDS) herangezogen. Demgegenüber werden die linearen statistischen Abhängigkeiten zwischen unterschiedlichen, aber voneinander abhängigen Prozessen durch die Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) und das Kreuzleistungsdichtespektrum (KLDS) beschrieben. Im folgenden werden diese Größen anhand einiger typischer Beispiele erklärt und insbesondere die Probleme bei der numerischen Bestimmung von AKF und LDS diskutiert.

9.1 Stationarität und Ergodizität

Bevor auf die Eigenschaften von Zufallssignalen näher eingegangen werden kann, muß noch ein wichtiger Begriff der stochastischen Signaltheorie erläutert werden, nämlich der *Zufallsprozeß* bzw. *stochastische Prozeß*. Dieser stellt ein mathematisches Modell für eine Schar zufälliger Signale dar, die sich zwar im allgemeinen voneinander unterscheiden, trotzdem aber gewisse gemeinsame Eigenschaften aufweisen.

Zur Beschreibung eines Zufallsprozesses $\{x_i(t)\}$ gehen wir von der Vorstellung aus, daß jede stochastische Signalquelle – zumindest gedanklich – beliebig oft realisiert werden kann. Wenn wir z.B. das Ausgangssignal eines binären Zufallsgenerators betrachten, so nehmen wir an, daß beliebig viele, in ihren physikalischen und dadurch auch statistischen Eigenschaften völlig gleiche Zufallsgeneratoren vorhanden sind, von denen jeder ein Zufallssignal $x_i(t)$ abgibt, das für alle Zeiten von $-\infty$ bis $+\infty$ existiert (vgl. Bild 9.1). Jeder Zufallsgenerator gibt jedoch trotz gleicher physikalischer Realisierung ein anderes Zeitsignal $x_i(t)$ ab, das als das *i–te Mustersignal* der Signalquelle bezeichnet wird.

Der Zufallsprozeß unterscheidet sich also von den sonst in der Statistik üblichen Zufallsexperimenten dadurch, daß das Ergebnis kein Ereignis ist, sondern ein Funktionsverlauf (Zeitsignal). Dieses Signal beinhaltet mindestens eine stochastische Komponente – z.B. Amplitude, Frequenz oder Phase – und kann von einem Beobachter nicht exakt vorausgesagt werden. Betrachtet man den Zufallsprozeß $\{x_i(t)\}$ zu einem festen Zeitpunkt, so gelangt man wieder zu dem einfacheren Modell von Kapitel 1, nach dem das Versuchsergebnis ein Ereignis ist, das einer Zufallsgröße zugeordnet werden kann.

Diese Aussagen sollen nun anhand von Bild 9.1 verdeutlicht werden. Der vorliegende Prozeß $\{x_i(t)\}$ besteht aus einem Ensemble von rechteckförmigen Musterfunktionen, die wie folgt beschrieben werden können:

$$x_i(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (a_\nu)_i \cdot g(t-\nu\cdot T) \ . \qquad (9.1)$$

Der deterministische *Grundimpuls* $g(t)$ besitzt im Bereich von $-T/2$ bis $+T/2$ den Wert 2V und ist außerhalb 0V. Die Statistik dieses Zufallsprozesses ist auf die dimensionslosen Amplitudenkoeffizienten $(a_\nu)_i \in \{0\,,1\}$ zurückzuführen, die innerhalb der i–ten Musterfunktion mit der Laufvariablen ν indiziert sind.

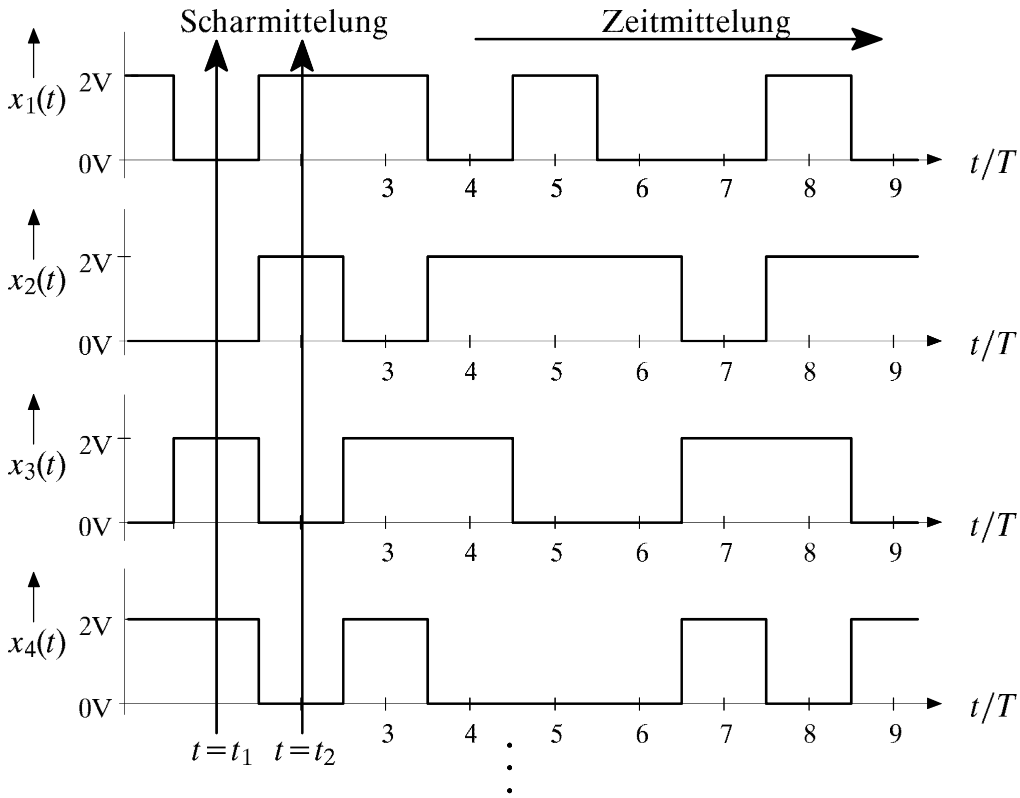


Bild 9.1: Mustersignale $x_1(t)$, ... , x_4(t) eines Zufallsprozesses $\{x_i(t)\}$ mit den Eigenschaften "binär", "gleichwahrscheinlich" und "statistisch unabhängig".

Definiert man den Momentanwert aller Musterfunktionen $x_i(t)$ zu einem festen Zeitpunkt $t = t_1$ als Zufallsgröße $x_1 = x_i(t_1)$, so lassen sich deren statistische Eigenschaften entsprechend Kapitel 1 beschreiben. Die Berechnung der statistischen Kenngrößen muß dabei durch *Scharmittelung* über alle möglichen Musterfunktionen erfolgen (Mittelung über die Laufvariable i). Beispielsweise kann man die Auftrittswahrscheinlichlichkeiten der diskreten Zufallsgröße $x_1 \in \{0\text{V}, 2\text{V}\}$ durch deren relative Häufigkeiten annähern.

Zu einem anderen Zeitpunkt $t = t_2$ kann der Zufallsprozeß andere Eigenschaften (z.B. andere Auftrittswahrscheinlichkeiten und andere Mittelwerte) besitzen. Einen solchen Prozeß bezeichnet man dann als nichtstationär. Dagegen stimmen bei einem *stationären Prozeß* die statistischen Kenngrößen zu jedem beliebigen Zeitpunkt überein.

Eine sehr wichtige Unterklasse der stationären Zufallsprozesse sind die sogenannten *ergodischen Prozesse*, bei denen jede Musterfunktion $x_i(t)$ repräsentativ für den gesamten Zufallsprozeß ist. Alle statistischen Beschreibungsgrößen eines ergodischen Prozesses lassen sich aus einer einzigen Musterfunktion durch *Zeitmittelung* gewinnen (Mittelung über die Laufvariable ν). Das bedeutet, daß bei einem ergodischen Prozeß die Zeitmittelwerte einer jeden Musterfunktion mit den entsprechenden Scharmittelwerten zu beliebigen Zeitpunkten übereinstimmen.

Die Ergodizität läßt sich aus einer endlichen Anzahl von Musterfunktionen und endlichen Signalausschnitten nicht nachweisen. Trotzdem wird in den meisten Anwendungen hypothetisch, aber trotzdem durchaus berechtigt, von Ergodizität ausgegangen. Anhand der Ergebnisse muß anschließend die Plausibilität dieser Hypothese überprüft werden.

9.2 Autokorrelationsfunktion

Zur quantitativen Erfassung der inneren statistischen Bindungen betrachten wir nun den in Bild 9.2 dargestellten Prozeß $\{x_i(t)\}$. Im Gegensatz zum Zufallsprozeß von Bild 9.1 können hier die einzelnen Musterfunktionen $x_i(t)$ zu allen beliebigen Zeiten alle beliebigen Werte annehmen. Das bedeutet, daß der Zufallsprozeß $\{x_i(t)\}$ von Bild 9.2 sowohl wert– als auch zeitkontinuierlich ist.

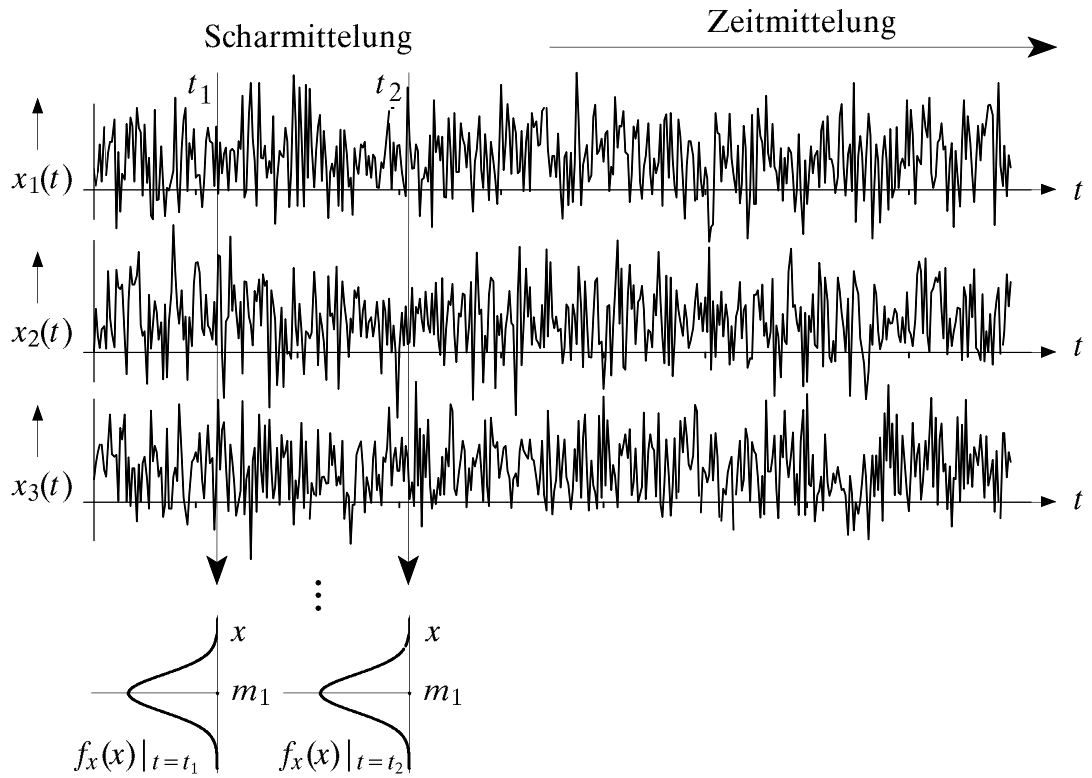


Bild 9.2: Mustersignale $x_1(t), x_2(t)$, ... eines wertkontinuierlichen Zufallsprozesses.

Ein solcher Prozeß wird z.B. bei der Untersuchung des thermischen Rauschens zugrunde gelegt. Dabei wird von der Vorstellung ausgegangen, daß beliebig viele, in ihren physikalischen und statistischen Eigenschaften völlig gleiche Widerstände vorhanden sind, von denen jeder ein anderes Zufallssignal $x_i(t)$ abgibt.

Ist der Zufallsprozeß $\{x_i(t)\}$ nichtstationär, so müssen alle statistischen Kenngrößen – z.B. die in Abschnitt 4.2 definierten Momente – als Scharmittelwerte bestimmt werden. Im allgemeinen sind diese zeitabhängig, d.h. es ist $m_k(t_1) \neq m_k(t_2)$. Da die WDF $f_x(x)$ über die charakteristische Funktion

$$C_x(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{k!} \cdot \omega^k \circ\!\!-\!\!\bullet\; f_x(x) \tag{9.2}$$

durch die Summe aller Momente festliegt (vgl. z.B. [24]), ist somit auch $f_x(x)$ zeitabhängig.

Sollen nun nicht nur die Amplitudenverteilungen zu den verschiedenen Zeitpunkten t_1, t_2, ... ermittelt werden, sondern auch die statistischen Bindungen zwischen diesen, so muß auf die zweidimensionale Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktion übergegangen werden. Betrachtet man die beiden Zeitpunkte t_1 und t_2, so ergibt sich diese entsprechend (5.1) mit $x = x(t_1)$ und $y = x(t_2)$.

Es ist offensichtlich, daß bereits die Ermittlung dieser Größe sehr aufwendig ist. Berücksichtigt man weiterhin, daß zur exakten Erfassung aller statistischen Bindungen eines Zufallsprozesses eigentlich die n–dimensionale Verbundwahrscheinlichkeitsdichte herangezogen werden muß, wobei möglichst der Grenzwert $n \to \infty$ durchzuführen ist, so erkennt man die Schwierigkeiten für die Lösung praktischer Probleme.

Aus diesen Gründen geht man zur Beschreibung der statistischen Bindungen eines Zufallsprozesses auf die *Autokorrelationsfunktion* (*AKF*) über, die wie folgt definiert ist:

$$\varphi_x(t_1, t_2) = \mathrm{E}[\, x(t_1) \cdot x(t_2) \,] \ . \tag{9.3}$$

Ein Vergleich mit Kapitel 5 zeigt, daß der AKF–Wert $\varphi_x(t_1, t_2)$ das gemeinsame Moment m_{11} zwischen den beiden Zufallsgrößen $x(t_1)$ und $x(t_2)$ angibt; dieses ändert sich mit t_1 und t_2. Um den Zusammenhang mit der Kreuzkorrelationsfunktion $\varphi_{xy}(t_1, t_2)$ zwischen *zwei* unterschiedlichen statistischen Größen x und y (vgl. Abschnitt 9.4) deutlich zu machen, wird in mancher Literatur für die AKF häufig auch die Nomenklatur $\varphi_{xx}(t_1, t_2)$ gewählt.

Während für exakte Aussagen hinsichtlich der statistischen Bindungen eines Prozesses eigentlich die n–dimensionale Verbunddichte (mit $n \to \infty$) benötigt wird, werden durch den Übergang auf die Autokorrelationsfunktion folgende Vereinfachungen getroffen:

- Anstelle von *unendlich vielen* Zeitpunkten werden hier *nur zwei* betrachtet.
- Anstelle aller gemeinsamen Momente m_{kl} zu diesen beiden Zeitpunkten t_1 und t_2 mit $k, l \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ wird hier nur das Moment m_{11} erfaßt, das die lineare Abhängigkeit des Prozesses wiedergibt.

Deshalb sollte bei der Bewertung von Zufallsprozessen mittels AKF stets berücksichtigt werden, daß diese nur beschränkte Aussagen über die statistischen Bindungen erlaubt.

Die obige AKF–Definition (9.3) gilt allgemein, also auch für nichtstationäre Prozesse. Ein Beispiel eines nichtstationären Vorgangs ist das Auftreten von Impulsstörungen im Fernsprechnetz, verursacht durch Wählimpulse in benachbarten Leitungen. Bei Digitalsignalübertragung führen solche nichtstationären Störprozesse meist zu Bündelfehlern.

Ein stationärer Zufallsprozeß zeichnet sich demgegenüber dadurch aus, daß seine statistischen Eigenschaften invariant gegenüber Zeitverschiebungen sind. Für die Autokorrelationsfunktion bedeutet dies, daß sie nicht mehr eine Funktion der beiden unabhängigen Variablen t_1 und t_2 ist, sondern nur von der Zeitdifferenz $\tau = t_2 - t_1$ abhängt:

$$\varphi_x(t_1, t_2) \longrightarrow \varphi_x(\tau) = \mathrm{E}[\, x(t) \cdot x(t + \tau) \,] \ . \tag{9.4}$$

Die Scharmittelung kann dabei zu jeder beliebigen Zeit t erfolgen.

Weiterhin wird hier Ergodizität vorausgesetzt. Diese besagt unter anderem, daß jede Musterfunktion repräsentativ für den gesamten Prozeß ist. Ergodizität läßt sich allerdings aus einer endlichen Anzahl von Musterfunktionen und endlichen Signalausschnitten nicht nachweisen. Da diese Einschränkung bei praktischen Anwendungen stets gegeben sind, ist die Eigenschaft "ergodisch" nie nachweisbar, trotzdem häufig zutreffend.

Unter der Annahme eines ergodischen Prozesses können alle Momente auch durch Zeitmittelung über eine einzige, ausgewählte Musterfunktion $x(t)$ ermittelt werden und stimmen mit den entsprechenden Scharmittelwerten überein:

$$m_k = \overline{x^k(t)} = \mathrm{E}[\, x^k \,] \; . \tag{9.5}$$

Damit und aus (9.4) folgt für die AKF eines ergodischen Prozesses, dessen Mustersignale jeweils von $-\infty$ bis $+\infty$ reichen (T_M bezeichnet die Meßdauer):

$$\varphi_\mathrm{x}(\tau) = \overline{x(t)\cdot x(t+\tau)} = \lim_{T_\mathrm{M}\to\infty} \frac{1}{T_\mathrm{M}} \cdot \int_{-T_\mathrm{M}/2}^{+T_\mathrm{M}/2} x(t)\cdot x(t+\tau)\;\mathrm{d}t \; . \tag{9.6}$$

Die zeitliche Mittelung über das unendlich ausgedehnte Zeitintervall ist hier durch die überstreichende Linie gekennzeichnet.

Bei periodischen Signalen kann auf den Grenzübergang verzichtet werden, so daß in diesem Sonderfall mit der Periodendauer T_0 der Mustersignale die AKF auch in folgender Weise geschrieben werden kann:

$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cdot x(t+\tau)\;\mathrm{d}t = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} x(t)\cdot x(t+\tau)\;\mathrm{d}t \; . \tag{9.7}$$

Nachfolgend sind die wichtigsten Eigenschaften der AKF zusammengestellt:

- Ist der betrachtete Zufallsprozeß reell, so gilt dies auch für seine AKF.
- Die AKF besitzt die Einheit einer Leistung. Häufig bezieht man diese auf den Einheitswiderstand 1Ω, so daß $\varphi_x(\tau)$ z.B. die Einheit "V^2" oder "A^2" hat.
- Die AKF ist immer eine gerade Funktion, d.h. es gilt stets $\varphi_x(-\tau) = \varphi_x(\tau)$. Dagegen gehen alle Phasenbeziehungen des Zufallsprozesses in der AKF verloren.
- Die AKF an der Stelle $\tau = 0$ gibt den quadratischen Mittelwert m_2 und damit die gesamte Signalleistung (Gleich– und Wechselanteil) an:

$$\varphi_x(0) = m_2 = \overline{x^2(t)} \; . \tag{9.8}$$

- Der Maximalwert der AKF tritt an der Stelle $\tau = 0$ auf, d.h. es ist stets $|\varphi_x(\tau)| \le \varphi_x(0)$. Bei nichtperiodischen Prozessen ist für $\tau \ne 0$ der Betrag $|\varphi_x(\tau)|$ der AKF stets kleiner als die Leistung $\varphi_x(0)$.
- Bei einem periodischen Prozeß weist die AKF die gleiche Periodendauer T_0 wie die einzelnen Mustersignale $x_i(t)$ auf:

$$\varphi_x(\pm T_0) = \varphi_x(\pm 2\cdot T_0) = \ldots = \varphi_x(0) \; . \tag{9.9}$$

- Der Gleichanteil eines nichtperiodischen Signals kann aus dem Grenzwert der AKF für $\tau\to\infty$ berechnet werden. Hierbei gilt:

$$\lim_{\tau\to\infty} \varphi_x(\tau) = m_1^2 = [\,\overline{x(t)}\,]^2 \; . \tag{9.10}$$

Dagegen schwankt bei Signalen mit periodischen Anteilen der Grenzwert der AKF für $\tau\to\infty$ um diesen Endwert m_1^2.

Bild 9.3(a) zeigt je ein Mustersignal zweier verschiedener Prozesse $\{x_i(t)\}$ und $\{y_i(t)\}$, wobei ersterer höhere Frequenzanteile beinhaltet. In Bild 9.3(b) sind die dazugehörigen Autokorrelationsfunktionen $\varphi_x(\tau)$ und $\varphi_y(\tau)$ dargestellt. Die Leistungsdichtespektren $\Phi_x(f)$ und $\Phi_y(f)$ der beiden Prozesse (vgl. Abschnitt 9.3) sind in Bild 9.3(c) angegeben.

Die beiden Mustersignale lassen bereits vermuten, daß beide Prozesse mittelwertfrei sind und den gleichen Effektivwert aufweisen. Die Amplitudenverteilung ist in beiden Fällen gaußförmig. Anhand der Autokorrelationsfunktionen $\varphi_x(\tau)$ und $\varphi_y(\tau)$ werden die Aussagen hinsichtlich der Momente bestätigen. Die Mittelwerte $m_x = m_y = 0$ ergeben sich jeweils aus dem Grenzwert für $\tau \to \infty$. Bei einem mittelwertfreien Signal $x(t)$ gilt für die Varianz: $\sigma_x^2 = \varphi_x(0)$; daraus kann man die Effektivwerte $\sigma_x = \sigma_y = 0.1$ V berechnen.

Aus Bild 9.3(b) ist weiter zu erkennen, daß die AKF–Werte um so langsamer abfallen, je stärker die inneren statistischen Bindungen sind. Während das Mustersignal $x(t)$ mit der relativ schmalen AKF sich zeitlich sehr schnell ändert, reichen bei dem niederfrequenteren Signal $y(t)$ die statistischen Bindungen deutlich weiter. Das bedeutet, daß der Signalwert $y(t+\tau)$ aus $y(t)$ besser vorausgesagt werden kann als $x(t+\tau)$ aus $x(t)$.

Als quantitatives Maß für die Stärke der statistischen Bindungen wird häufig die Korrelationsdauer $T_{\rm K}$ herangezogen, die sich aus der Autokorrelationsfunktion über das flächengleiche Rechteck ermitteln läßt. Nach den Gesetzmäßigkeiten der Systemtheorie ist die Korrelationsdauer $T_{\rm K}$ gleich dem Quotienten aus $\Phi_x(0)$ und $\varphi_x(0)$. Bei den beiden hier betrachteten Prozessen ist $T_{\rm K} = 0.33\,\mu$s bzw. $T_{\rm K} = 1\,\mu$s.

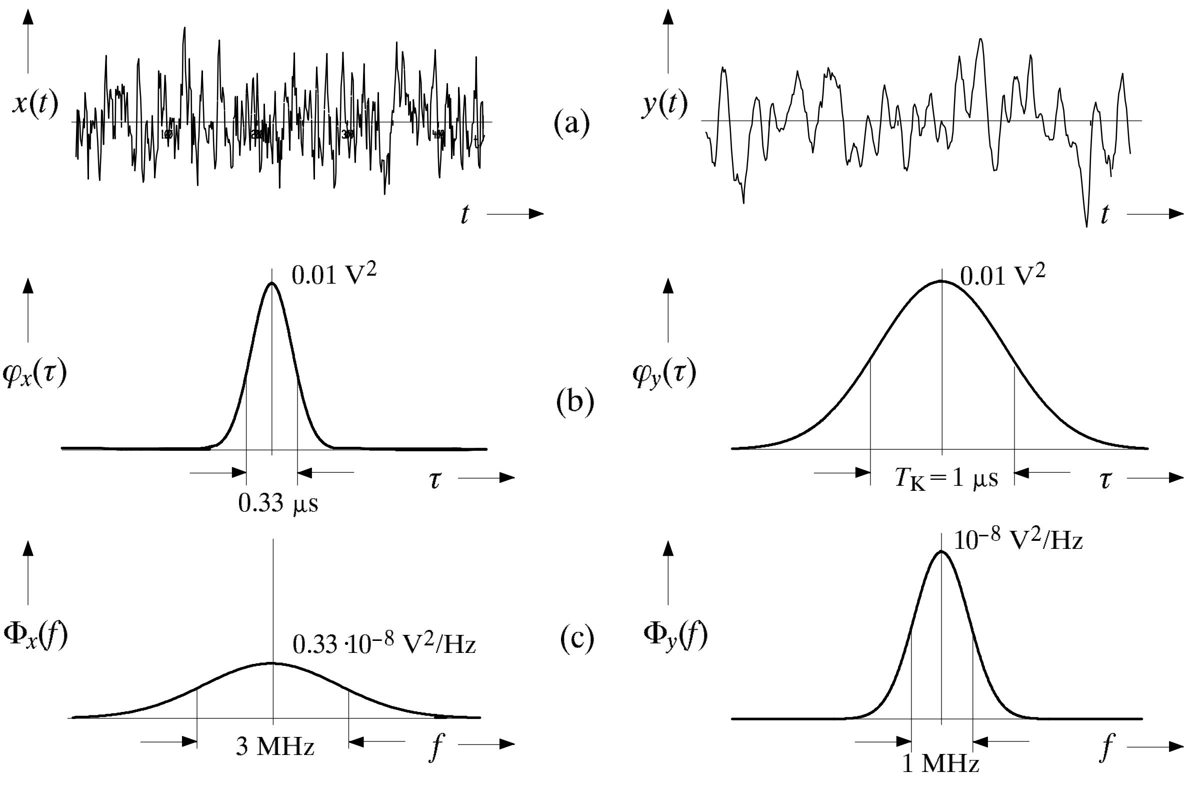


Bild 9.3: Mustersignal (a), AKF (b) und LDS (c) eines höherfrequenten Prozesses $\{x_i(t)\}$ und eines niederfrequenten Prozesses $\{y_i(t)\}$.

9.3 Leistungsdichtespektrum

Die AKF $\varphi_x(\tau)$ gemäß (9.6) liefert Aussagen über die statistischen Eigenschaften des stationären und ergodischen Zufallssignals $x(t)$ im Zeitbereich. Die äquivalente Beschreibungsgröße im Frequenzbereich ist das *Leistungsdichtespektrum* (*LDS*), häufig auch als die *spektrale Leistungsdichte* bezeichnet. AKF und LDS hängen nach dem Theorem von Wiener–Chintchine über die Fouriertransformation zusammen: $\Phi_x(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, \varphi_x(\tau)$. Da $\varphi_x(\tau)$ stets reell und gerade ist, gilt dies auch für das LDS $\Phi_x(f)$. Besitzt der Zufallsprozeß keinen Gleichanteil und keine periodischen Komponenten, so erhält man:

$$\Phi_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(\tau) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f\tau} \, d\tau \; . \tag{9.11}$$

Periodische Anteile mit der Periodendauer T_0 einschließlich des Grenzfalls $T_0 \to \infty$ (Gleichanteil) führen dagegen zu Diracfunktionen im Leistungsdichtespektrum.

Die (mittlere) Signalleistung $P_x = \overline{x^2(t)}$ ergibt sich aus dem Integral über das LDS:

$$P_x = m_{2x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) \, df \quad (= \varphi_x(0)\,) \; . \tag{9.12}$$

Das aus der klassischen Systemtheorie bekannte Reziprozitätsgesetz von Zeitdauer und Bandbreite (vgl. Abschnitt 6.3) gilt natürlich auch für statistische Größen. Wie aus Bild 9.3 deutlich wird, entspricht einer schmalen AKF ein breites LDS und umgekehrt.

Bild 9.4 zeigt eine mögliche Anordnung zur meßtechnischen Bestimmung des einseitigen, nur für positive Frequenzen definierten Leistungsdichtespektrums $\Phi'_x(f) = 2 \cdot \Phi_x(f)$. Das Zufallssignal $x(t)$ wird auf ein (möglichst) rechteckförmiges Schmalbandfilter mit der Mittenfrequenz f und Bandbreite Δf gegeben. Das Ausgangssignal $x_f(t)$ wird anschließend quadriert und der Mittelwert über eine längere Meßdauer T_M gebildet. Damit erhält man die Signalleistung $\overline{x_f^2(t)}$ im Frequenzbereich von $f - \Delta f/2$ bis $f + \Delta f/2$. Das (einseitige) LDS ergibt sich daraus nach Division durch die Filterbandbreite Δf zu

$$\Phi'_x(f) \approx \frac{1}{\Delta f \cdot T_M} \cdot \int_0^{T_M} x_f^2(t) \, dt \; . \tag{9.13}$$

Bei endlichen Werten von Δf und T_M stellt (9.13) nur eine Näherung dar, die jedoch um so genauer ist, je größer T_M und je kleiner Δf gewählt werden. Anhand dieser Meßvorschrift wird deutlich, daß jedes LDS für alle Frequenzwerte f nicht–negativ und reell ist. Aus (9.11) folgt weiterhin, daß eine Zeitfunktion, deren Fouriertransformierte negative Anteile besitzt, keine AKF sein kann. Beispielsweise gibt es keine rechteckförmige AKF.

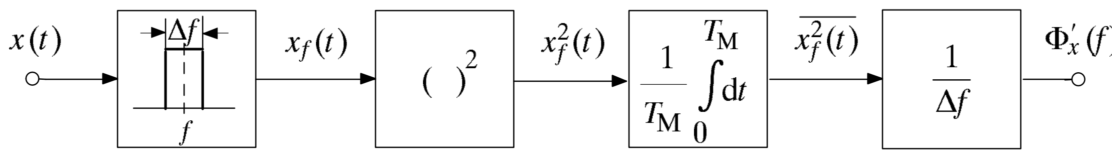


Bild 9.4: Zur Messung des Leistungsdichtespektrums $\Phi'_x(f)$ eines Zufallssignals $x(t)$.

9.4 Kreuzkorrelationsfunktion und -LDS

Betrachten wir nun noch eine weitere wichtige Kenngröße der statistischen Signaltheorie, nämlich die *Kreuzkorrelationsfunktion* (*KKF*). Diese ist ein Maß für die lineare statistische Abhängigkeit der Augenblickswerte zweier Zufallssignale (bzw. –prozesse) und dient somit der Beschreibung der statistischen Verwandtschaft zwischen diesen.

Setzt man Ergodizität voraus, so gilt für die beiden Kreuzkorrelationsfunktionen zweier stochastischer Prozesse mit den Musterfunktionen $x(t)$ und $y(t)$:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \overline{x(t)\cdot y(t+\tau)} = \lim_{T_M\to\infty} \frac{1}{T_M}\cdot \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} x(t)\cdot y(t+\tau)\,\mathrm{d}t\ , \qquad (9.14)$$

$$\varphi_{yx}(\tau) = \overline{y(t)\cdot x(t+\tau)} = \lim_{T_M\to\infty} \frac{1}{T_M}\cdot \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} y(t)\cdot x(t+\tau)\,\mathrm{d}t\ . \qquad (9.15)$$

Sind zwei Signale $x(t)$ und $y(t)$ miteinander unkorreliert, so ist $\varphi_{xy}(\tau) = \varphi_{yx}(\tau) = 0$.

Ein Vergleich obiger Definitionen mit (9.6) macht die Ähnlichkeit zwischen AKF und KKF deutlich. In der Literatur wird deshalb häufig für die AKF des Prozesses $\{x_i(t)\}$ anstelle von $\varphi_x(\tau)$ auch die Nomenklatur $\varphi_{xx}(\tau)$ gewählt.

Im Gegensatz zur AKF ist die KKF nicht symmetrisch zu $\tau = 0$, und dem Wert $\varphi_{xy}(0)$ kommt im allgemeinen keine besondere, physikalisch interpretierbare Bedeutung wie bei der AKF (Leistung) zu. Es gilt hier lediglich die Symmetriebeziehung $\varphi_{xy}(\tau) = \varphi_{yx}(-\tau)$.

Tritt der Maximalwert der KKF an der Stelle t_0 auf, so bedeutet dies, daß die stärksten linearen Abhängigkeiten (”Ähnlichkeiten”) zwischen den Signalen $x(t)$ und $y(t+t_0)$ bestehen, d.h. daß durch eine Verschiebung von $y(t)$ um die Zeitdauer t_0 die Korrelation zwischen beiden Signalen maximal wird. Diese Eigenschaft wird in der Praxis oft zu Synchronisationszwecken genutzt.

Für manche Anwendungen ist es vorteilhaft, die Korrelation zwischen zwei Zufallssignalen $x(t)$ und $y(t)$ im Frequenzbereich zu beschreiben. Dazu bildet man die beiden Fouriertransformierten $\Phi_{xy}(f)$ •—○ $\varphi_{xy}(\tau)$ und $\Phi_{yx}(f)$ •—○ $\varphi_{yx}(\tau)$ der Kreuzkorrelationsfunktionen, die man als die *Kreuzleistungsdichtespektren* (abgekürzt KLDS) bezeichnet. Im Gegensatz zu den (Auto–)Leistungsdichtespektren $\Phi_x(f)$ und $\Phi_y(f)$ können $\Phi_{xy}(f)$ und $\Phi_{yx}(f)$ komplex sein, da $\varphi_{xy}(\tau)$ und $\varphi_{yx}(\tau)$ im allgemeinen ungerade Funktionen sind.

Bei reellen Zufallsprozessen (und damit auch reellen Kreuzkorrelationsfunktionen) gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$\Phi_{xy}(-f) = \Phi_{yx}(f)\ , \qquad (9.16)$$

$$\Phi_{xy}(-f) = \Phi_{xy}^{*}(f)\ . \qquad (9.17)$$

Die Kreuzleistungsdichtespektren werden im Kapitel 11 im Zusammenhang mit dem Wiener–Filter noch eingehend behandelt, ebenso in den Versuchen *”I&E”* sowie *”B&C”* des Praktikums *Simulation digitaler Übertragungssysteme*.

9.5 Numerische Ermittlung von AKF und LDS

Für eine Rechnersimulation sind nur zeitdiskrete Signale $\langle x_\nu \rangle$ geeignet. Jedes zeitkontinuierliche Signal $x(t)$ wird aber durch die Folge seiner Abtastwerte $x_\nu = x(\nu \cdot T_\mathrm{A})$ vollständig beschrieben, wenn $x(t)$ frequenzmäßig auf $\pm B_x$ begrenzt ist und der Abstand T_A zweier Abtastwerte das Abtasttheorem erfüllt (vgl. auch Abschnitt 12.3):

$$T_\mathrm{A} \leq \frac{1}{2 \cdot B_x} \quad . \tag{9.18}$$

Für das Folgende wird vorausgesetzt, daß diese Bedingung stets erfüllt ist.

Da die Signalwerte nur zu den diskreten Zeitpunkten vorliegen, kann man auch die AKF nur zu ganzzahligen Vielfachen von T_A bestimmen. Außerhalb der äquidistanten Zeitpunkte $\lambda \cdot T_\mathrm{A}$ wird die AKF zu Null gesetzt, was mathematisch der Multiplikation mit einem Diracpuls entspricht. Die zeitdiskrete (abgetastete) Repräsentation der kontinuierlichen AKF $\varphi_x(\tau)$ lautet somit:

$$\mathrm{A}\{\varphi_x(\tau)\} = \varphi_x(\tau) \cdot \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} T_\mathrm{A} \cdot \delta(\tau - \lambda \cdot T_\mathrm{A}) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} T_\mathrm{A} \cdot \varphi_x(\lambda \cdot T_\mathrm{A}) \cdot \delta(\tau - \lambda \cdot T_\mathrm{A}) \, , \tag{9.19}$$

wobei die zeitdiskreten AKF–Werte z.B. durch Zeitmittelung berechnet werden können:

$$\varphi_x(\lambda \cdot T_\mathrm{A}) = \overline{x\,(\nu \cdot T_\mathrm{A}) \cdot x\,((\nu + \lambda) \cdot T_\mathrm{A})} = \overline{x_\nu \cdot x_{\nu+\lambda}} \; . \tag{9.20}$$

Die Fouriertransformierte zu $\mathrm{A}\{\varphi_x(\tau)\}$ ergibt ein mit $1/T_\mathrm{A}$ periodisches Leistungsdichtespektrum $\mathrm{P}\{\Phi_x(f)\}$. Da sowohl $\varphi_x(\tau)$ als auch $\mathrm{A}\{\varphi_x(\tau)\}$ symmetrische Funktionen sind, gilt dabei folgende Beziehung:

$$\mathrm{P}\{\Phi_x(f)\} = T_\mathrm{A} \cdot \varphi_x(0) + 2\,T_\mathrm{A} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} \varphi_x(\lambda \cdot T_\mathrm{A}) \cdot \cos(2\pi \cdot \lambda \cdot f \cdot T_\mathrm{A}) \; . \tag{9.21}$$

Das LDS $\Phi_x(f)$ des zeitkontinuierlichen Prozesses erhält man aus $\mathrm{P}\{\Phi_x(f)\}$ durch Bandbegrenzung auf den Frequenzbereich $|f| \leq 1/(2 \cdot T_\mathrm{A})$. Im Zeitbereich bedeutet diese Operation eine Interpolation der AKF–Abtastwerte $\varphi_x(\lambda \cdot T_\mathrm{A})$ mit der si–Funktion.

Bild 9.5 soll diesen Zusammenhang verdeutlichen, auf den in Kapitel 10 ausführlich eingegangen wird. Die Impulsgewichte der Diracfunktionen von $\mathrm{A}\{\varphi_x(\tau)\}$ sind proportional zu $\varphi_x(\tau)$. Die Fouriertransformation von $\mathrm{A}\{\varphi_x(\tau)\}$ führt zum periodischen LDS $\mathrm{P}\{\Phi_x(f)\}$. Durch Bandbegrenzung auf $|f| \leq 1/(2 \cdot T_\mathrm{A})$ ergibt sich das gesuchte LDS $\Phi_x(f)$.

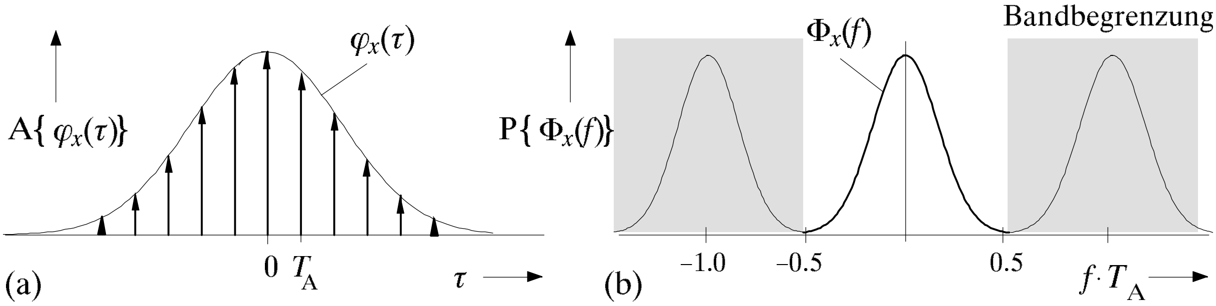


Bild 9.5: Zusammenhang zwischen diskreter AKF (a) und periodischem LDS (b).

9.6 Vorbereitungsfragen

V9.1: Der Diracpuls $p_\delta(t)$ ist eine Folge von äquidistanten Diracimpulsen $\delta(t)$:

$$p_\delta(t) = T_\mathrm{A} \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \nu \cdot T_\mathrm{A}) \ . \tag{9.22}$$

Die Impulsgewichte sind alle gleich; sie sind hier willkürlich gleich dem Abstand T_A der einzelnen Diracimpulse gewählt. Somit ist $p_\delta(t)$ dimensionslos. Ein solcher Diracpuls eignet sich zur Beschreibung der idealen, äquidistanten Abtastung in besonderer Weise (vgl. Kapitel 7). Hier sollen zunächst seine spezifischen Eigenschaften erarbeitet werden.

a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehung

$$p_\delta(t) = T_\mathrm{A} \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \nu \cdot T_\mathrm{A}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\,\mathrm{j} \cdot 2\pi \cdot n \cdot t / T_\mathrm{A}} . \tag{9.23}$$

b) Ermitteln Sie das Spektrum $P_\delta(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\ p_\delta(t)$ mit Hilfe des Verschiebungssatzes:

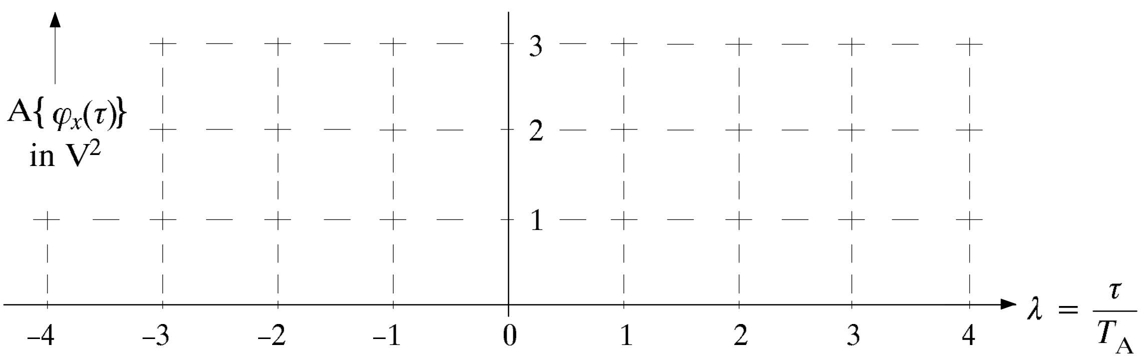
$$\mathrm{e}^{\,\mathrm{j} \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t} \ \circ\!\!-\!\!\bullet \ \delta(f - f_0) \ . \tag{9.24}$$

Interpretieren Sie das Ergebnis.

V9.2: Gegeben sei ein Signal $x(t)$ mit Mittelwert m_x und Streuung σ_x, dessen Abtastwerte in äqidistanten Zeitabständen $T_{\rm A} = 1{\rm ms}$ statistisch voneinander unabhängig sind.

a) Berechnen Sie zunächst die diskreten AKF–Werte $\varphi_x(\lambda \cdot T_{\rm A})$. Unterscheiden Sie hierbei zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda \neq 0$.

b) Welche Zahlenwerte ergeben sich, wenn $x(t)$ zwischen -1V und $+3$V gleichverteilt ist? Skizzieren Sie die zeitdiskrete AKF $\mathrm{A}\{\varphi_x(\tau)\}$ in nachfolgendes Diagramm. *Hinweis:* Die Momente einer zwischen -1 und $+3$ gleichverteilten Zufallsgröße sollten bereits in V4.1 ermittelt werden.

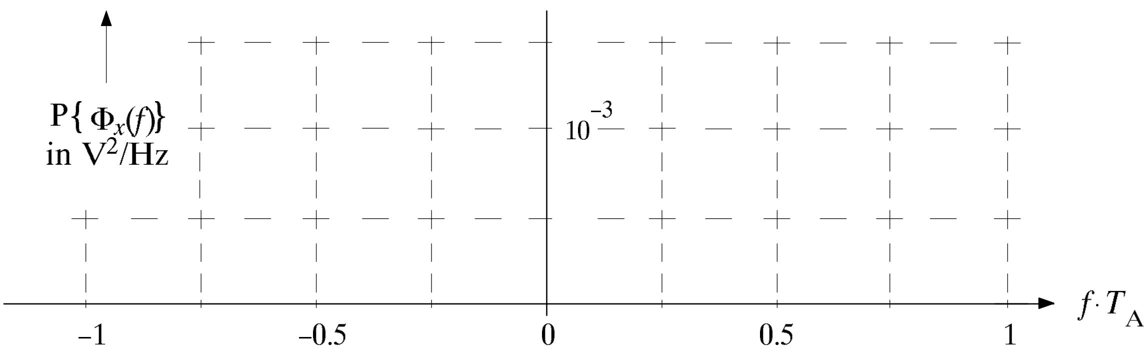


c) Wie unterscheidet sich die diskrete AKF der statistisch unabhängigen Abtastwerte eines gaußverteilten Zufallssignals (mit einer Gleichleistung von 1 $\rm V^2$ und einer Wechselleistung von 1.333 $\rm V^2$) vom Ergebnis der Teilaufgabe b)? Begründung.

d) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der zeitdiskreten AKF A$\{\varphi_x(\tau)\}$. Berücksichtigen Sie dabei, daß die Fouriertransformierte eines Diracpulses im Zeitbereich einen Diracpuls im Frequenzbereich ergibt (vgl. Vorbereitungsfrage V9.1):

$$p_\delta(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} T_\mathrm{A} \cdot \delta(t - \nu \cdot T_\mathrm{A}) \quad ○\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!● \quad P_\delta(f) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{\lambda}{T_\mathrm{A}}) \; . \tag{9.25}$$

e) Berechnen und skizzieren Sie für obige Zahlenwerte das periodisch fortgesetzte Leistungsdichtespektrum P$\{\Phi_x(f)\}$.



f) Wie kann das Leistungsdichtespektrum $\Phi_x(f)$ des kontinuierlichen Zufallssignals $x(t)$ aus dem Ergebnis von e) gewonnen werden? Skizzieren Sie $\Phi_x(f)$ in obiges Diagramm.

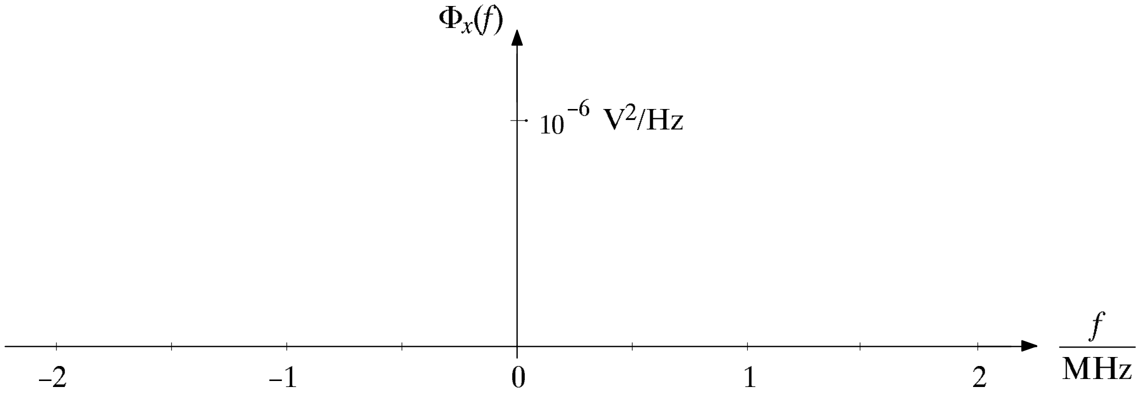
g) Geben Sie $\Phi_x(f)$ formelmäßig an.

V9.3: Gegeben sei das Leistungsdichtespektrum eines rechteckförmigen Binärsignals mit gleichwahrscheinlichen Amplitudenwerten 0 V und 2 V und der Symboldauer $T = 1\,\mu$s:

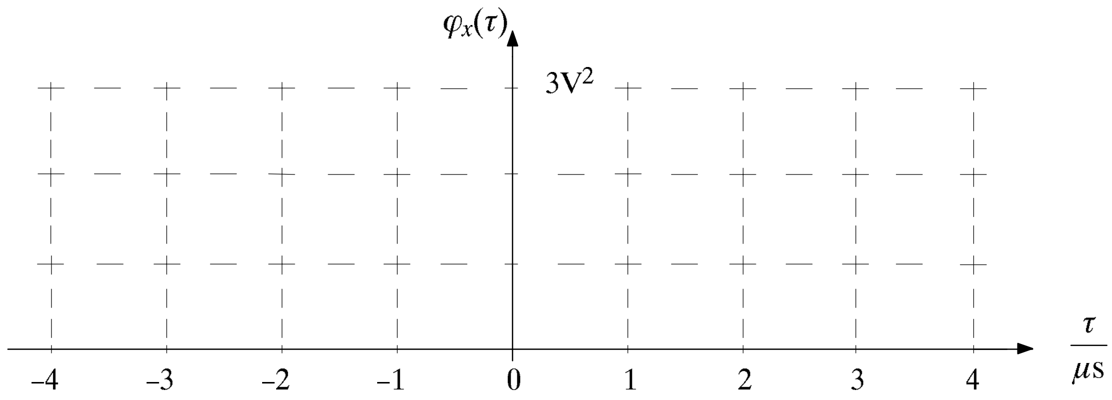
$$\Phi_x(f) \;=\; 1\mathrm{V}^2 \cdot \delta(f) \;+\; 10^{-6}\,\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{Hz}} \cdot \mathrm{si}^2\!\left(\frac{\pi \cdot f}{1\mathrm{MHz}}\right) \;. \qquad (9.26)$$

Jedes der in Bild 9.1 dargestellten Mustersignale weist ein solches LDS auf.

a) Skizzieren Sie $\Phi_x(f)$ in das nachfolgende Diagramm.



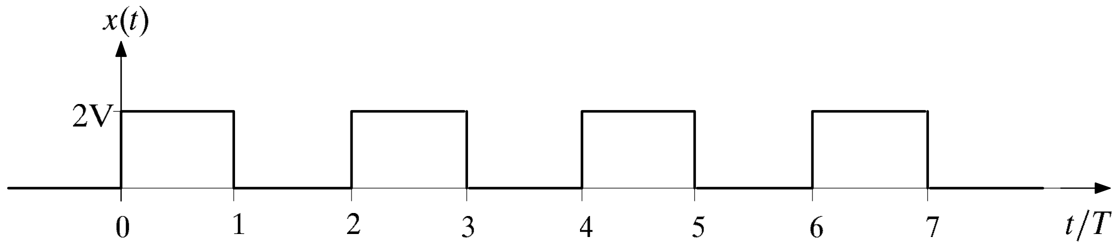
b) Berechnen Sie die zu diesem stationären ergodischen Zufallsprozeß gehörige AKF $\varphi_x(\tau)$ und skizzieren Sie diese in nachfolgendes Diagramm. *Hinweis:* Die Lösung ist z.B. mit Hilfe der Fouriertabelle im Anhang C möglich.



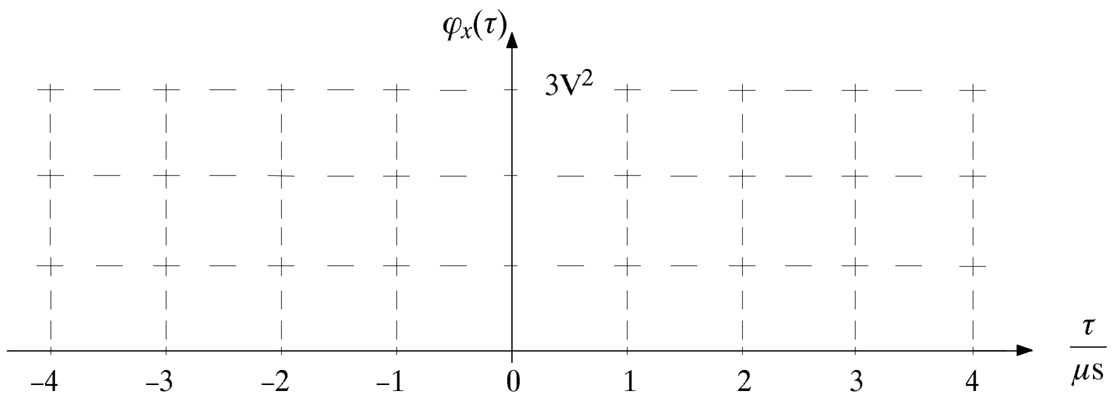
c) Wie groß sind die Gleichleistung, die Wechselleistung und die Gesamtleistung dieses Zufallssignals, jeweils bezogen auf den Widerstand 1 Ω?

d) Wie ändert sich die AKF $\varphi_x(\tau)$, wenn die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Amplitudenwertes 2V allgemein gleich p ist? Skizzieren Sie in das Diagramm von b) zusätzlich den AKF–Verlauf für $p = 0.25$.

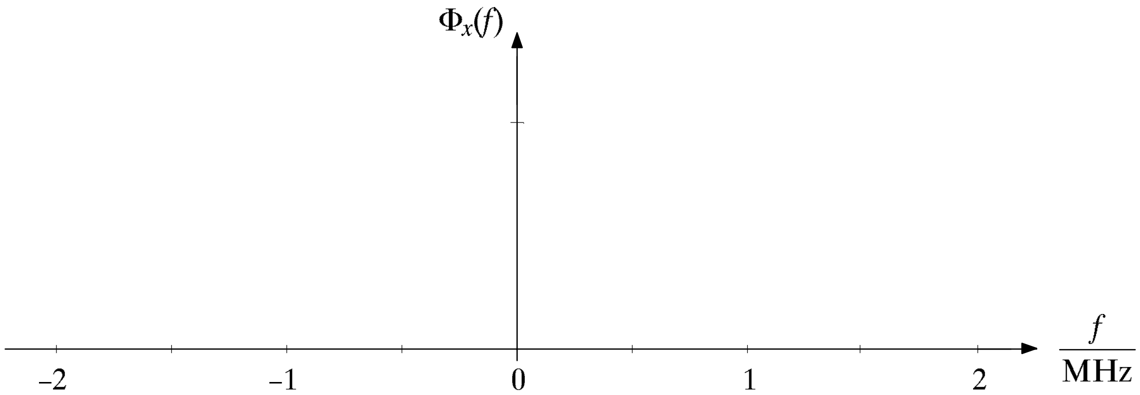
Für die Teilaufgaben e) bis g) sei das rechteckförmige Digitalsignal nun periodisch mit folgendem Verlauf:



e) Berechnen Sie die AKF $\varphi_x(\tau)$ dieses Signals und skizzieren Sie diese. *Hinweis:* Unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften genügt es, die AKF–Werte für $\tau = 0$ und $\tau = T$ zu berechnen.

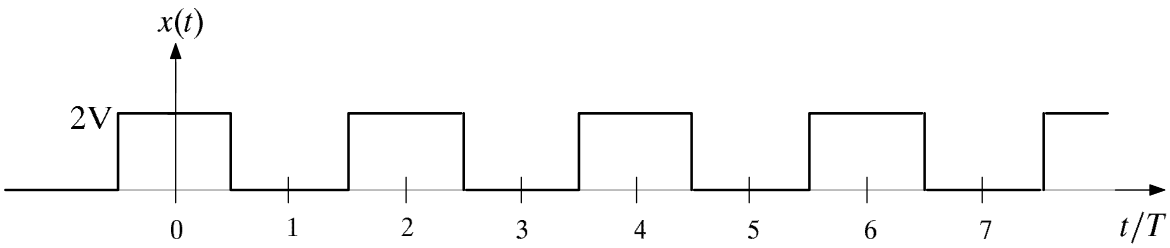


f) Berechnen Sie das zu e) gehörige LDS $\Phi_x(f)$ und skizzieren Sie dieses.



g) Interpretieren Sie die unterschiedlichen Funktionen für AKF und LDS, die sich für das stochastische bzw. für das periodische Rechtecksignal ergeben. Wie hängen diese Funktionen zusammen?

h) Wie unterscheidet sich das nachfolgend skizzierte periodische Rechtecksignal von dem in den Punkten e) bis g) betrachteten Signal? Welche AKF und LDS ergibt sich?



9.7 Versuchsdurchführung

Alle nachfolgenden Aufgaben sollen mit dem Programm *"stp"* durchgeführt werden.

D9.1: Nach Anwahl des Menüpunktes "0" erscheinen nacheinander vier verschiedene Mustersignale von unterschiedlichen stochastischen Prozessen mit zugehöriger AKF und LDS. Beurteilen Sie diese Prozesse hinsichtlich ihrer statistischen Bindungen. Welcher Prozeß hat die stärksten, welcher die schwächsten statistischen Bindungen zwischen den einzelnen Abtastwerten? Bei welchem Prozeß sind die Abtastwerte statistisch voneinander unabhängig? Mögliche Klassifizierungen sind dabei:

- keine statistischen Bindungen,
- geringe statistische Bindungen,
- mittelstarke statistische Bindungen,
- starke statistische Bindungen.

Machen Sie auch Aussagen über die Form der AKF (schnell oder langsam abklingend) und die Form des LDS (breit oder schmal).

Mustersignal	statistische Bindungen	Form der AKF	Form des LDS
1			
2			
3			
4			

D9.2: Wählen Sie nun Menüpunkt 3 mit Mittelwert 0, Streuung 1 und $L = 10$.
Hinweis: Bei der LDS–Berechnung wird im Programm von Gl. (9.21) ausgegangen, doch sind die berücksichtigten AKF–Werte auf $\varphi_x(0)$ bis $\varphi_x(L \cdot T_{\mathrm{A}})$ begrenzt.

a) Untersuchen Sie am Beispiel von "mittleren statistischen Bindungen" den Einfluß der Anzahl N von Zufallszahlen auf die Genauigkeit der AKF– und LDS–Berechnung. Wählen Sie $N = 1\,000$, $N = 5\,000$, $N = 10\,000$ bzw. $N = 50\,000$ und notieren Sie den mittleren quadratischen Fehler (MQF) bei der LDS–Berechnung. Versuchen Sie insbesondere zu begründen, warum die Abweichung in der AKF "wellenförmig" verläuft, wenn N zu klein gewählt wird.

	$N = 1000$	$N = 5000$	$N = 10000$	$N = 50000$
MQF (bzgl. LDS)				

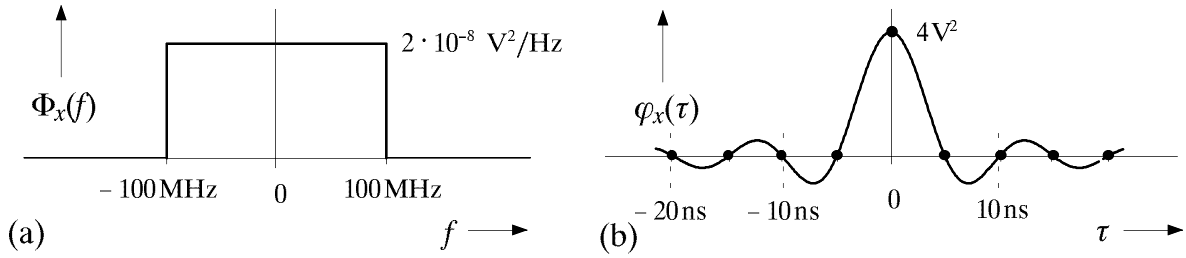
b) Interpretieren Sie die erreichbare Genauigkeit der LDS–Ermittlung gemäß Gl. (9.21) anhand des mittleren quadratischen Fehlers (MQF).

c) Im folgenden gelte $N = 50\,000$. Untersuchen Sie nun den Einfluß des Parameters L auf die LDS–Berechnung.

	$L = 5$	$L = 10$	$L = 20$	$L = 40$
MQF (bzgl. LDS)				

D9.3: Betrachten Sie nun mit dem Programm *"stp"* eine gaußverteilte Zufallsfolge ohne statistische Bindungen zwischen den einzelnen Abtastwerten (Menüpunkt 1, Mittelwert 0, Streuung 2V). Wählen Sie für alle nachfolgenden Teilaufgaben $N = 50\,000$.

a) Begründen Sie, warum das LDS $\Phi_x(f)$ des zeitkontinuierlichen (hier jedoch zeitdiskret simulierten) Prozesses z.B. den in nachfolgender Skizze (a) dargestellten Verlauf haben könnte. Welche Abtastzeit T_A ist dieser Skizze zugrundegelegt?

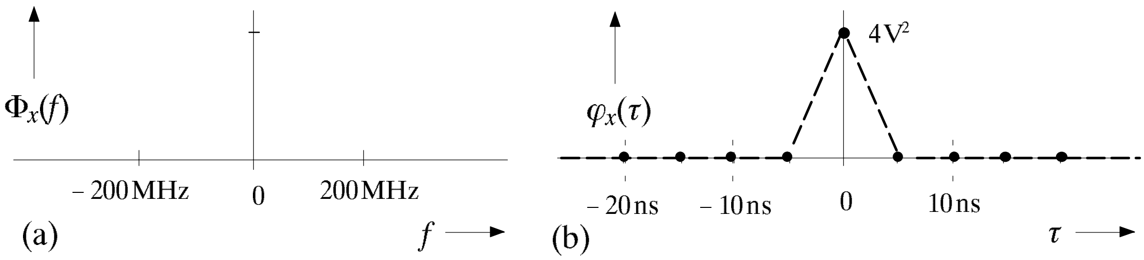


b) In Skizze (b) ist die dazugehörige Autokorrelationsfunktion $\varphi_x(\tau)$ des zeitkontinuierlichen Prozesses dargestellt. Die Abtastwerte des zeitdiskreten Prozesses sind durch Punkte markiert. Interpretieren Sie diesen Funktionsverlauf und geben Sie diesen in analytischer Form an.

c) Welcher Zusammenhang (im statistischen Sinne) besteht zwischen den Signalwerten

1. $x(t)$ und $x(t+5\text{ns})$,
2. $x(t)$ und $x(t+1\text{ns})$,
3. $x(t)$ und $x(t+7\text{ns})$?

d) Im Programm *"stp"* sind die AKF–Abtastwerte vereinfachend durch Geradenstücke verbunden (siehe Skizze b)? Welcher Form des LDS entspricht diese Darstellung? Skizzieren Sie $\Phi_x(f)$ in das nachfolgende Diagramm (a).



e) Wie ändert sich die AKF durch einen Gleichanteil von 1 V?

f) Wie macht sich diese Änderung im Leistungsdichtespektrum bemerkbar?

9.8 Übungsaufgaben

In den Übungsaufgaben zu diesem Kapitel sollen Sie zwei verschiedene Methoden zur Berechnung der (diskreten) AKF–Werte eines stochastischen Prozesses kennenlernen, die beide auf Gl. (9.20) beruhen. Verwenden Sie zum Übersetzen und Einbinden Ihrer Unterprogramme in das Hauptprogramm *"stp"* jeweils die Prozedur *"mkstp"* für die C– bzw. *"mkstp –f"* für die Fortran–Version.

Ü9.1: Für das erste Verfahren ist in Bild 9.6 ein Berechnungsschema angegeben. Das AKF–Feld $\varphi_x(\lambda)$ mit $\lambda = 0, \dots, k$ wird zunächst mit Nullen vorbelegt. Bei jedem Schleifendurchlauf (indiziert mit der Laufvariablen ν) werden die in den Feldelementen $\varphi_x(0)$ bis $\varphi_x(k)$ abgespeicherten Werte jeweils um den Beitrag $x_\nu \cdot x_{\nu+\lambda}$ erhöht. Werden am Ende der Berechnung noch die in $\varphi_x(\lambda)$ gespeicherten Werte durch die Anzahl N der Summanden dividiert, so enthält dieses Feld die gesuchten diskreten AKF–Werte.

$$
\begin{array}{llllllllll}
\lambda = 0: & N\cdot\varphi_x(0) = & x_1\cdot x_1 & + x_2\cdot x_2 & + & \dots\dots & + x_\nu\cdot x_\nu & + & \dots\dots & + x_N\cdot x_N\,, \\
\lambda = 1: & N\cdot\varphi_x(1) = & x_1\cdot x_2 & + x_2\cdot x_3 & + & \dots\dots & + x_\nu\cdot x_{\nu+1} & + & \dots\dots & + x_N\cdot x_{N+1}\,, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
\lambda: & N\cdot\varphi_x(\lambda) = & x_1\cdot x_{1+\lambda} & + x_2\cdot x_{2+\lambda} & + & \dots\dots & + x_\nu\cdot x_{\nu+\lambda} & + & \dots\dots & + x_N\cdot x_{N+\lambda}\,, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
\lambda = k: & N\cdot\varphi_x(k) = & x_1\cdot x_{1+k} & + x_2\cdot x_{2+k} & + & \dots\dots & + x_\nu\cdot x_{\nu+k} & + & \dots\dots & + x_N\cdot x_{N+k}\,.
\end{array}
$$

Bild 9.6: Schema 1 zur Berechnung der AKF–Werte $\varphi_x(\lambda \cdot T_A)$.

a) Schreiben Sie ein Unterprogramm *"void stpak1(N, akf)"*, das aus N Abtastwerten der Zufallsfolge die diskreten AKF–Werte $\varphi_x(0)$ bis $\varphi_x(40)$ nach dem hier angegebenen Prinzip berechnet (d.h. es sei $k = 40$). Benutzen Sie den nachfolgenden Dateiheader:

```
C:   void stpak1(N,akf)            F77: subroutine stpak1(N,akf)
       long N;                            integer N
       float akf[ ];                      real akf(0:40)
```

Die Übergabe der errechneten Werte an das Hauptprogramm *"stp"* erfolgt über das Feld *"akf"*. Die einzelnen Abtastwerte x_ν werden mit der (intern als *"float"* zu vereinbarenden) Funktion *"stpzgr( )"* aufgerufen und müssen vor Ablauf obiger Berechnungen in ein internes Feld eingetragen werden.

Wie groß muß dessen Feldgröße L für ein gegebenes N und k mindestens sein? Dimensionieren Sie L in Ihrem Programm für die Maximalwerte $N = 5000$ und $k = 40$. Wie groß ist der Speicherbedarf des internen Feldes in kByte an einem 32 Bit–Rechner? (1Byte = 8 Bit).

b) Testen Sie Ihr Unterprogramm *"stpak1(N, akf)"* mit Hilfe des Hauptprogramms *"stp"* für den Menüpunkt 5 ($m_1 = 0.5, \sigma = 1$) und den Menüpunkt 6 ($m_1 = 0, \sigma = 1$) durch Vergleich mit dem Menüpunkt 1 bzw. 3. Wählen Sie hierfür $N = 5000$ und notieren Sie jeweils die benötigte Rechenzeit.

– keine statistischen Bindungen:

Menüpunkt	$\varphi_x(0)$	$\varphi_x(1)$	$\varphi_x(2)$	$\varphi_x(3)$	Rechenzeit ($N = 5000$)
1 ("stp")					———
5 ("Übung 9.1")					
7 ("Übung 9.2")					

– mittlere statistische Bindungen:

Menüpunkt	$\varphi_x(0)$	$\varphi_x(1)$	$\varphi_x(2)$	$\varphi_x(3)$	Rechenzeit ($N = 5000$)
3 ("stp")					———
6 ("Übung 9.1")					
8 ("Übung 9.2")					

Ü9.2: Ein Nachteil der Berechnungsmethode nach Ü9.1 ist, daß ein Feld mit sehr vielen Elementen verwendet werden muß (z.B. ergibt sich für $N = 10\,000$ und $k = 10$ eine erforderliche Feldgröße von 10 010 Floatwerten). Da für eine einigermaßen genaue Ermittlung der AKF eigentlich noch sehr viel mehr Abtastwerte herangezogen werden müßten, ist diese Methode in der Praxis unbrauchbar.

Wie jedoch aus dem Berechnungsschema von Bild 9.6 zu erkennen ist, werden bei jedem Schleifendurchlauf nur einige (genauer gesagt: $k+1$) Abtastwerte benötigt, z.B. beim ν–ten Durchlauf nur die Abtastwerte $x_\nu \ldots x_{\nu+k}$. Der große Speicherbedarf kann daher vermieden werden, wenn man ein Hilfsfeld $H[0{:}\,k]$ vereinbart, das zunächst (d.h. für $\nu = 1$) mit den Abtastwerten x_1 bis x_{k+1} vorbelegt ist. Beim zweiten Durchlauf ($\nu = 2$) wird der Abtastwert x_1 nicht mehr benötigt. In die frei werdende Speicherzelle $H[0]$ wird stattdessen der neue Wert x_{k+2} eingetragen.

Bild 9.7 erklärt diesen Algorithmus für das Beispiel $k = 10$. Bei jedem Schleifendurchlauf ν liegen in den Speicherzellen $H[0]$ ... $H[10]$ die aktuell benötigten Werte $x_\nu \ldots x_{\nu+10}$ vor, wobei der jeweils neu hinzugekommene Wert $x_{\nu+10}$ hervorgehoben ist. Beim Schleifendurchlauf ν gilt mit $i = \big((\nu-1) \bmod (k+1)\big)$ folgende Zuordnung:

$$x_{\nu+\lambda} = H\big[(i + \lambda) \bmod (k + 1)\big] \; . \tag{9.27}$$

Beispielsweise wird zum Zeitpunkt $\nu = 84$ die neue Zufallsgröße x_{94} in $H[5]$ abgelegt. Dies folgt aus obigen Gleichungen mit $i = 83 \bmod 11 = 6$ und $\lambda = 10$. Die Variable $i = 6$ gibt hierbei an, daß der Abtastwert x_{84} in der Speicherzelle $H[6]$ abgelegt ist.

ν	i	$H[0]$	$H[1]$	$H[2]$	$H[3]$	$H[4]$	$H[5]$	$H[6]$	$H[7]$	$H[8]$	$H[9]$	$H[10]$
1	0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
2	1	$\boxed{x_{12}}$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
⋮	⋮			⋮	⋮		⋮	⋮				
10	9	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	$\boxed{x_{20}}$	x_{10}	x_{11}
11	10	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	$\boxed{x_{21}}$	x_{11}
12	0	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	$\boxed{x_{22}}$
13	1	$\boxed{x_{23}}$	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}
⋮	⋮			⋮	⋮		⋮	⋮				
84	6	x_{89}	x_{90}	x_{91}	x_{92}	x_{93}	$\boxed{x_{94}}$	x_{84}	x_{85}	x_{86}	x_{87}	x_{88}
⋮	⋮			⋮	⋮		⋮	⋮				

Bild 9.7: Zur Verdeutlichung der AKF–Berechnung nach Ü9.2.

a) Füllen Sie die Belegung der Feldelemente für $\nu = 48$ aus und geben Sie an, wie sich daraus die Werte $\varphi_x(0)$, $\varphi_x(1)$, $\varphi_x(2)$, $\varphi_x(9)$ und $\varphi_x(10)$ berechnen lassen. Wie groß ist i?

ν	i	$H[0]$	$H[1]$	$H[2]$	$H[3]$	$H[4]$	$H[5]$	$H[6]$	$H[7]$	$H[8]$	$H[9]$	$H[10]$
⋮	⋮			⋮	⋮		⋮	⋮				
48	....											
⋮	⋮			⋮	⋮		⋮	⋮				

$\varphi_x(0) =$ . . . . $\varphi_x(9) =$ . . . .

$\varphi_x(1) =$ . . . . $\varphi_x(10) =$ . . . .

$\varphi_x(2) =$ . . . .

b) Schreiben Sie ein Programm *"stpak2(N, akf)"*, welches nach dem hier angegebenen Prinzip die diskreten AKF–Werte $\varphi_x(0)$ ... $\varphi_x(40)$ aus N Abtastwerten berechnet (d.h. es gelte wiederum $k = 40$). Die einzelnen Abtastwerte werden wie in *"stpak1"* mit der Funktion *"float stpzgr()"* aufgerufen. Die Übergabe der ermittelten Werte erfolgt auch hier über das Feld *"akf"*. Benutzen Sie den nachfolgenden Dateiheader:

```
C:   void stpak2(N,akf)
       long N;
       float akf[ ];
```

```
F77: subroutine stpak2(N,akf)
       integer N
       real akf(0:40)
```

c) Testen Sie Ihr Unterprogramm *"stpak2(N, akf)"* mit Hilfe des Hauptprogramms *"stp"* für den Menüpunkt 7 ($m_1 = 0.5$, $\sigma = 1$) und den Menüpunkt 8 ($m_1 = 0$, $\sigma = 1$) durch Vergleich mit dem Menüpunkt 1 bzw. 3. Wählen Sie jeweils $N = 5000$. Benutzen Sie zur Auswertung die Tabelle zu Ü9.1. Diskutieren Sie insbesondere die für *"stpak1"* und *"stpak2"* gemessenen Rechenzeiten.

10 Filterung stochastischer Signale

Inhalt: Es werden die aus der klassischen Systemtheorie für deterministische Signale bekannten Gesetze auf die Beschreibung stochastischer Signale erweitert. Dies bildet die Grundlage für die Erzeugung von Zufallssignalen mit statistischen Bindungen, wofür zweckmäßigerweise nichtrekursive bzw. rekursive Digitalfilter eingesetzt werden. Insbesondere wird auf die Bestimmung der Filterkoeffizienten für eine vorgegebene AKF näher eingegangen, sowie die Auswirkungen der Filterung hinsichtlich WDF diskutiert.

10.1 Stochastische Systemtheorie

Nach den Gesetzen der klassischen Systemtheorie ergibt sich das Ausgangssignal $y(t)$ eines linearen zeitinvarianten Systems mit dem Frequenzgang $H(f)$ als das Faltungsprodukt $y(t) = x(t) * h(t)$ des Eingangssignals $x(t)$ mit der Impulsantwort $h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, H(f)$.

Bei deterministischen Signalen geht man zur Berechnung des Ausgangssignals meist den Umweg über die Amplitudenspektren $X(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, x(t)$ und $Y(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, y(t)$, wobei für das Ausgangsspektrum $Y(f) = X(f) \cdot H(f)$ gilt. Bild 10.1 (oben) verdeutlicht diesen Rechenweg.

Bei stochastischen Signalen existieren die Amplitudenspektren $X(f)$ und $Y(f)$ nicht, da die Zufallssignale $x(t)$ und $y(t)$ nicht für alle Zeiten von $-\infty$ bis $+\infty$ vorhersagbar sind. Zur Beschreibung der statistischen Eigenschaften eines Signals $x(t)$ benutzt man hier vielmehr die Autokorrelationsfunktion $\varphi_x(\tau)$ sowie das Leistungsdichtespektrum $\Phi_x(f)$.

Das Leistungsdichtespektrum $\Phi_y(f)$ am Systemausgang berechnet sich unter Berücksichtigung der Beziehung $|Y(f)|^2 = |X(f)|^2 \cdot |H(f)|^2$ in folgender Weise:

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f) \cdot |H(f)|^2 = \Phi_x(f) \cdot H(f) \cdot H^*(f) \;, \tag{10.1}$$

wobei $H^*(f)$ den zu $H(f)$ konjugiert komplexen Frequenzgang angibt. Das Betragsquadrat $|H(f)|^2$ wird häufig auch als *Leistungsübertragungsfunktion* bezeichnet.

Da das Leistungsdichtespektrum ebenso wie die AKF $\varphi_y(\tau)$ keine Aussagen über die Phasenbeziehungen ermöglicht, wird $\Phi_y(f)$ demzufolge nur durch den Betrag von $H(f)$ beeinflußt, nicht durch dessen Phasengang.

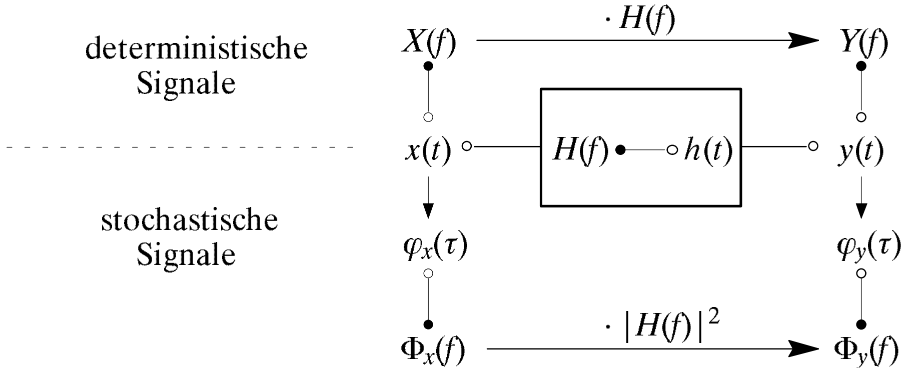


Bild 10.1: Beschreibung eines linearen zeitinvarianten Systems (*LZI–System*) bei deterministischem bzw. stochastischem Ein– und Ausgangssignal.

Mit Hilfe der Fourierrücktransformation folgt aus (10.1) für die AKF am Ausgang

$$\varphi_y(\tau) = \varphi_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \ , \tag{10.2}$$

wobei die Fourierkorrespondenz $H^*(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, h(-\tau)$ berücksichtigt ist.

Die Leistungen der (als gleichsignalfrei angenommenen) Signale $x(t)$ und $y(t)$ lassen sich sowohl aus den entsprechenden Autokorrelationsfunktionen als auch aus den dazugehörigen Leistungsdichtespektren berechnen:

$$P_x = \sigma_x^2 = \overline{x(t)^2} = \varphi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f)\, \mathrm{d}f \ , \tag{10.3}$$

$$P_y = \sigma_y^2 = \overline{y(t)^2} = \varphi_y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_y(f)\, \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) \cdot |H(f)|^2 \, \mathrm{d}f \ . \tag{10.4}$$

Durch Umstellung von (10.1) wird deutlich, daß der Betrag $|H(f)|$ einer Filterfunktion durch Messung des Leistungsdichtespektrums $\Phi_y(f)$ am Ausgang bestimmt werden kann, wenn das LDS $\Phi_x(f)$ der stochastischen Eingangsgröße $x(t)$ bekannt ist:

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{\Phi_y(f)}{\Phi_x(f)}} \ . \tag{10.5}$$

Über den Phasengang von $H(f)$ liefert das Leistungsdichtespektrum $\Phi_y(f)$ keine Aussage. Hier muß vielmehr auf das in Abschnitt 9.4 definierte Kreuzleistungsdichtespektrum $\Phi_{xy}(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, \varphi_{xy}(\tau)$ zwischen Ein– und Ausgangssignal übergegangen werden, wobei der folgende Zusammenhang gilt:

$$\Phi_{xy}(f) = \Phi_x(f) \cdot H(f) \ . \tag{10.6}$$

Diese Beziehung läßt sich aus der Definitionsgleichung (9.14) der KKF unter Berücksichtigung von $y(t) = x(t) * h(t)$ einfach nachweisen, woraus nach einigen Umformungen folgt:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \overline{x(t) \cdot y(t+\tau)} = \varphi_x(\tau) * h(\tau) \ . \tag{10.7}$$

Die Gleichungen (10.6) und (10.7) machen deutlich, daß der Filterfrequenzgang $H(f)$ durch eine Messung mit stochastischer Anregung in Betrag und Phase vollständig ermittelt werden kann, wenn neben den statistischen Kenngrößen des Eingangssignals (AKF oder LDS) auch die KKF $\varphi_{xy}(\tau)$ bzw. deren Fouriertransformierte $\Phi_{xy}(f)$ bestimmt wird.

An den Signalverläufen in Bild 9.3 erkennt man, daß durch die (Tiefpaß–)Filterung eines Zufallssignals die statistischen Bindungen zunehmen und somit die hochfrequenten Schwankungen geglättet werden. Ein gaußverteiltes Rauschsignal ist dabei auch nach der Filterung noch gaußverteilt. Der Einfluß des Filters macht sich hier lediglich in einer Änderung von Mittelwert und Streuung bemerkbar. Bei jeder anderen Verteilung ändern sich – außer der AKF und dem LDS – durch die Filterung nicht nur die Parameter der WDF, sondern auch deren Form. Beispielsweise wird die WDF eines gleichverteilten Eingangssignals immer gaußähnlicher, je schmaler die Filterbandbreite ist.

10.2 Digitale Filter

Die Ergebnisse von Abschnitt 10.1 können für die softwaremäßige Erzeugung eines Zufallssignals $y(t)$ mit statistischen Bindungen genutzt werden. Da in diesem Fall $y(t)$ nur durch seine Abtastwerte $y_\nu = y(\nu \cdot T_\mathrm{A})$ dargestellt werden kann, ist es zweckmäßig, auch den Frequenzgang $H(f)$ durch ein *digitales Filter* zu realisieren.

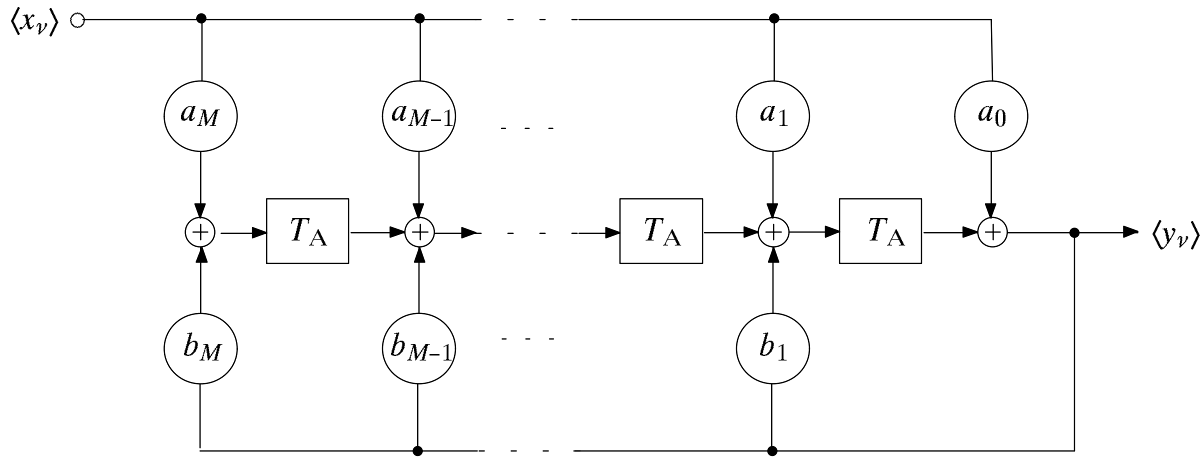


Bild 10.2: Digitales Filter M–ter Ordnung (*Laufzeitfilter*).

Das allgemeine Blockschaltbild eines Digitalfilters ist in Bild 10.2 angegeben. Dieses System gibt die Verknüpfung zwischen der Eingangsfolge $\langle x_\nu \rangle$ und der Ausgangsfolge $\langle y_\nu \rangle$ an; es wird im Zeitbereich durch die folgende Differenzengleichung gekennzeichnet:

$$y_\nu = \sum_{\mu=0}^{M} a_\mu \cdot x_{\nu-\mu} + \sum_{\kappa=1}^{M} b_\kappa \cdot y_{\nu-\kappa} \ . \tag{10.8}$$

Die erste Summe beschreibt die Abhängigkeit des aktuellen Ausgangswertes y_ν vom aktuellen Eingangswert x_ν sowie den M vorangegangenen Eingangswerten $x_{\nu-1}$ .... $x_{\nu-M}$. Dagegen kennzeichnet die zweite Summe die Beeinflussung von y_ν durch die vorherigen Ausgangswerte $y_{\nu-1}$ .... $y_{\nu-M}$. Sie gibt somit den rekursiven Anteil des Filters an.

Für das Folgende wird vorausgesetzt, daß die Abtastwerte x_ν am Filtereingang mittelwertfrei ($m_x = 0$), gaußverteilt (mit Streuung σ_x) und statistisch voneinander unabhängig seien (*Weißes Rauschen*). Die Ausgangswerte y_ν sind somit ebenfalls mittelwertfrei und gaußverteilt, haben jedoch im allgemeinen eine andere Streuung ($\sigma_y \neq \sigma_x$).

Zunächst wird die Generierung der Folge $\langle y_\nu \rangle$ mittels eines nichtrekursiven Filters M–ter Ordnung betrachtet. Dieses zeichnet sich dadurch aus, daß alle Rückführungskoeffizienten b_κ gleich 0 sind. Somit entfällt der untere Teil in Bild 10.2 bzw. die zweite Summe in (10.8). Frequenzgang und Impulsantwort des nichtrekursiven Filters lauten:

$$H(f) = \sum_{\mu=0}^{M} a_\mu \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j} \cdot 2\pi \cdot \mu \cdot f \cdot T_\mathrm{A}} \ , \tag{10.9}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$h(t) = \sum_{\mu=0}^{M} a_\mu \cdot \delta(t - \mu \cdot T_\mathrm{A}) \ . \tag{10.10}$$

Durch Einsetzen von (10.8) in (9.20) erhält man die diskrete AKF am Filterausgang:

$$\varphi_y(\lambda \cdot T_A) = \overline{y_\nu \cdot y_{\nu+\lambda}} = \overline{\sum_{\mu=0}^{M} \sum_{\iota=0}^{M} a_\mu \cdot a_\iota \cdot x_{\nu-\mu} \cdot x_{\nu+\lambda-\iota}} \,. \tag{10.11}$$

Die Überstreichung kennzeichnet hierbei die Mittelung bezüglich der Variablen ν. Da die Koeffizienten a_μ bzw. a_ι unabhängig von der Mittelungsvariablen ν sind, muß die Mittelung in (10.11) nur über die beiden x–Terme erfolgen. Da zudem die Eingangswerte x_ν als statistisch unabhängig voneinander und mittelwertfrei angenommen werden, liefert der Mittelwert $\overline{x_{\nu-\mu} \cdot x_{\nu+\lambda-\iota}}$ für $\iota \neq \mu+\lambda$ stets den Wert 0. Für $\iota = \mu+\lambda$ ist dagegen dieser Mittelwert gleich der Varianz σ_x^2 der Eingangsgröße.

Berücksichtigt man diese Tatsache, so kann die Doppelsumme in (10.11) durch eine einfache Summe ersetzt werden, und man erhält

$$\varphi_y(\lambda \cdot T_\mathrm{A}) = \sigma_x^2 \cdot \sum_{\mu=0}^{M-\lambda} a_\mu \cdot a_{\mu+\lambda} \qquad \text{für } \lambda = 0, 1, \ \ldots \ , M. \tag{10.12}$$

Aufgrund der Symmetrie der AKF gilt für negative λ–Werte: $\varphi_y(-\lambda \cdot T_\mathrm{A}) = \varphi_y(\lambda \cdot T_\mathrm{A})$.

Beispiel: Für ein nichtrekursives Filter 2. Ordnung (Koeffizienten a_0, a_1, a_2) erhält man

$$\begin{aligned} \varphi_y(0) &= \sigma_x^2 \cdot (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2) \ , \\ \varphi_y(-T_\mathrm{A}) = \varphi_y(T_\mathrm{A}) &= \sigma_x^2 \cdot (a_0 \cdot a_1 + a_1 \cdot a_2) \ , \\ \varphi_y(-2T_\mathrm{A}) = \varphi_y(2T_\mathrm{A}) &= \sigma_x^2 \cdot (a_0 \cdot a_2) \ . \end{aligned} \tag{10.13}$$

Setzt man die Zahlenwerte $a_0 = 1/2, a_1 = 1/4, a_2 = 1/8$ ein, welche die Impulsantwort von Bild 10.3(a) charakterisieren, und wird die Streuung des Eingangssignals zu $\sigma_x = 1$ gewählt, so ergibt sich die in Bild 10.3(b) skizzierte AKF. Dieses Bild macht deutlich, daß die AKF $\varphi_y(\lambda \cdot T_\mathrm{A})$ am Ausgang eines nichtrekursiven Filters M–ter Ordnung auf den Bereich $|\lambda| \leq M$ beschränkt ist, wenn die Abtastwerte x_ν des Eingangssignals mittelwertfrei sind und keine statistischen Bindungen aufweisen.

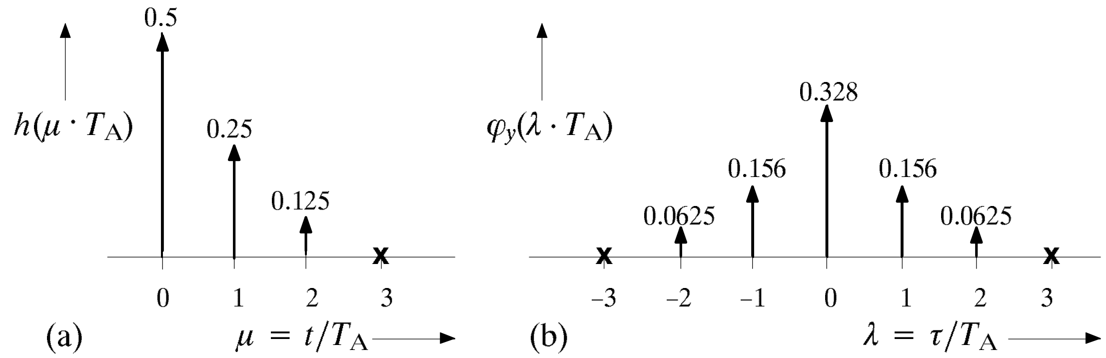


Bild 10.3: Impulsantwort eines nichtrekursiven Filters 2. Ordnung (a) und diskrete AKF am Filterausgang (b) bei statistisch unabhängigen Eingangsgrößen.

Die Streuungen σ_x und σ_y sind im allgemeinen unterschiedlich. Bei den hier zugrunde gelegten Zahlenwerten ergibt sich $\sigma_y = \sqrt{0.328} \cdot \sigma_x$. Durch die Normierungsbedingung

$$\sum_{\mu=0}^{M} a_\mu^2 = 1 \tag{10.14}$$

kann erreicht werden, daß die Streuungen der statistisch unabhängigen Eingangsfolge $\langle x_\nu \rangle$ und der statistisch abhängigen Ausgangsfolge $\langle y_\nu \rangle$ gleich sind. Im betrachteten Beispiel erhält man mit $a_0 = 0.873$, $a_1 = 0.436$ und $a_2 = 0.218$ eine formgleiche AKF wie in Bild 10.3(b), jedoch mit der Varianz $\varphi_y(0) = 1$.

Dieses Beispiel zeigt, daß zur Erzeugung einer statistisch abhängigen Zufallsgröße mittels nichtrekursivem Filter die Anzahl der Koeffizienten ebenso groß sein muß wie die Zahl der von 0 verschiedenen AKF–Werte $\varphi_y(\lambda \cdot T_A)$ mit $\lambda \geq 0$.

Bei einem rekursiven Filter, dessen Struktur in Bild 10.2 dargestellt ist, kann eine vergleichbare AKF mit sehr viel weniger Filterkoeffizienten generiert werden. Die analytische Berechnung der AKF des Ausgangssignals ist in diesem Fall allerdings erheblich aufwendiger. AKF und LDS des Ausgangssignals sind mit (10.1) und (10.2) berechenbar, wobei der Frequenzgang $H(f)$ und die Impulsantwort $h(t)$ aus (10.8) abgeleitet werden können. Zur Beschreibung der Vorgehensweise beschränken wir uns hier auf ein rekursives Filter erster Ordnung mit nur zwei Koeffizienten a_0 und b_1 (vgl. Bild 10.4).

Somit gilt für die Filterausgangswerte:

$$y_\nu = a_0 \cdot x_\nu + b_1 \cdot y_{\nu-1} = a_0 \cdot x_\nu + a_0 \cdot b_1 \cdot x_{\nu-1} + b_1^2 \cdot y_{\nu-2} =$$

$$= \ldots = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_0 \cdot b_1^\mu \cdot x_{\nu-\mu} \; . \tag{10.15}$$

Die AKF kann analog zu (10.12) ermittelt werden, wobei allerdings die endliche Summe durch eine unendliche Summe ersetzt werden muß:

$$\varphi_y(\lambda \cdot T_A) = \sigma_x^2 \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} (a_0 \cdot b_1^\mu) \cdot (a_0 \cdot b_1^{\mu+\lambda}) \qquad \text{für } \lambda = 0, 1, 2, \; \ldots \; . \tag{10.16}$$

Diese Gleichung läßt sich durch Einsetzen der Formel für den Summenwert einer unendlichen geometrischen Reihe vereinfachen. Für $0 < b_1 < 1$ erhält man:

$$\varphi_y(\lambda \cdot T_A) = \sigma_x^2 \cdot a_0^2 \cdot b_1^\lambda \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} b_1^{2\mu} = \sigma_x^2 \cdot a_0^2 \cdot \frac{b_1^\lambda}{1 - b_1^2} \; . \tag{10.17}$$

Bereits für ein rekursives Filter erster Ordnung reicht die AKF theoretisch von $-\infty$ bis $+\infty$, wobei die Abnahme der diskreten AKF–Werte exponentiell erfolgt.

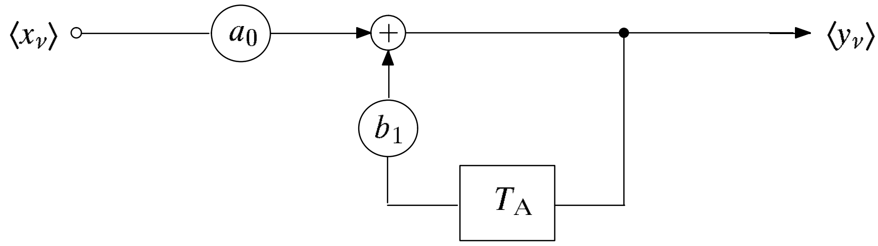


Bild 10.4: Rekursives Laufzeitfilter erster Ordnung.

10.3 Koeffizientenbestimmung für eine gewünschte AKF

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, daß zur Erzeugung einer zeitdiskreten, gaußverteilten Zufallsgröße mit statistischen Bindungen ein digitales Filter herangezogen werden kann. Nun soll die Frage geklärt werden, wie die Filterkoeffizienten zu wählen sind, wenn die Art der statistischen Bindungen durch die Autokorrelationsfunktion vorgegeben ist.

Zur Bestimmung des Koeffizienten a_μ eines nichtrekursiven Filters geht man von der diskreten AKF $\varphi_y(\lambda \cdot T_A)$ aus. Ist diese auf den Bereich $-M \cdot T_A$ ... $M \cdot T_A$ begrenzt (d.h. für $\lambda > M$ besitzt die AKF keine oder nur vernachlässigbar kleine Anteile), so ist mit M die Ordnung des Filters bestimmt, und es folgt aus (10.13) mit $m_x = 0$, $\sigma_x = 1$ für $\lambda \leq M$:

$$
\begin{aligned}
\varphi_y(0) &= \sum_{\mu=0}^{M} a_\mu^2 \, , \\
\varphi_y(T_A) &= \sum_{\mu=0}^{M-1} a_\mu \cdot a_{\mu+1} \, , \\
&\;\;\vdots \\
\varphi_y((M-1)T_A)) &= a_0 \cdot a_{M-1} + a_1 \cdot a_M \, , \\
\varphi_y(MT_A) &= a_0 \cdot a_M \, .
\end{aligned}
\qquad (10.18)
$$

Man erhält auf diese Weise für die $M+1$ Koeffizienten $M+1$ unabhängige Gleichungen. Durch sukzessives Eliminieren der Koeffizienten a_1 ... a_M bleibt für a_0 eine nichtlineare Gleichung höherer Ordnung übrig. Für diese gibt es mindestens vier reelle Lösungen, da

- alle Koeffizienten gleichzeitig ihr Vorzeichen ändern können, ohne daß das obige Gleichungssystem verändert wird, und
- alle Koeffizienten a_μ gleichzeitig durch $a_{M-\mu}$ ersetzt werden können, was lediglich einer Spiegelung und Verschiebung der Impulsantwort entspricht.

Das in V10.2 zu bearbeitende Beispiel soll die Schwierigkeiten verdeutlichen, die bei der Auflösung des Gleichungssystems (10.18) in der Praxis auftreten, besonders für große M. Zur Lösung dieses Problems gibt es eine Reihe numerischer Verfahren (vgl. z.B. [2]).

Bei einem rekursiven Filter erster Ordnung entsprechend Bild 10.4 ergibt sich stets eine exponentiell abfallende AKF, die durch die beiden Parameter *Korrelationsdauer* und *Varianz* beschreibbar ist (vgl. (10.17) und D10.4). Die beiden Filterkoeffizienten a_0 und b_1 lassen sich daraus in einfacher Weise ermitteln.

Dagegen ist es bei einem rekursiven Filter höherer Ordnung oft zweckmäßig, die Koeffizientenbestimmung im Spektalbereich durchzuführen. Dies bedeutet eine Variation des Frequenzgangs, so lange, bis $|H(f)|^2$ formgleich mit dem gewünschten LDS ist.

Für den Frequenzgang des digitalen Filters gemäß Bild 10.2 gilt dabei:

$$
H(f) = \frac{\sum_{\mu=0}^{M} a_\mu \cdot e^{-j2\pi\mu f T_A}}{1 - \sum_{\kappa=1}^{M} b_\kappa \cdot e^{-j2\pi\kappa f T_A}} \, . \qquad (10.19)
$$

10.4 Filtereinfluß auf nichtgaußverteilte Prozesse

Der grundlegende Zusammenhang zwischen der AKF am Eingang und Ausgang eines linearen Filters gilt unabhängig von der Amplitudenverteilung. Das gleiche gilt für die Leistungsdichtespektren. Das bedeutet, daß die fundamentalen Gleichungen (10.1) und (10.2) auch bei einem nichtgaußverteilten Zufallsprozeß angewandt werden können.

Die Schwierigkeit bei der Erzeugung einer nichtgaußverteilten Zufallsgröße mit statistischen Bindungen besteht nun darin, daß durch die – zur spektralen Formung erforderliche – Filterung des Eingangssignals $x(t)$ auch die Amplitudenverteilung prägnant beeinflußt wird. Während bei Gaußschen Zufallsgrößen das digitale Filter nur die beiden WDF–Parameter (Mittelwert, Streuung) verändert, ist bei jeder anderen Amplitudenverteilung auch der prinzipielle WDF–Verlauf am Ein– und Ausgang unterschiedlich.

Diese Eigenschaft soll am Beispiel eines nichtrekursiven Filters erster Ordnung verdeutlicht werden, dessen zeitdiskretes Ausgangssignal entsprechend (10.8) durch $y_\nu = a_0 \cdot x_\nu + a_1 \cdot x_{\nu-1}$ gegeben ist. Die Eingangswerte x_ν und $x_{\nu-1}$ werden als statistisch unabhängig vorausgesetzt. Somit berechnet sich die WDF $f_y(y)$ als das Faltungsprodukt zweier, entsprechend den Faktoren a_0 und a_1 gestauchter bzw. gedehnter Dichtefunktionen $f_x(x)$. Sind z.B. die Eingangswerte x_ν gleichverteilt, so ergibt sich für $f_y(y)$ ein dreieckförmiger (falls $a_1 = a_0$) bzw. trapezförmiger Verlauf (falls $a_1 \neq a_0$).

Bei einer sehr großen Anzahl M von Filterkoeffizienten wird nach dem zentralen Grenzwertsatz die Ausgangs–WDF nahezu gaußförmig. Im Grenzfall $M \to \infty$ ergibt sich unabhängig von der Eingangs–WDF $f_w(w)$ stets eine Gaußverteilung.

Zur Erzeugung einer nichtgaußverteilten Zufallsfolge $\langle y_\nu \rangle$ mit statistischen Bindungen kann ebenfalls ein nichtrekursives Filter herangezogen werden, dessen Koeffizienten a_μ allein aus den gewünschten AKF–Werten $\varphi_x(\lambda \cdot T_A)$ berechenbar sind. Im Unterschied zu Abschnitt 10.2 muß nun zusätzlich die WDF $f_x(x)$ der Eingangswerte ermittelt werden, die zusammen mit den $M+1$ Filterkoeffizienten die gewünschte Ausgangs–WDF ergibt.

In einem Aufsatz von D. Cygan, J. Franz und G. Söder (erschienen 1986 in der Zeitschrift AEÜ40, S. 377–384) sind zwei Methoden zur Lösung dieses im allgemeinen schwierigen Problems angegeben. Bei der ersten Methode wird der Zusammenhang

$$C_y(\omega) = \prod_{\mu=0}^{M} C_x(a_\mu \cdot \omega) \tag{10.20}$$

zwischen den charakteristischen Funktionen (Definition in Abschnitt 4.2) am Ein– und Ausgang eines nichtrekursiven Filters ausgenutzt, woraus $C_x(\omega) \circ\!\!-\!\!\bullet\, f_x(x)$ abhängig von $C_y(\omega) \circ\!\!-\!\!\bullet\, f_y(y)$ sowie den Filterkoeffizienten $a_0 \dots a_M$ numerisch ermittelt werden kann.

Die zweite Methode nutzt die Tatsache, daß jede WDF durch eine unendliche Summe gewichteter Hermite–Polynome approximiert werden kann. Die Gewichtungsfaktoren werden dabei von den Momenten m_k bestimmt. In obiger Arbeit wird der im allgemeinen komplizierte Zusammenhang zwischen den Momenten am Ein– und Ausgang analytisch angegeben. Dies ermöglicht die Berechnung der Eingangsmomente $m_k^{(x)}$ aus $m_k^{(y)}$ und den $M+1$ Filterkoeffizienten a_μ, wodurch $f_x(x)$ ebenfalls angebbar ist.

10.5 Vorbereitungsfragen

V10.1: Am Eingang eines Filters mit dem Frequenzgang $H(f)$ liegt ein gaußverteiltes mittelwertfreies Rauschsignal $x(t)$ mit folgender Autokorrelationsfunktion an:

$$\varphi_x(\tau) = \sigma_x^2 \cdot \mathrm{e}^{-\pi(\tau/T_x)^2} . \tag{10.21}$$

Das Tiefpaßfilter sei gaußförmig mit der Gleichsignalverstärkung H_0 und der systemtheoretischen Bandbreite Δf, so daß für den Frequenzgang geschrieben werden kann:

$$H(f) = H_0 \cdot \mathrm{e}^{-\pi(f/\Delta f)^2} . \tag{10.22}$$

a) Wie müssen der Effektivwert σ_x und die Korrelationsdauer T_x gewählt werden, damit obige AKF den in Bild 9.3 (links) dargestellten Prozeß beschreibt? Wie berechnet man diese Kenngrößen allgemein?

b) Wie lautet das LDS $\Phi_x(f)$ des Eingangssignals? Wie groß ist die Breite des flächengleichen Rechtecks über das LDS?

c) Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum $\Phi_y(f)$ am Filterausgang.

d) Wie lautet die AKF $\varphi_y(\tau)$ des Ausgangssignals?

e) Welche Korrelationsdauer T_y des Ausgangssignals $y(t)$ wurde für das Beispiel von Bild 9.3 zugrundegelegt? Wie groß ist damit die Filterbandbreite Δf ?

f) Wie groß ist der Effektivwert σ_y des Ausgangssignals allgemein? Welche Gleichsignalverstärkung H_0 liegt für das Beispiel von Bild 9.3 zugrunde? Berücksichtigen Sie hierbei, daß $\sigma_y = \sigma_x$ gilt.

g) Interpretieren Sie die Diagramme von Bild 9.3.

h) Welche Amplitudenverteilung hat das Ausgangssignal $y(t)$? Welche Werte ergeben sich für die Kurtosis K_x bzw. K_y am Eingang und Ausgang (vgl. Vorbereitung V4.4)?

V10.2: Mit Hilfe eines digitalen Filters soll eine zeitdiskrete, Gaußsche und statistisch abhängige Zufallsgröße y_ν erzeugt werden, für deren (normierte) AKF–Werte gilt:

$$\varphi_y(0) = 1.58;\ \varphi_y(\pm T_\mathrm{A}) = -0.49;\ \varphi_y(\pm 2 \cdot T_\mathrm{A}) = -0.30;\ \varphi_y(\lambda \cdot T_\mathrm{A}) = 0 \text{ für } |\lambda| \geq 3.$$

Die zeitdiskreten Eingangswerte x_ν seien normalverteilt ($m_x = 0$, $\sigma_x = 1$).

a) Welchen Filtertyp (rekursiv oder nichtrekursiv) würden Sie zur Erzeugung der statistischen Abhängigkeiten auswählen? Begründung.

b) Wie groß muß die Ordnung M des Laufzeitfilters mindestens sein? (Begründung)

c) Geben Sie das Gleichungssystem (10.18) für vorliegenden Fall an. Reduzieren Sie die drei unabhängigen Variablen a_0, a_1 und a_2 durch die beiden Größen $u = a_1{}^2$ und $w = (a_0 + a_2)^2$ und ermitteln Sie die reellen Lösungen für u und w.

d) Bestimmen Sie die Filterkoeffizienten a_0, a_1 und a_2. Geben Sie hierbei alle möglichen Lösungen an.

e) Geben Sie zu den Lösungen von d) die dazugehörigen Impulsantworten $h(t)$ an. Interpretation.

f) Durch welche einfache Modifikation können Sie eine Zufallsgröße mit nachfolgend angegebener AKF erzeugen? Geben Sie eine mögliche Generierungsvorschrift an.

$$\varphi_y(0) = 2.58;\ \varphi_y(\pm T_A) = 0.51;\ \varphi_y(\pm 2 \cdot T_A) = 0.70;\ \varphi_y(\lambda \cdot T_A) = 1.00 \text{ für } |\lambda| \geq 3.$$

g) Ist $x(t)$ gaußverteilt, so ist auch das Ausgangssignal $y(t)$ gaußverteilt. Bei jeder anderen Eingangs–WDF $f_x(x)$ wird durch das lineare Filter auch die Form der WDF beeinflußt. Beschreiben Sie verbal, wie man die WDF $f_y(y)$ der Ausgangsgröße y_ν gemäß Punkt f) ermitteln kann, wenn die Eingangsgröße zwischen –1 und + 1 gleichverteilt ist.

h) Geben Sie eine obere und eine untere Schranke für die Kurtosis der Ausgangsgröße y_ν an. Berücksichtigen Sie hierzu das Ergebnis der Vorbereitungsfrage V4.4.

10.6 Versuchsdurchführung

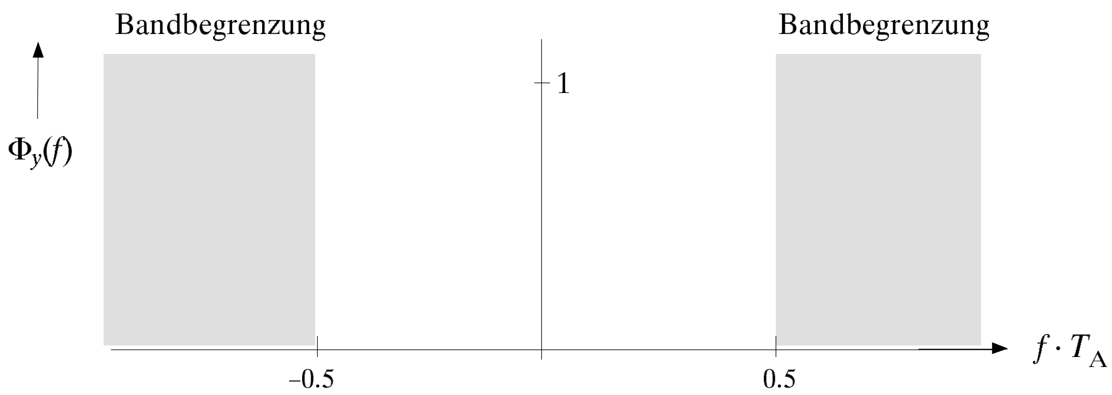
Benutzen Sie zur Lösung der nachfolgenden Aufgaben das Programm *"fil"*. Wählen Sie die Anzahl der Zufallszahlen zur Berechnung der AKF stets zu $N = 50\,000$.

D10.1: Betrachten Sie zunächst ein nichtrekursives Filter erster Ordnung (Menüpunkt 3, $M = 1$) mit den beiden Koeffizienten $a_0 = 0.7$ und $a_1 = 0.3$. Die Kenngrößen des Eingangssignals seien $m_x = 0$ und $\sigma_x = 1$.

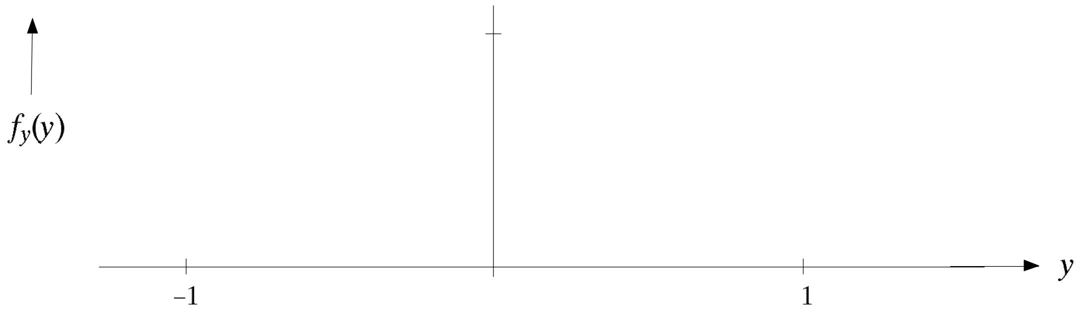
a) Berechnen Sie die diskreten AKF–Werte, den Mittelwert m_y und die Streuung σ_y. Überprüfen Sie anschließend Ihre Ergebnisse mit dem Programm *"fil"*.

	$\varphi_y(0)$	$\varphi_y(T_A)$	$\varphi_y(2T_A)$	m_y	σ_y
berechnet					
simuliert					

b) Welche Form besitzt das LDS $\Phi_y(f)$ am Filterausgang? Skizze. Überprüfen Sie anhand dieses Leistungsdichtespektrums auch die Gültigkeit von Gl. (9.21).



c) Ist $x(t)$ gaußverteilt, so ist auch das Ausgangssignal $y(t)$ gaußverteilt. Bei jeder anderen Eingangs–WDF $f_x(x)$ wird durch das lineare Filter auch die Form der WDF beeinflußt. Skizzieren Sie die WDF $f_y(y)$ der Ausgangsgröße, wenn die Eingangsgröße x zwischen -1 und $+1$ gleichverteilt ist.



d) Geben Sie drei weitere Koeffizientensätze an, mit denen genau gleiche statistische Eigenschaften (AKF, LDS) erzielt werden. Überprüfen Sie diese mit dem Programm.

1. $a_0 =$ $a_1 =$

2. $a_0 =$ $a_1 =$

3. $a_0 =$ $a_1 =$

e) Wie ändern sich die AKF–Werte, der Mittelwert m_y und die Streuung σ_y gegenüber Punkt a), wenn bei gleicher Streuung ($\sigma_x = 1$) nun $m_x = 0.5$ gewählt wird?

	$\varphi_y(0)$	$\varphi_y(T_A)$	$\varphi_y(2T_A)$	m_y	σ_y
$m_x = 0, \sigma_x = 1$					
$m_x = 0.5, \sigma_x = 1$					

Welche Auswirkung hat dieser Mittelwert auf das LDS?

f) Wie müssen die Koeffizienten gewählt werden, damit AKF und LDS qualitativ die gleiche Form besitzen wie bisher, zusätzlich jedoch die Bedingung $\sigma_y = \sigma_x$ erfüllt werden soll? Welcher grundsätzliche Zusammenhang besteht zwischen den Mittelwerten m_x und m_y? Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit $m_x = 0.5$ und $\sigma_x = 1$.

Hinweis: Es gilt stets $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \cdot \sum_{\mu=0}^{M} a_\mu^2$.

D10.2: Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse der Vorbereitungsfrage V10.2 mit dem Menüpunkt 3. Geben Sie hierzu den entsprechenden Filtertyp, die Ordnung M und einen der in V10.2(d) berechneten Koeffizientensätze ein und wählen Sie $m_x = 0$ und $\sigma_x = 1$.

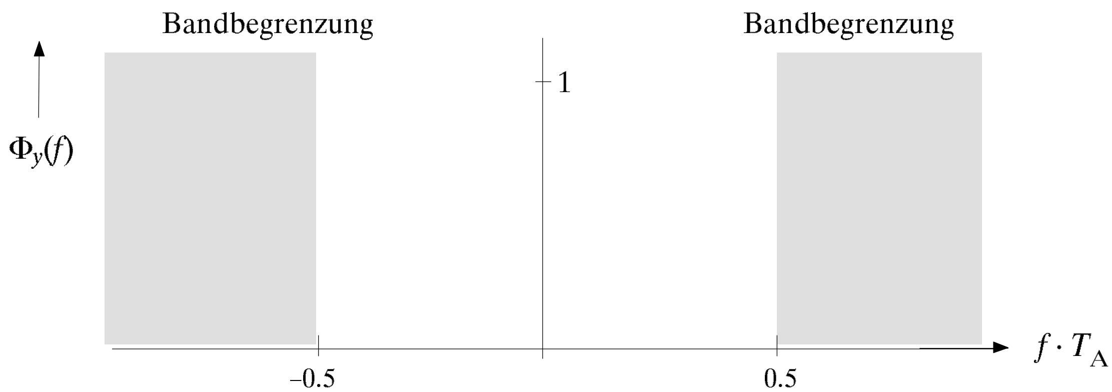
$M =$, $a_0 =$, $a_1 =$, $a_2 =$.

a) Überprüfen Sie die AKF–Werte, den Mittelwert m_y und die Streuung σ_y.

	$\varphi_y(0)$	$\varphi_y(T_A)$	$\varphi_y(2T_A)$	m_y	σ_y
berechnet (V10.2)					
simuliert (D10.2)					

b) Zeigen Sie, daß die drei weiteren in V10.2 berechneten Koeffizientensätze (im statistischen Sinne) gleiche Ergebnisse liefern. Sind die Signale $y(t)$ identisch, wenn Sie stets ein gleiches Eingangssignal $x(t)$ voraussetzen?

c) Welche Form besitzt das LDS $\Phi_y(f)$ am Filterausgang? Qualitative Skizze. Geben Sie $\Phi_y(f)$ unter Berücksichtigung von Gl. (9.21) auch formelmäßig an.



d) Wie entsteht dieses LDS $\Phi_y(f)$? am Filterausgang? Berechnen Sie zur Beantwortung dieser Frage die Leistungsübertragungsfunktion $|H(f)|^2$ des Filters. Verwenden Sie zur Abkürzung $\beta = 2\pi \cdot f \cdot T_\mathrm{A}$. Welcher Wert ergibt sich für $f = 0$?

e) Wie ändern sich die statistischen Kenngrößen des Ausgangssignals, wenn am Eingang ein mittelwertbehaftetes Signal ($m_x = 0.5$, $\sigma_x = 1$) angelegt wird? Interpretieren Sie das Ergebnis.

	$\varphi_y(0)$	$\varphi_y(T_\mathrm{A})$	$\varphi_y(2T_\mathrm{A})$	m_y	σ_y
$m_x = 0, \sigma_x = 1$					
$m_x = 0.5, \sigma_x = 1$					

D10.3: Mit dem Menüpunkt 2 können nichtrekursive Laufzeitfilter mit dreieck–, exponential–, gauß– bzw. rechteckförmiger Impulsantwort simuliert werden.

a) Überlegen Sie sich, durch welche der hier angegebenen (diskreten) Impulsantworten $h(\mu \cdot T_\mathrm{A})$ das Leistungsdichtespektrum am Filterausgang

1. si^2–förmig,
2. si^4–förmig,
3. proportional zu $1/(f^2 + f_0^2)$ bzw.
4. gaußförmig

wird, jeweils unter der Voraussetzung, daß die Eingangswerte x_ν statistisch voneinander unabhängig sind und die weiteren Parameter $m_x = 0$ und $\sigma_x = 1$ betragen.

LDS	si^2–förmig	si^4–förmig	prop. $\frac{1}{f^2+f_0^2}$	gaußförmig
AKF				
Impulsantwort				

Begründen Sie Ihre Ergebnisse und überprüfen Sie diese mit dem Programm *"fil"* für ein nichtrekursives Filter (Menüpunkt 2, $M = 5$).

b) Wählen Sie nun stets eine rechteckförmige Impulsantwort. Bei welcher (normierten) Frequenz tritt – bei verschiedenen Werten von M – die erste Nullstelle im LDS auf?

1) $M = 1$: erste Nullstelle bei $f \cdot T_\mathrm{A} =$

2) $M = 3$: erste Nullstelle bei $f \cdot T_\mathrm{A} =$

3) $M = 9$: erste Nullstelle bei $f \cdot T_\mathrm{A} =$

c) Begründen Sie anhand der Ergebnisse aus b), daß für große Werte von M folgende allgemeine Beziehung gilt:

$$\Phi_y(f) = \sigma_x^2 \cdot (M + 1) \cdot T_\mathrm{A} \cdot \mathrm{si}^2\big(\pi \cdot f \cdot (M + 1) \cdot T_\mathrm{A}\big) \ . \qquad (10.23)$$

D10.4: Mit dem Menüpunkt 4 wird im Programm *"fil"* ein rekursives Filter erster Ordnung (vgl. Bild 10.4) mit den Koeffizienten a_0 und b_1 ausgewählt. Mit $m_x = 0$ und $\sigma_x = 1$ ergibt sich somit gemäß (10.17) für die AKF des Ausgangssignals (wobei $b_1 \neq 1$ vorausgesetzt ist):

$$\varphi_y(\lambda \cdot T_\mathrm{A}) = \frac{a_0^2 \cdot b_1^\lambda}{1 - b_1^2} \ . \tag{10.24}$$

a) Wie müssen die Koeffizienten a_0 und b_1 gesetzt werden, damit sich der folgende AKF–Verlauf (mit den wählbaren Parametern σ_y und τ_0) ergibt:

$$\varphi_y(\lambda \cdot T_\mathrm{A}) = \sigma_y^2 \cdot \mathrm{e}^{-|\lambda \cdot T_\mathrm{A}|/\tau_0} \ ? \tag{10.25}$$

b) Welche AKF–Werte erhält man mit $a_0 = 0.8$ und $b_1 = 0.6$?

	$\varphi_y(0)$	$\varphi_y(T_\mathrm{A})$	$\varphi_y(2T_\mathrm{A})$	$\varphi_y(3T_\mathrm{A})$	$\varphi_y(4T_\mathrm{A})$
theoretisch nach Gl. (10.24)					
per Simulation (Menüpunkt 4)					

Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus a) die Varianz σ_y^2 und die Korrelationsdauer τ_0.

c) Wie müssen die Koeffizienten a_μ eines nichtrekursiven Filters 8. Ordnung gewählt werden, damit sich (etwa) die gleichen statistischen Eigenschaften ergeben wie für das rekursive Filter erster Ordnung gemäß Punkt b)? *Hinweis*: Gleiche Impulsantworten!

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8

Überprüfen Sie mit dem Programm *"fil"* (Menüpunkt 3, $M = 8$), ob sich mit diesen Koeffizienten des nichtrekursiven Filters tatsächlich auch die gleichen AKF–Werte wie unter Punkt b) ergeben.

10.7 Übungsaufgaben

Ü10.1: In vorangegangenen Übungen wurde bereits die Erzeugung von statistisch unabhängigen, diskreten und kontinuierlichen Zufallsgrößen (vgl. Kapitel 1 bzw. 4) sowie von diskreten Zufallsgrößen mit statistischen Bindungen (Kapitel 3) behandelt. Nun sollen kontinuierliche Zufallsgrößen mit statistischen Bindungen erzeugt werden.

a) Schreiben Sie die Funktion *"filabh(nue, M, mx, sigmax, a)"*, die statistisch abhängige Zufallsgrößen mittels eines nichtrekursiven Laufzeitfilters M–ter Ordnung erzeugt. Die $M+1$ Filterkoeffizienten a_μ werden mit dem Float–Feld *"a"* übergeben. Für die zur Berechnung von y_ν benötigten aktuellen Abtastwerte x_0 bis x_M der Eingangsgröße müssen Sie ein zusätzliches, internes Feld *"static double x*[41]" vereinbaren. Hierbei ist berücksichtigt, daß der Maximalwert von M für das Hauptprogramm 40 beträgt.

   Beim ersten Funktionsaufruf ("nue = 1") der Funktion müssen die Feldelemente von *"x"* mit statistisch unabhängigen gaußverteilten Zufallsgrößen vorbelegt werden, wofür die Funktion *"double gauss(mx, sigmax)"* benutzt werden kann. Zu allen weiteren Zeitpunkten ("nue > 1") wird nur das aktuelle Feldelement *"x(0)"* neu belegt, während alle weiteren Feldelemente um eine Laufzeit verschoben werden müssen. Beachten Sie hierbei die Reihenfolge der Verschiebung.

```
C: double filabh(nue,M,mx,sigmax,a)
     long nue,M;
     double mx,sigmax;
     float a[ ];
```

```
F77: function filahh(nue,M,mx,sigmax,a)
       integer nue,M
       real mx,sigmax,a(0:40)
```

b) Testen Sie Ihre Funktion *"filabh"* mit dem Programm *"fil"* (Menüpunkt 5) für eine rechteckförmige ($M = 10, m_x = 0, \sigma_x = 1$) sowie für eine gaußförmige Impulsantwort ($M = 10, m_x = 1, \sigma_x = 1$) durch Vergleich mit den theoretischen Werten. Zum Über–setzen und Binden kann die Prozedur *"mkfil"* bzw. *"mkfil –f"* benutzt werden.

Ü10.2: Schreiben Sie eine Funktion *"filrek(nue, mx, sigmax, $a0$, $b1$)"*, mit der abhängige Zufallsgrößen y_ν nach dem Prinzip eines rekursiven Laufzeitfilters erster Ordnung erzeugt werden. Das rekursive Filter ist durch die beiden Koeffizienten a_0 und b_1 vollständig beschrieben. Ansonsten gelten die gleichen Vorraussetzungen wie für die Übungsaufgabe Ü10.1. Die erforderlichen Dateiheader lauten:

```
C:  double filrek(nue,mx,sigmax,a0,b1)
      long nue;
      double mx,sigmax,a0,b1;

F77:real filrek(nue,mx,sigmax,a0,b1)
      integer nue
      real mx,sigmax,a0,b1
```

Testen Sie die Funktion *"filrek"* (Menüpunkt 6) mit den Koeffizienten $a_0 = 0.8$ und $b_1 = 0.6$ durch Vergleich mit den theoretischen Werten.

11 Optimale Filter

Inhalt: In diesem Kapitel werden mit dem Matched–Filter (Korrelationsfilter) und dem Wiener–Kolmogoroff–Filter zwei Systemfunktionen vorgestellt, die jeweils für spezifische Anwendungen optimal sind. Das Matched–Filter dient zum Nachweis der Signalexistenz, d.h. es kann mit größtmöglicher Sicherheit entscheiden, ob ein durch additives Rauschen gestörtes impulsförmiges Nutzsignal vorhanden ist oder nicht. Dagegen besitzt das sog. Wiener–Kolmogoroff–Filter den bestmöglichen Frequenzgang, um die Signalform eines Analogsignals bei Vorhandensein von Rauschstörungen zu rekonstruieren.

11.1 Matched-Filter (Korrelationsfilter)

In jedem Nachrichtensystem treten additive Störungen $n(t)$ auf, die die Übertragung und Verarbeitung des informationstragenden Nutzsignals beeinträchtigen. Da es sich hierbei meist um nichtdeterministische Störsignale (z.B. weißes Rauschen) handelt, wird sich die Störung nicht vollständig eliminieren lassen. Es besteht jedoch die Möglichkeit, das verrauschte Signal durch ein Optimalfilter so zu formen, daß sich der störende Einfluß des Rauschens bei der Rückgewinnung der Information nur minimal bemerkbar macht. Der Frequenzgang des optimalen Filters hängt dabei sowohl von der spezifischen Anwendung als auch von den Eigenschaften des Nutz– und Störsignals ab.

Als erstes Beispiel für ein solches Optimalfilter betrachten wir die Anordnung von Bild 11.1 mit dem sogenannten *Matched–Filter*. Der Nutzanteil $g(t)$ des Eingangssignals $r(t)$ sei impulsförmig und dementsprechend energiebegrenzt, d.h. das Integral über $g(t)^2$ von $-\infty$ bis $+\infty$ liefert einen endlichen Wert; dieser sei E_g.

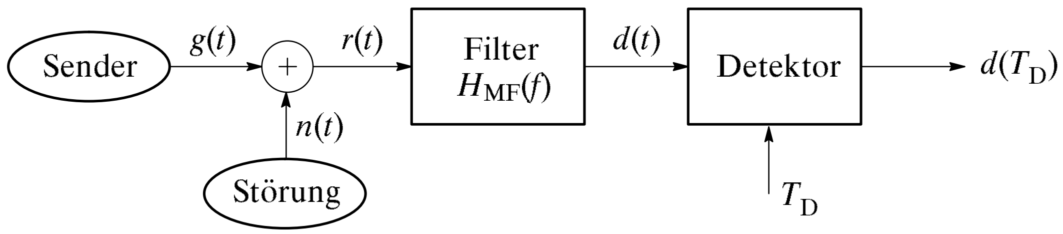


Bild 11.1: Zur Herleitung des Matched–Filters.

Dem Empfänger – bestehend aus linearem Filter mit dem Frequenzgang $H(f)$ und Amplitudendetektor – ist die Form des Nutzimpulses $g(t)$ bekannt, nicht jedoch der Sendezeitpunkt t_S. Die Aufgabe besteht nun darin, den Filterfrequenzgang $H(f) = H_{MF}(f)$ so zu bestimmen, daß der Impuls $g(t)$ trotz der unvermeidbaren Rauschstörungen $n(t)$ vom nachgeschalteten Detektor möglichst sicher erkannt werden kann. Der Index "MF" (von Matched–Filter) soll hierbei deutlich machen, daß die Übertragungsfunktion an die Eigenschaften von Nutzsignal $g(t)$ und Störung $n(t)$ angepaßt ist.

Für das Folgende ist stets der Sendezeitpunkt $t_S = 0$ vorausgesetzt, was keine grundsätzliche Einschränkung für die hier beschriebene Filteroptimierung darstellt. T_D bezieht sich somit immer auf den Zeitnullpunkt.

Das Detektionssignal $d(t)$ am Ausgang des linearen Filters ergibt sich für das durch stationäres Rauschen gestörte Eingangssignal $r(t)=g(t)+n(t)$ zu

$$d(t) = r(t) * h(t) = \underbrace{g(t) * h(t)}_{d_S(t)} + \underbrace{n(t) * h(t)}_{d_N(t)} . \tag{11.1}$$

Das oben mit "möglichst sicher erkannt" sehr vage formulierte Optimierungskriterium wird in der Literatur meist wie folgt angegeben (*Detektions–Signalstörleistungsverhältnis*):

$$\varrho_d(T_D) = \frac{d_S^2(T_D)}{\sigma_d^2} \stackrel{!}{=} \text{Maximum} . \tag{11.2}$$

Hierbei ist $d_S(T_D)$ das Nutzsignal am Detektoreingang zu einem vorgebbaren Detektionszeitpunkt T_D und $\sigma_d^2 = \mathrm{E}[d_N^2(t)]$ die Varianz (Leistung) des gefilterten Rauschsignals. Bei weißem Eingangsrauschen $n(t)$ mit der frequenzunabhängigen Rauschleistungsdichte N_0 (einseitig betrachtet) beträgt die Varianz des Störanteils vor dem Detektor allgemein:

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 \, \mathrm{d}f . \tag{11.3}$$

Für die momentane Nutzleistung zum Betrachtungszeitpunkt gilt mit $G(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, g(t)$:

$$d_S^2(T_D) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) \cdot H(f) \cdot e^{j2\pi f T_D} \, \mathrm{d}f \right|^2 . \tag{11.4}$$

Durch Anwendung der *Schwarzschen Ungleichung* (siehe z.B. [4])

$$\left| \int_a^b A(x) \cdot B(x) \, \mathrm{d}x \right|^2 \le \int_a^b |A(x)|^2 \, \mathrm{d}x \cdot \int_a^b |B(x)|^2 \, \mathrm{d}x \tag{11.5}$$

kann gezeigt werden, daß für jeden möglichen Filterfrequenzgang $H(f)$ das momentane Detektions–Signalstörleistungsverhältnis folgendermaßen begrenzt ist:

$$\varrho_d(T_D) \le \frac{1}{N_0/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 \, \mathrm{d}f . \tag{11.6}$$

Berechnet man $\varrho_d(T_D)$ aus (11.2) unter Verwendung von (11.3) und (11.4), und setzt dabei für den Filterfrequenzgang

$$H_{MF}(f) = K \cdot G^*(f) \cdot e^{-j2\pi f T_D} , \tag{11.7}$$

so gilt in (11.6) das Gleichheitszeichen. Damit ist implizit gezeigt, daß das durch (11.7) definierte Matched–Filter für das gestellte Problem optimal ist.

Der Frequenzgang des Matched–Filters läßt sich folgendermaßen interpretieren:

- $H_{MF}(f)$ ist durch den Term $G^*(f)$ an das Spektrum des gesuchten Impulses angepaßt.
- Die Konstante K mit der Einheit Hz/V ist aus Dimensionsgründen notwendig.
- Der Detektionszeitpunkt T_D ergibt sich aus der Kausalitätsbedingung $h_{MF}(t<0) = 0$.

Es ist anzumerken, daß (11.7) nur bei weißem Rauschen optimal ist (vgl. Abschnitt 11.2).

Die Fourierrücktransformation von (11.7) führt zur Impulsantwort

$$h_{\mathrm{MF}}(t) = K \cdot g(T_{\mathrm{D}} - t) \ , \tag{11.8}$$

woraus mit (11.1) der Nutzanteil am Filterausgang berechnet werden kann:

$$d_{\mathrm{S}}(t) = g(t) * \big(K \cdot g(T_{\mathrm{D}} - t)\big) = K \cdot \varphi_g^{\mathrm{E}}(t - T_{\mathrm{D}}) \ . \tag{11.9}$$

Hierbei ist $\varphi_g^{\mathrm{E}}(t) = g(t) * g(-t)$ die Energie–AKF des Eingangsimpulses. Gegenüber der Definition gemäß (9.6), die nur für zeitlich unbegrenzte Signale gilt, wird hier auf die Division durch die Meßdauer T_{M} und den Grenzübergang $T_{\mathrm{M}} \to \infty$ verzichtet.

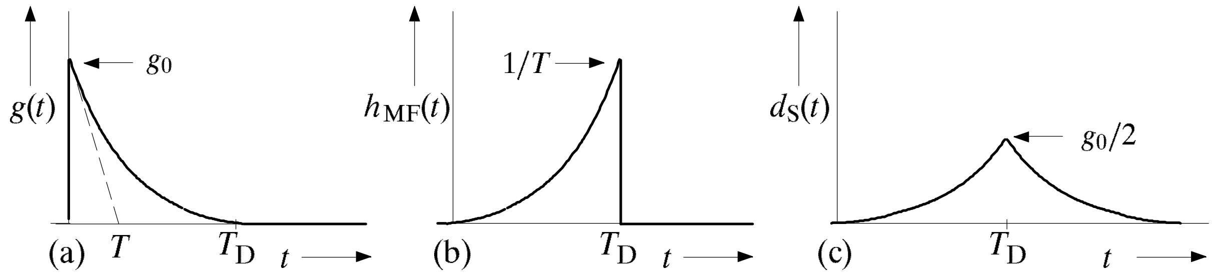


Bild 11.2: Exponentiell abfallender Eingangsimpuls (a) sowie Impulsantwort (b) und Ausgangssignal (c) des Matched–Filters ($K = 1/(g_0 \cdot T)$, $T_{\mathrm{D}} = 3 \cdot T$).

Bild 11.2 verdeutlicht den Zusammenhang zwischen den Nutzsignalen am Ein– und Ausgang des Matched–Filters sowie der Impulsantwort $h_{\mathrm{MF}}(t)$. Zum Zeitpunkt $t = T_{\mathrm{D}}$ ist das Nutzsignal maximal und bis auf die dimensionsbehaftete Verstärkung K identisch mit der Energie E_g des Eingangsimpulses (in Klammern: gültig für den Exponentialimpuls):

$$d_{\mathrm{S}}(T_{\mathrm{D}}) = \varphi_g^{\mathrm{E}}(0) \cdot K = E_g \cdot K \quad \big(= 0.5 \cdot g_0^2 \cdot T/(g_0 \cdot T) = g_0/2\big) \ . \tag{11.10}$$

Man erkennt, daß das Matched–Filter das gleiche Nutzsignal wie ein an den Impuls $g(t)$ angepaßter Korrelator liefert. Deshalb wird dieses Filter auch als *Korrelationsfilter* bezeichnet. Liegt am Empfängereingang weißes Rauschen der Rauschleistungsdichte N_0 an, so gilt mit (11.3) und (11.7) für die Störleistung am Ausgang des Matched–Filters:

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot K^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 \, \mathrm{d}f = \frac{N_0}{2} \cdot K^2 \cdot E_g \ . \tag{11.11}$$

Daraus folgt für das *maximale Signalstörleistungsverhältnis* am Detektor:

$$\varrho_{d,\max}(T_{\mathrm{D}}) = \frac{2 \cdot (K \cdot E_g)^2}{N_0 \cdot K^2 \cdot E_g} = \frac{2 \cdot E_g}{N_0} \quad \left(= \frac{g_0^2 \cdot T}{N_0}\right) \ . \tag{11.12}$$

Dieser Wert ist unabhängig von der Konstanten K und vom Detektionszeitpunkt T_{D}, natürlich nur unter der Voraussetzung, daß für die Dimensionierung des Matched–Filters und des Detektors der gleiche Wert von T_{D} zugrunde gelegt wurde.

Mit keinem anderen Filter läßt sich ein größeres S/N–Verhältnis erzielen als mit dem Matched–Filter. Zwar gibt es Filter, die zu einem größeren Nutzanteil $d_{\mathrm{S}}(T_{\mathrm{D}})$ führen und solche mit kleineren Störungen im Ausgangssignal. Mit keinem Filter ist jedoch zum vorgegebenen Zeitpunkt T_{D} ein besseres Verhältnis von momentaner Nutzleistung zu (gemittelter) Störleistung möglich. Dies soll das folgende Beispiel verdeutlichen.

Beispiel: Am Eingang eines Filters (Gaußtiefpaß) mit dem Frequenzgang

$$H_{\mathrm{GTP}}(f) = \mathrm{e}^{-\pi\cdot(\Delta t_{\mathrm{GTP}}\cdot f)^2}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f T_{\mathrm{D}}} \quad \text{(Bandbreite } \Delta f_{\mathrm{GTP}} = 1/\Delta t_{\mathrm{GTP}}\text{)} \tag{11.13}$$

liegt ein von weißem Rauschen der (einseitigen) Rauschleistungsdichte N_0 überlagerter Gaußimpuls der Amplitude g_0 und der äquivalenten Dauer $\Delta t_g = T$ an:

$$g(t) = g_0 \cdot \mathrm{e}^{-\pi\cdot(t/T)^2}\,. \tag{11.14}$$

Das Nutzsignal $d_{\mathrm{S}}(t)$ am Ausgang (vgl. (11.1) und Bild 11.1) ist ebenfalls gaußförmig, wobei die äquivalente Impulsdauer, definiert als flächengleiches Rechteck über $d_{\mathrm{S}}(t)$,

$$\Delta t_d = \sqrt{T^2 + \Delta t_{\mathrm{GTP}}^2} \tag{11.15}$$

beträgt. Der Maximalwert des Ausgangsimpulses tritt zum Zeitpunkt T_{D} auf, wobei gilt:

$$d_{\mathrm{S}}(T_{\mathrm{D}}) = g_0 \cdot \frac{T}{\sqrt{T^2 + \Delta t_{\mathrm{GTP}}^2}}\,. \tag{11.16}$$

Je breitbandiger das Filter (d.h. je größer die äquivalente Bandbreite $1/\Delta t_{\mathrm{GTP}}$) ist, um so größer ist die Nutzsignalamplitude zum Detektionszeitpunkt T_{D}. Gleichzeitig wächst mit der Filterbandbreite $1/\Delta t_{\mathrm{GTP}}$ jedoch auch die Varianz des Störanteils im Filterausgangssignal an, die folgenden Wert ergibt:

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} |H_{\mathrm{GTP}}(f)|^2 \,\mathrm{d}f = \frac{N_0}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\Delta t_{\mathrm{GTP}}}\,. \tag{11.17}$$

Bildet man entsprechend (11.2) das momentane Detektions–Signalstörleistungsverhältnis, so erhält man mit der Energie $E_g = g_0^2\cdot T/\sqrt{2}$ des Gaußschen Eingangsimpulses $g(t)$:

$$\varrho_d(T_{\mathrm{D}}) = \frac{2\cdot E_g}{N_0}\cdot\frac{2\cdot\Delta t_{\mathrm{GTP}}/T}{1 + (\Delta t_{\mathrm{GTP}}/T)^2}\,. \tag{11.18}$$

Dieses Verhältnis ist in Bild 11.3 – geeignet normiert – in Abhängigkeit des Quotienten $\Delta t_{\mathrm{GTP}}/T$ dargestellt. Es ist zu erkennen, daß $\varrho_d(T_{\mathrm{D}})$ für $\Delta t_{\mathrm{GTP}}/T = 1$ maximal ist. Für $\Delta t_{\mathrm{GTP}} < T$ steigt die Störleistung stark an (vgl. (11.17)), für zu große Werte von Δt_{GTP} ergibt sich entsprechend (11.16) gegenüber dem Optimum ein zu kleiner Nutzabtastwert.

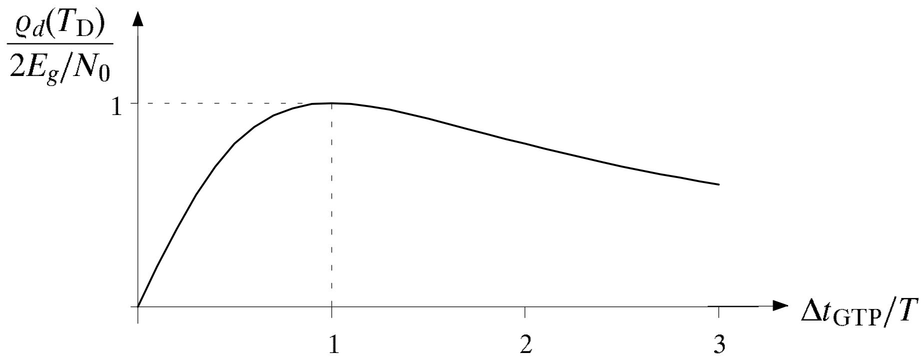


Bild 11.3: Normiertes Detektions–Signalstörleistungsverhältnis am Ausgang eines Gaußtiefpasses in Abhängigkeit des Quotienten $\Delta t_{\mathrm{GTP}}/T$.

Ein Vergleich der Gleichungen (11.13) und (11.14) mit (11.7) macht deutlich, daß das betrachtete Filter für $\Delta t_{\mathrm{GTP}} = T$ genau dem an den Eingangsimpuls $g(t)$ angepaßten Matched–Filter entspricht:

$$H_{\mathrm{MF}}(f) = \mathrm{e}^{-\pi\cdot(f\cdot T)^2}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f T_{\mathrm{D}}}\ , \tag{11.19}$$

$$h_{\mathrm{MF}}(t) = \frac{1}{T}\cdot \mathrm{e}^{-\pi(t-T_{\mathrm{D}})^2/T^2}\ . \tag{11.20}$$

Für den Sonderfall $\Delta t_{\mathrm{GTP}} = T$ – und nur für diesen – stimmen somit die Ergebnisse von (11.10) und (11.16), (11.11) und (11.17) sowie (11.12) und (11.18) überein. Die Verminderung von $\varrho_d(T_{\mathrm{D}})$ bei Nichtanpassung ($\Delta t_{\mathrm{GTP}} \neq T$) kann Bild 11.3 entnommen werden.

Wie aus (11.19) hervorgeht, bewertet das angepaßte Filter diejenigen Spektralanteile besonders gut, die im Nutzsignal vorwiegend enthalten sind. Dagegen werden solche Frequenzen, die hauptsächlich mit Störungen belegt sind, stark unterdrückt.

In Bild 11.4 sind das Ein– und Ausgangssignal des Matched–Filters für dieses Beispiel dargestellt. Durch die Festlegung $K = 1/(g_0\cdot T)$ ist die Amplitude des Ausgangsimpulses zum Detektionszeitpunkt T_{D} um den Faktor $\sqrt{2}$ kleiner als die des Eingangsimpulses. Es ist aber auch deutlich zu erkennen, daß die Störungen im Ausgangssignal im Gegensatz zum weißen Eingangsrauschen niederfrequent sind, und daß die Störleistung durch das Matched–Filter merklich vermindert wird.

Da der Gaußimpuls bis ins Unendliche reicht, ist eine kausale Impulsantwort (d.h. $h_{\mathrm{MF}}(t) = 0$ für $t < 0$) theoretisch nur für den Grenzfall $T_{\mathrm{D}}\rightarrow\infty$ möglich. Wählt man jedoch – wie für Bild 11.4(b) vorausgesetzt – den Detektionszeitpunkt T_{D} hinreichend groß, so erscheint die Impulsantwort innerhalb der Zeichengenauigkeit als kausal.

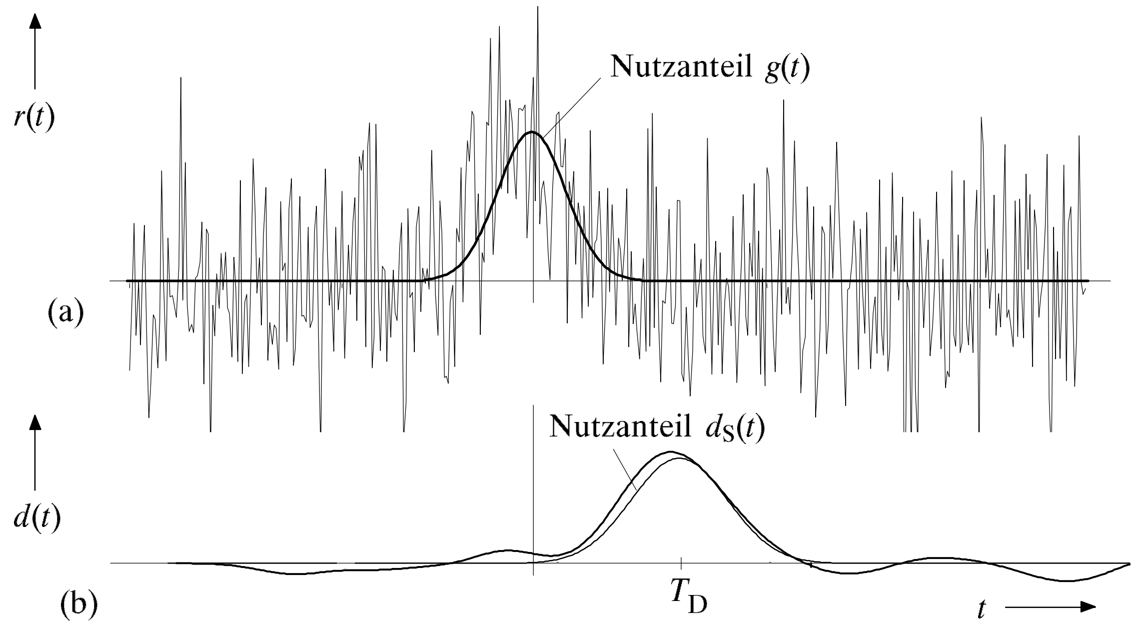


Bild 11.4: Eingangssignal (a) und Ausgangssignal (b) des Matched–Filters gemäß (11.19) bei einem gaußförmigen Impuls und weißem Rauschen.

11.2 Matched-Filter bei farbigen Störungen

Bei der Herleitung des Matched–Filters für beliebige Störungen berücksichtigt man, daß jedes farbige Rauschsignal $n(t)$ – zumindest gedanklich – aus einer weißen Rauschquelle mit der Rauschleistungsdichte N_0 und einem Formfilter $H_N(f)$ hervorgeht, so daß für sein Leistungsdichtespektrum auch geschrieben werden kann (vgl. Bild 11.5(a)):

$$\Phi_n(f) = \frac{N_0}{2} \cdot |H_N(f)|^2 \ . \tag{11.21}$$

Hinsichtlich der Störungen am Ausgang des Matched–Filters ändert sich nichts, wenn das Formfilter $H_N(f)$ auf die rechte Seite der Additionsstelle verlagert wird. Um ein auch bezüglich des Nutzsignals äquivalentes Modell zu erhalten, muß dieses Formfilter im Nutzsignalzweig jedoch durch das inverse Filter $H_N(f)^{-1}$ kompensiert werden. Besitzt $H_N(f)$ keine Nullstelle, sind die beiden Anordnungen von Bild 11.5(a) und (b) identisch.

Das maximale S/N–Verhältnis ergibt sich nach Abschnitt 11.1, wenn das Produkt $H_N(f) \cdot H_{MF}(f)$ an den Impuls $g_w(t)$ angepaßt ist. Da in Bild 11.5(b) ebenso wie in Bild 11.1 an der Additionsstelle weißes Rauschen $n_w(t)$ anliegt, kann man somit wieder (11.7) anwenden, und man erhält für den Gesamtfrequenzgang nach der Additionsstelle:

$$H_N(f) \cdot H_{MF}(f) = K \cdot \frac{G^*(f)}{H_N^*(f)} \cdot e^{-j2\pi f T_D} \ . \tag{11.22}$$

Daraus folgt für das Matched–Filter bei farbigen Störungen allgemein:

$$H_{MF}(f) = K \cdot \frac{G^*(f)}{|H_N(f)|^2} \cdot e^{-j2\pi f T_D} \ . \tag{11.23}$$

Das maximale Detektions–Signalstörleistungsverhältnis vor dem Detektor ist somit

$$\varrho_{d,\max}(T_D) = \frac{1}{N_0/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |G_w(f)|^2 \, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|G(f)|^2}{\Phi_n(f)} \, df \ . \tag{11.24}$$

Der Sonderfall $\Phi_n(f) = N_0/2$ führt auch hier wieder zum Ergebnis (11.12).

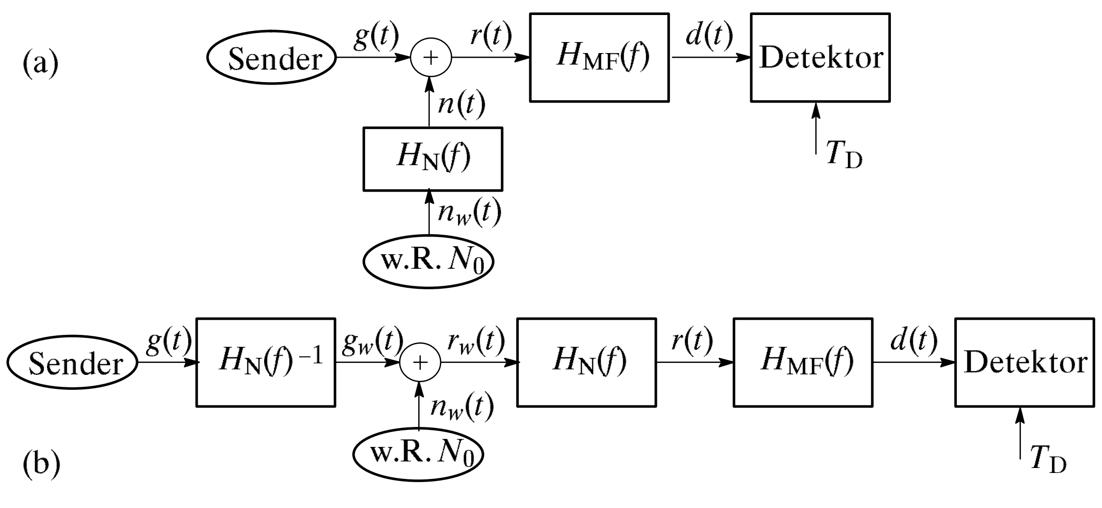


Bild 11.5: Zur Herleitung des Matched–Filters bei farbigen Störungen unter Verwendung eines Formfilters unterhalb (a) bzw. rechts (b) von der Rauschaddition.

11.3 Wiener-Kolmogoroff-Filter

Als weiteres Beispiel zur Optimalfilterung betrachten wir nun die Aufgabenstellung, die Form eines – in den meisten Fällen analogen und leistungsbegrenzten – Nutzsignals $s(t)$ aus dem durch additives Rauschen gestörten Empfangssignal $r(t)$ "möglichst gut" zu rekonstruieren. Bild 11.6 zeigt die entsprechende Anordnung.

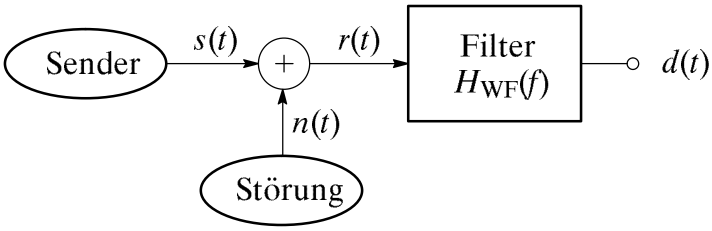


Bild 11.6: Prinzipschaltbild zur Herleitung des Wiener–Kolmogoroff–Filters.

Im Gegensatz zum Modell von Bild 11.1 sei hier das Nutzsignal $s(t)$ nicht determiniert, sondern das Ergebnis eines Zufallsprozesses, von dem nur die statistischen Eigenschaften in Form seines Leistungsdichtespektrums $\Phi_s(f)$ bekannt sind. Weiterhin wird hier vorausgesetzt, daß $s(t)$ mittelwertfrei und kausal (d.h. $s(t) = 0$ für $t < 0$) sei. Das bedeutet:

$$\lim_{T_M \to \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_0^{T_M} s(t) \, dt = 0 \, , \tag{11.25}$$

$$\lim_{T_M \to \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_0^{T_M} s(t)^2 \, dt > 0 \quad \text{(d.h.: die Energie ist unendlich groß).} \tag{11.26}$$

Das Ausgangssignal $d(t)$ des gesuchten Filters $H_{WF}(f)$ soll sich vom Nutzsignal $s(t)$ im Sinne des mittleren quadratischen Fehlers (MQF) möglichst wenig unterscheiden. Somit lautet hier die Optimierungsbedingung (T_M bezeichnet wiederum die Meßdauer):

$$\overline{\varepsilon_t^2} = \lim_{T_M \to \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_0^{T_M} |d(t) - s(t)|^2 \, dt \overset{!}{=} \text{Minimum} \, . \tag{11.27}$$

Kolmogoroff und Wiener haben dieses Optimierungsproblem nahezu zur gleichen Zeit unabhängig voneinander gelöst. Die Übertragungsfunktion des optimalen Filters kann über die *Wiener–Hopfsche Integralgleichung* ermittelt werden. Begnügt man sich mit der nichtkausalen Lösung, so erhält man:

$$H_{WF}(f) = \frac{\Phi_s(f) + \Phi_{ns}(f)}{\Phi_s(f) + \Phi_{sn}(f) + \Phi_{ns}(f) + \Phi_n(f)} \, . \tag{11.28}$$

Der Index "*WF*" steht für Wiener–Filter und läßt leider die Verdienste von Kolmogoroff bei der Filteroptimierung nicht erkennen. Auf die exakte, mathematische Ableitung der Gleichung wird hier verzichtet, vielmehr soll im folgenden das Ergebnis (11.28) nur kommentiert und an Beispielen verdeutlicht werden.

In (11.28) geben $\Phi_s(f)$ und $\Phi_n(f)$ die Leistungsdichtespektren von Nutz– und Störsignal bzw. der jeweils zugrundeliegenden Zufallsprozesse an. Dagegen bezeichnen $\Phi_{sn}(f)$ und $\Phi_{ns}(f)$ die Kreuzleistungsdichtespektren zwischen diesen (vgl. Abschnitte 9.4 und 10.1).

Sind Nutz– und Störsignal unkorreliert, was bei vielen Anwendungen zutrifft, so gilt für die Kreuzleistungsdichtespektren $\Phi_{sn}(f) = \Phi_{ns}(f) = 0$, und (11.28) vereinfacht sich zu

$$H_{\mathrm{WF}}(f) = \frac{\Phi_s(f)}{\Phi_s(f) + \Phi_n(f)} = \frac{1}{1 + \Phi_n(f)/\Phi_s(f)} \ . \tag{11.29}$$

Das Wiener–Kolmogoroff–Filter wirkt somit wie ein frequenzabhängiger Teiler, wobei das Teilerverhältnis durch die Leistungsdichtespektren von Nutzsignal und Störung bestimmt wird. Der "Durchlaßbereich" liegt vorwiegend bei den Frequenzen, bei denen das Nutzsignal sehr viel größere Anteile besitzt als die Störung ($\Phi_s(f) \gg \Phi_n(f)$).

Für den durch (11.27) definierten mittleren quadratischen Fehler zwischen dem Ausgangssignal $d(t)$ und dem zu approximierenden Eingangssignal $s(t)$ erhält man unter der Voraussetzung, daß $s(t)$ und $n(t)$ unkorreliert sind, mit $H_{\mathrm{WF}}(f)$ entsprechend (11.29):

$$\overline{\varepsilon_t^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_s(f) \cdot \Phi_n(f)}{\Phi_s(f) + \Phi_n(f)} \, \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{\mathrm{WF}}(f) \cdot \Phi_n(f) \, \mathrm{d}f \ . \tag{11.30}$$

Die Ableitung dieses Ergebnisses ist durchaus nicht trivial und z.B. in [6] zu finden.

Zur Verdeutlichung der Filtervorschrift (11.29) betrachten wir zunächst als Grenzfall einen periodischen Prozeß. Das heißt, das Leistungsdichtespektrum $\Phi_s(f)$ des Nutzsignals sei eine Summe diskreter Frequenzanteile (Diracfunktionen). Bei weißem Rauschen ($\Phi_n(f) = N_0/2$) ergibt sich somit für das Wiener–Kolmogoroff–Filter ein Frequenzgang, der nur bei den Nutzsignalfrequenzen durchlässig ist. Bei allen anderen Frequenzen, die voraussetzungsgemäß nur Störanteile beinhalten können, ist sinnvollerweise $H_{\mathrm{WF}}(f) = 0$.

Das nachfolgende Beispiel soll den Frequenzgang $H_{\mathrm{WF}}(f)$ des Wiener–Kolmogoroff–Filters bei kontinuierlichem Leistungsdichtespektrum $\Phi_s(f)$ veranschaulichen.

Beispiel: Das Signal $s(t)$ sei ein redundanzfreies binäres bipolares Rechtecksignal. Nach den Angaben zur Vorbereitungsfrage V9.3 lautet somit sein Leistungsdichtespektrum mit der Energie $E_g = g_0^2 \cdot T$ eines einzelnen Rechteckimpulses (vgl. Bild 11.7(a)):

$$\Phi_s(f) = E_g \cdot \mathrm{si}^2(\pi f T) \ . \tag{11.31}$$

Dieses Rechtecksignal werde von weißem Rauschen $n(t)$ mit der Rauschleistungsdichte $\Phi_n(f) = N_0/2$ überlagert. Setzt man (11.31) in (11.29) ein, so erhält man für den Frequenzgang des Wiener–Kolmogoroff–Filters:

$$H_{\mathrm{WF}}(f) = \frac{1}{1 + \frac{N_0/2}{E_g \cdot \mathrm{si}^2(\pi f T)}} \ . \tag{11.32}$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß der Frequenzverlauf $H_{\mathrm{WF}}(f)$ des optimalen Filters auch vom Quotienten E_g/N_0 abhängt. Im Grenzfall $E_g/N_0 \to \infty$, d.h. bei vernachlässigbar kleinen Störungen, ergibt sich sinnvollerweise $H_{\mathrm{WF}}(f) = 1$.

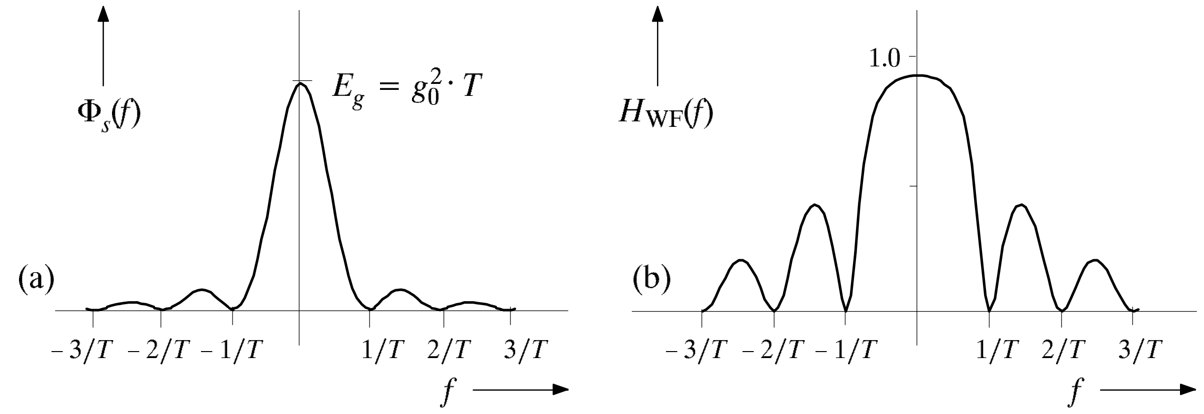


Bild 11.7: Leistungsdichtespektrum $\Phi_s(f)$ eines stochastischen Binärsignals (a) und Frequenzgang des dazugehörigen Wiener–Kolmogoroff–Filters (b).

Bild 11.7(b) zeigt $H_{\mathrm{WF}}(f)$ für den Fall, daß die Energie E_g eines Rechteckimpulses um den Faktor 5 größer ist als die Rauschleistungsdichte N_0. Bei Vielfachen der Symbolfolgefrequenz $1/T$, bei denen das stochastische Rechtecksignal *s(t)* keine Spektralanteile besitzt, ist der Frequenzgang $H_{\mathrm{WF}}(f)$ ebenfalls Null. Je mehr Nutzsignalanteile bei einer bestimmten Frequenz vorhanden sind, desto durchlässiger ist bei dieser Frequenz auch das Wiener–Kolmogoroff–Filter.

Bild 11.8 zeigt die Signale am Ein– und Ausgang dieses Filters. Man erkennt, daß das Wiener–Kolmogoroff–Filter das gesuchte Nutzsignal *s(t)* trotz der vorhandenen Rauschstörungen relativ gut rekonstruieren kann. Im Signal *d(t)* fehlen vorwiegend die höherfrequenten Signalanteile (Kanten), die zugunsten einer besseren Störunterdrückung bei diesen Frequenzen ausgefiltert werden. Der mittlere quadratische Fehler gemäß (11.27) bzw. (11.30) ergibt sich in diesem Beispiel zu $\overline{\varepsilon_t^2} = 0.11$ (normiert).

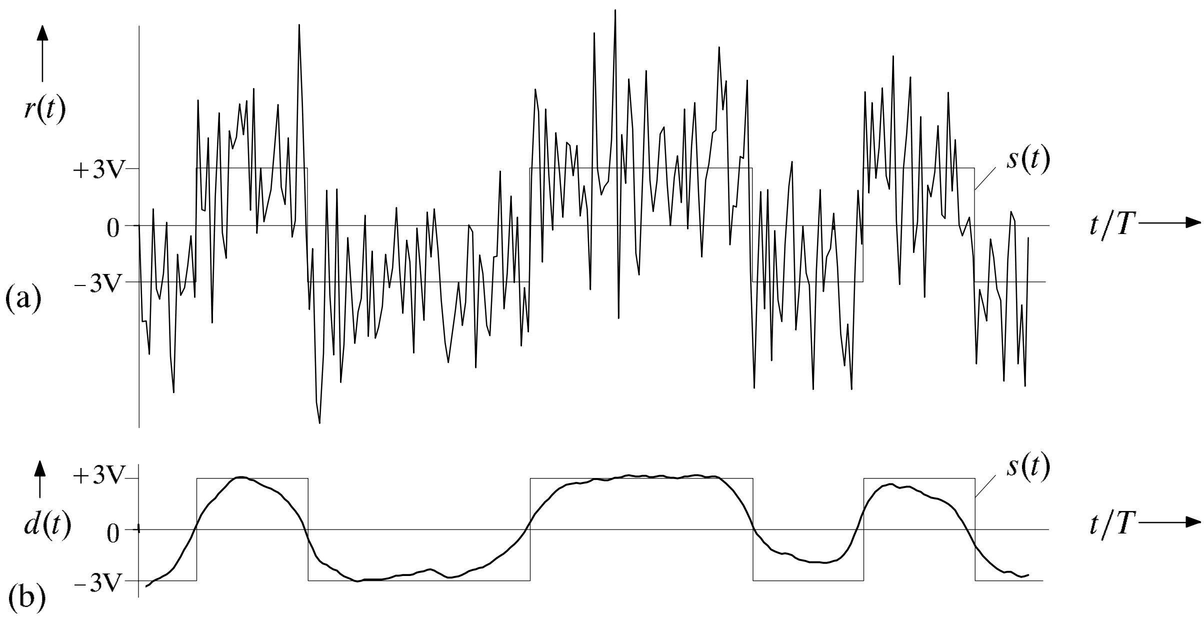


Bild 11.8: Signale am Eingang (a) und am Ausgang (b) des Wiener–Kolmogoroff–Filters mit dem Frequenzgang entsprechend Bild 11.7(b).

11.4 Vorbereitungsfragen

V11.1: Wir betrachten das System entsprechend Bild 11.1 mit einem rechteckförmigen, um $t = 0$ symmetrischen Eingangsimpuls $g(t)$ der Amplitude g_0 und der Dauer T. Die Störung sei weißes Rauschen mit der (einseitigen) Rauschleistungsdichte N_0.

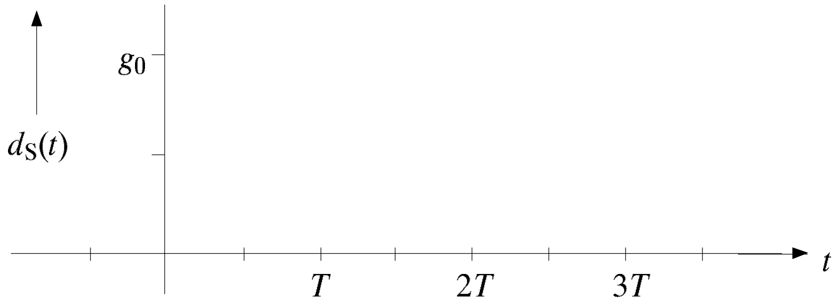
a) Geben Sie den Frequenzgang und die Impulsantwort des akausalen Matched–Filters für den Detektionszeitpunkt $T_\mathrm{D} = 0$ an. Wählen Sie die Konstante K derart, daß bei der Frequenz $f = 0$ gilt: $H_\mathrm{MF}(0) = 1$.

b) Welches Detektions–Signalstörleistungsverhältnis läßt sich mit dieser Konfiguration erzielen? Welchen Verlauf hat hier das Nutzsignal $d_\mathrm{S}(t)$ und wie groß ist die Varianz σ_d^2 des Rauschanteils im Ausgangssignal?

c) Welche Änderungen ergeben sich gegenüber Punkt a) unter der Voraussetzung, daß das Matched–Filter kausal sein soll? Wie groß ist der kleinstmögliche Wert von T_D?

d) Geben Sie eine Realisierungsmöglichkeit des kausalen Matched–Filters für die vorgegebene Konfiguration an.

e) Der Eingangsimpuls sei weiter symmetrisch rechteckförmig: $g(t) = g_0$ für $|t| \leq T/2$. Das Filter sei nun durch folgende Impulsantwort gegeben: $h(t) = 1/(2T)$ für $0 \leq t \leq 2T$. Skizzieren Sie den Ausgangsimpuls für diese Konfiguration. Welche Bedingung muß hier der optimale Detektionszeitpunkt T_D erfüllen?



f) Wie groß ist die Leistung (Varianz) σ_d^2 des Rauschanteils $d_N(t)$ am Filterausgang und das resultierende Detektions–Signalstörleistungsverhältnis?

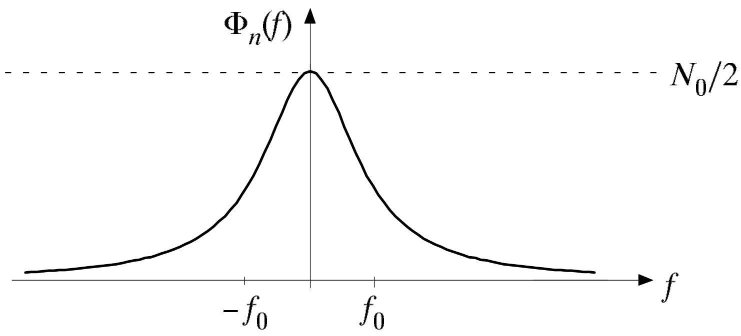
g) Zeichnen Sie in die Skizze zu Punkt e) bei ansonsten gleichen Voraussetzungen auch den Ausgangsimpuls für ein zu schmalbandiges Filter ein: $h(t) = 2/T$ für $0 \leq t \leq T/2$. Welche Bedingung muß nun der optimale Detektionszeitpunkt T_D erfüllen?

h) Berechnen Sie für diese Konfiguration das Detektions–Signalstörleistungsverhältnis?

V11.2: Nun soll der Einfluß von farbigen Störungen untersucht werden. Dazu betrachten wir beispielhaft das folgende Störleistungsdichtespektrum:

$$\Phi_n(f) = \frac{N_0/2}{1 + (f/f_0)^2} \; . \tag{11.33}$$

Dieser Funktionsverlauf ist in nachfolgender Skizze dargestellt. Bei der Frequenz f_0 ist $\Phi_n(f)$ gegenüber dem Wert bei $f = 0$ nur halb so groß.



Der Nutzimpuls sei gaußförmig und habe die äquivalente Dauer T: $g(t) = g_0 \cdot \mathrm{e}^{-\pi \cdot (t/T)^2}$.

a) Geben Sie das Detektions–Signalstörleistungsverhältnis $\varrho_{d,\mathrm{WR}}$ gemäß Gl. (11.18) an, wenn $n(t)$ weißes Rauschen mit der (zweiseitigen) Rauschleistungsdichte $N_0/2$ wäre.

b) Zeigen Sie, daß die Störung gemäß (11.33) mit einem Formfilterfrequenzgang

$$H_\mathrm{N}(f) = \frac{1}{1 + \mathrm{j} \cdot f/f_0} \tag{11.34}$$

modelliert werden kann. Geben Sie eine Realisierungsmöglichkeit dieses Filters an.

c) Welchen Verlauf hat der Frequenzgang $H_\mathrm{MF}(f)$ des an den Gaußimpuls und die farbige Störung angepaßten Matched–Filters ($T_\mathrm{D} = 0$)? Interpretieren Sie diese Funktion.

d) Geben Sie das Detektions–Signalstörleistungsverhältnis ϱ_d allgemein an.

e) Berechnen Sie ϱ_d unter Verwendung der in a) berechneten Größe $\varrho_{d,\mathrm{WR}}$.
Hinweis: Es gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x = 1 \ . \tag{11.35}$$

Dieses Integral ergibt sich z.B. aus der Tatsache, daß der quadratische Mittelwert einer gaußverteilten Zufallsgröße mit Mittelwert 0 und Streuung 1 ebenfalls 1 ist.

f) Wie groß muß die Kenngröße f_0 sein, damit das Detektions–Signalstörleistungsverhältnis ϱ_d bei der vorliegenden Störung doppelt so groß ist als bei weißem Rauschen? Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

g) Die Gleichungen von Kapitel 11.2 führen nur dann zu einem sinnvollen, physikalisch interpretierbaren Ergebnis, wenn das Nutzspektrum $G(f)$ asymptotisch schneller als das Störleistungsdichtespektrum $\Phi_n(f)$ abklingt. Zeigen Sie diesen Sachverhalt anhand des vorgegebenen $\Phi_n(f)$ und eines Rechteckimpulses, d.h. $G(f) = g_0 \cdot T \cdot \mathrm{si}(\pi f T)$.

V11.3: Das Leistungsdichtespektrum eines stochastischen Signals $s(t)$ lautet:

$$\Phi_s(f) = \frac{\Phi_0}{1 + (f/f_0)^2} \; . \tag{11.36}$$

Dieses hat somit den gleichen Verlauf wie das Stör–LDS $\Phi_n(f)$ von V11.2 (siehe Skizze).

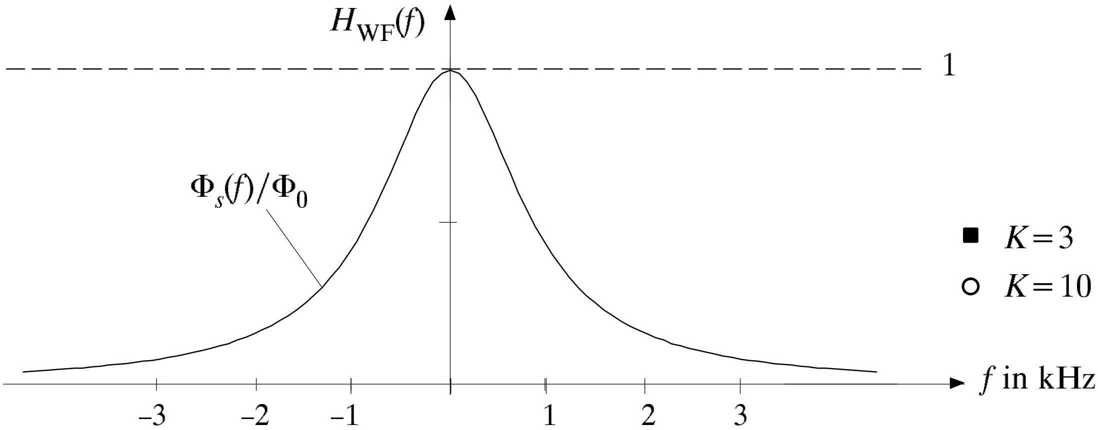
Dem Nutzsignal $s(t)$ ist Rauschen $n(t)$ mit der Rauschleistungsdichte $\Phi_n(f) = N_0/2$ überlagert. Verwenden Sie bei den nachfolgenden Aufgaben zur Abkürzung $K = 2\Phi_0/N_0$.

a) Berechnen Sie die Leistung P_S des Nutzsignals in Abhängigkeit von Φ_0 und f_0.

b) Bestimmen Sie den Frequenzgang $H_{WF}(f)$ des dazugehörigen Wiener–Filters. Welche Eigenschaft weist dieses auf?

c) Skizzieren Sie $H_{WF}(f)$ für $f_0 = 1$ kHz und $K = 3$ bzw. 10 in nachfolgendes Diagramm. Zum Vergleich ist bereits das normierte LDS des Nutzsignals eingetragen. Begründen Sie, warum mit zunehmendem K das Wiener–Filter immer breitbandiger wird.

	$f = 0$	$f = f_0$	$f = 2f_0$	$f = 3f_0$
$H_{WF}(f)$ für $K=3$				
$H_{WF}(f)$ für $K=10$				



d) Berechnen Sie den mittleren quadratischen Fehler in Abhängigkeit der Nutzleisung P_S (berechnet unter a) und des Faktors $K = 2\Phi_0/N_0$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

e) Welcher Wert ergibt sich für den MQF $\overline{\varepsilon_t^2}$ mit $K = 3$? Wie groß muß K gewählt werden, damit der mittlere quadratische Fehler nur 10% der Nutzleistung ausmacht?

11.5 Versuchsdurchführung

Benutzen Sie zur Lösung der nachfolgenden Aufgaben das Programm *"ofi"*. In diesem Programm sind alle Signalwerte dimensionslos zu verstehen; die Zeit ist jeweils auf T normiert. Die MF–Konstante ist mit $K = 1/T$ berücksichtigt.

D11.1: Zunächst soll das Matched–Filter bei rechteckförmigem Eingangsimpuls (Dauer T, Amplitude g_0) untersucht werden. Die Störung $n(t)$ am Filtereingang ist aufgrund der zeitdiskreten Signaldarstellung im Programm *"ofi"* eigentlich bandbegrenzt ($B_n = 100/T$). Entsprechend den Ausführungen in Kapitel 9 ist dies eine Näherung für echt weißes Rauschen mit der Rauschleistungsdichte $N_0 = \sigma_n^2/B_n$.

a) Ermitteln Sie das Detektions–Signalstörleistungsverhältnis $\varrho_{d,\max}$ am Ausgang des Matched–Filters und vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem theoretischen Wert (vgl. V11.1). Wählen Sie hierzu stets die Eingabeparameter $g_0 = 1$ und $\Delta t_g = T$. Die normierte Rauschleistungsdichte habe die Werte $N_0/T = 10^{-4} \ldots 10^{-1}$.

Wie groß sind in diesen Fällen die Rauscheffektivwerte σ_n und σ_d des Eingangs– und des Ausgangssignals sowie der Störabstand? Welcher Zusammenhang besteht zwischen σ_n und σ_d? Versuchen Sie auch jeweils, den Nutzimpuls $g(t)$ im verrauschten Eingangssignal $r(t)$ zu erkennen.

	$10 \cdot \lg\, \varrho_{d,\max}$ (berechnet)	$10 \cdot \lg\, \varrho_{d,\max}$ (simuliert)	σ_d	σ_n
$N_0/T = 10^{-4}$				
$N_0/T = 10^{-3}$				
$N_0/T = 10^{-2}$				
$N_0/T = 10^{-1}$				

b) Wie groß dürfen die normierte Leistungsdichte N_0/T und der Effektivwert σ_n des Eingangsrauschens maximal sein, damit der Detektions–Störabstand $10 \cdot \lg\, \varrho_{d,\max}$ mindestens 20 dB beträgt? Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit dem Programm *"ofi"*.

c) Betrachten Sie nun bei konstanter Rauschleistungsdichte $N_0/T = 0.02$ unterschiedliche Eingangsimpulse und ermitteln Sie jeweils den Nutzabtastwert $d_{\rm S}(T_{\rm D,opt})$, den Effektivwert σ_d des Rauschanteils im Ausgangssignal $d(t)$ sowie den resultierenden Detektions–Störabstand $10 \cdot \lg \varrho_{d,\max}$. Wählen Sie dabei einen

- Rechteckimpuls mit der Dauer $\Delta t_g = T$ wie unter Punkt b),
- Gaußimpuls mit der (äquivalenten) Dauer $\Delta t_g = 0.4 \cdot T$,
- Exponentialimpuls mit der (äquivalenten) Dauer $\Delta t_g = 0.25 \cdot T$ gemäß Bild 11.2.

Die Impulsamplitude sei jeweils $g_0 = 1$ und das Filter optimal an den Eingangsimpuls $g(t)$ angepaßt. Versuchen Sie auch hier, den Nutzimpuls $g(t)$ im verrauschten Eingangssignal $r(t)$ zu erkennen.

	$d_{\rm S}(T_{\rm D})$	σ_d	$10 \cdot \lg\ \varrho_{d,\max}$
Rechteckimpuls			
Gaußimpuls			
Exponentialimp.			

d) Interpretieren Sie die unterschiedlichen Werte für den Nutzabtastwert $d_{\rm S}(T_{\rm D,opt})$.

e) Interpretieren Sie die unterschiedlichen Werte für den Störeffektivwert σ_d.

f) Interpretieren Sie abschließend die unterschiedlichen Werte für den Detektions–Störabstand $10 \cdot \lg \varrho_{d,\max}$.

D11.2: Im folgenden gelte $N_0/T = 0.01$. Der Eingangsimpuls sei exponentiell abfallend (Menüpunkt 3): $g(t) = g_0 \cdot \exp(-t/\Delta t_g)$. Hierbei gibt Δt_g gleichzeitig die äquivalente Impulsdauer als auch die Zeitkonstante des Flankenabfalls an. Wählen Sie zunächst entsprechend der Voreinstellung: $\Delta t_g = 0.25 \cdot T$.

a) Bestimmen Sie die Impulsamplitude derart, daß der Störabstand am Ausgang des Matched–Filters 20 dB beträgt (d.h. $\varrho_{d,\max} = 100$).

b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit dem Programm *"ofi"* und tragen Sie das Ergebnis in die erste Zeile der nachfolgenden Tabelle ein.

Matched–Filter für	$d_{\rm S}(T_{\rm D})$	σ_d	$10 \cdot \lg\, \varrho_{d,\max}$
Exponentialimp.			
Rechteckimpuls			
Gaußimpuls			

c) Der Eingangsimpuls sei weiterhin exponentiell abfallend mit $\Delta t_g = 0.25 \cdot T$. Wählen Sie nun die beiden anderen vorgegebenen Matched–Filter, die an einen
- Rechteckimpuls (Dauer $\Delta t_g = T$)
- Gaußimpuls (Dauer $\Delta t_g = 0.4 \cdot T$)

angepaßt sind. Tragen Sie Ihre Ergebnisse in obige Tabelle ein. Interpretation.

d) Wählen Sie wieder das an einen Exponentialimpuls mit $\Delta t_g/T = 0.25$ angepaßte Filter (Menüpunkt 3). Wie ändert sich das Ergebnis, wenn der Eingangsimpuls zwar auch exponentiell abfällt, aber die Zeitkonstante kleiner ist als die des Filters: $\Delta t_g/T = 0.1$. Tragen Sie Ihre Ergebnisse in die erste Zeile der nachfolgenden Tabelle ein und interpretieren Sie diese.

exponentiell fallender Impuls	$d_S(T_D)$	σ_d	$10 \cdot \lg\ \varrho_{d,\max}$
$\Delta t_g/T = 0.10$			
$\Delta t_g/T = 0.25$			
$\Delta t_g/T = 0.40$			

e) Wiederholen Sie den Versuch d) mit der Zeitkonstanten $\Delta t_g/T = 0.4$. Tragen Sie Ihre Ergebnisse in die letzte Zeile obiger Tabelle ein. Ist es ein Widerspruch gegenüber der Theorie, daß der langsamer abfallende Impuls ($\Delta t_g/T = 0.4$) zu einem etwas größeren Signalrauschabstand führt als der schneller abfallende ($\Delta t_g/T = 0.25$), obwohl das Matched–Filter auf letzteren angepaßt ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

D11.3: Betrachten Sie nun ein zufälliges binäres Rechtecksignal $s(t)$ mit der Amplitude 1 und der Bitdauer $T = 1$ ms, das von weißem Rauschen $n(t)$ mit dem Störeffektivwert σ_n überlagert ist (alle Werte sind normiert zu verstehen). Es gilt hier: $N_0/T = \sigma_n^2/32$.

Als Empfangsfilter wird ein Wiener–Filter mit dem Frequenzgang $H_{\rm WF}(f)$ verwendet, das an das Empfangssignal $r(t) = s(t) + n(t)$ im Sinne des mittleren quadratischen Fehlers (MQF) entsprechend (11.27) bestmöglich angepaßt ist.

a) Zunächst sei $\sigma_n = 1$. Interpretieren Sie die dargestellten Zeit– und Frequenzverläufe. Wie groß sind $H_{\rm WF}(0)$ und der mittlere quadratische Fehler (MQF)?

Matched–Filter für Binärsignal	$H_{\rm WF}(0)$	$\overline{\varepsilon_t^2}$	Bemerkungen
$\sigma_n = 1$			
$\sigma_n = 0.5$			
$\sigma_n = 2$			

b) Welche Änderungen ergeben sich gegenüber a) mit $\sigma_n = 0.5$ bzw. $\sigma_n = 2$? Tragen Sie Ihre Simulationsergebnisse in die Tabelle zu a) ein und interpretieren Sie diese.

c) Nun soll gezeigt werden, daß das Wiener–Filter tatsächlich zum minimalen mittleren quadratischen Fehler führt. Betrachten Sie dazu weiterhin das zufällige Binärsignal und $\sigma_n = 1$. Verwenden Sie als Vergleichsfilter ein Filter erster Ordnung, das durch drei Parameter beschrieben wird, nämlich durch

- die äquivalente Bandbreite Δf,
- die Mittenfrequenz f_{M} sowie
- den Maximalwert $H(f_{\mathrm{M}}) = H_0$.

Versuchen Sie, durch optimale Wahl dieser Kenngrößen den mittleren quadratischen Fehler möglichst klein zu machen. Gehen Sie dabei von den Voreinstellungen aus.

Wiener–Filter: $\overline{\varepsilon_t^2} =$ ....

Filter 1. Ordnung: $\overline{\varepsilon_t^2} =$ ....

Δf = ... f_{M} = ... H_0 = ...

d) Führen Sie nun einen zweiten Vergleich mit einem Gaußfilter durch ($\sigma_n = 1$). Dieses wird durch die gleichen drei Parameter beschrieben wie das Filter erster Ordnung. Versuchen Sie wiederum, durch optimale Wahl dieser Kenngrößen den mittleren quadratischen Fehler möglichst klein zu machen.

Wiener–Filter: $\overline{\varepsilon_t^2} =$ ....

Gaußfilter: $\overline{\varepsilon_t^2} =$ ....

Δf = ... f_{M} = ... H_0 = ...

D11.4: Im letzten Versuch zu diesem Kapitel wird das Wiener–Filter für bandpaßartige Signale behandelt. Betrachten Sie zunächst ein Cosinussignal der Frequenz $f_0 = 1$ kHz.

a) Überlegen Sie sich anhand von (11.29), welche (theoretische) Form hier das Wiener–Filter hat? Welcher Wert ergibt sich damit für den MQF unabhängig von σ_n?

b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis anhand des Programms? Wie groß ist MQF für $\sigma_n = 0.5$ bzw. $\sigma_n = 2$? Worauf könnte der Unterschied zur Theorie zurückzuführen sein?

$\sigma_n = 0.5$: $H_{\rm WF}(f_0)$ = ……………….. $\overline{\varepsilon_t^2}$ = ……………….

$\sigma_n = 2$: $H_{\rm WF}(f_0)$ = ……………….. $\overline{\varepsilon_t^2}$ = ……………….

c) Wählen Sie nun das "Analogsignal", für dessen Leistungsdichtespektrum gilt:

$$\Phi_s(f) = \Phi_0 \cdot \left(\exp(-\pi \frac{(f-f_{\rm M})^2}{\Delta f_s^{\,2}}) + \exp(-\pi \frac{(f+f_{\rm M})^2}{\Delta f_s^{\,2}})\right) . \tag{11.37}$$

Setzen Sie die beiden Parameter des Nutzsignals auf $f_{\rm M} = 3$ kHz und $\Delta f_s = 1$kHz. Die (normierte) Streuung des weißen Rauschens sei $\sigma_n = 0.5$. Wie groß ist der MQF?

$\overline{\varepsilon_t^2}$ = ……………….

d) Verwendet man anstelle des Wiener–Filters einen anderen symmetrischen Bandpaß (z.B. das Cosinus–Rolloff–Filter), so muß sich für MQF ein größerer Wert ergeben. Versuchen Sie, mit diesem Vergleichsfilter den mittleren quadratischen Fehler möglichst klein zu machen (r bezeichnet den Rolloff–Faktor).

<u>Vergleichsfilter:</u> Cosinus–Rolloff–Filter $\overline{\varepsilon_t^2}$ = ……………….

Δf = ……….. $f_{\rm M}$ = ……….. H_0 = ……….. r = ………..

11.6 Übungsaufgabe

Ü11.1: In der Übungsaufgabe zu diesem Kapitel wird auf eine typische Aufgabenstellung bei der Simulation des Matched–Filters eingegangen. Nach (11.1) kann das Filterausgangssignals $d(t)$ mittels der Faltungsoperation aus $r(t)$ und $h(t)$ berechnet werden. Das Eingangssignal sei unverrauscht, so daß $r(t) = g(t)$ gilt. Dann erhält man:

$$d(t) = g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) \cdot h(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau \ . \tag{11.38}$$

Im folgenden werden nun die Signale $g(t)$, $h(t)$ und $d(t)$ zeitdiskret durch ihre Abtastwerte g_ν, h_ν und d_ν beschrieben. Die Werte g_ν und h_ν seien dabei jeweils Null für $\nu < 0$ und $\nu > N$. Die Stützwerte des Ausgangsimpulses erstrecken sich somit auf den Bereich von 0 ... $2N$, wobei entsprechend der *diskreten Faltung* gilt:

$$d_\nu = \sum_{i=ianf}^{iend} g_i \cdot h_{\nu-i} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} ianf = 0, iend = \nu & \text{für} \quad 0 \le \nu \le N \ , \\ ianf = \nu - N, iend = N & \text{für} \quad N < \nu \le 2N \ . \end{array} \tag{11.39}$$

Schreiben Sie ein Unterprogramm *"ofifal(g, h, d)"*, das für einen durch das Feld "*g*[ ]" festgelegten Eingangsimpuls die Impulsantwort "*h*[ ]" des Matched–Filters sowie den Ausgangsimpuls "*d*[ ]" berechnet. Die Felder "*g*[ ]" und "*h*[ ]" gehen von 0 bis $N = 100$, das Feld"*d*[ ]" von 0 bis $2 \cdot N$. Die Berechnung der Impulsantwort kann z.B. nach (11.8) erfolgen, wobei der Zeitdauer T_D gleich 100 Abtastwerte entsprechen. Die Abtastwerte des Ausgangsimpulses erhält man mit (11.39).

C:
```
void ofifal(g,h,d)
  float g[ ],h[ ],d[ ];
```

F77:
```
subroutine ofifal(g,h,d)
    real g(0:100),h(0:100),d(0:200)
```

Zum Übersetzen und Binden verwenden Sie die Prozedur *"mkofi"* für die C–Version bzw. *"mkofi –f"* für das FORTRAN–Unterprogramm. Testen Sie anschließend Ihr Programm mit dem Menüpunkt 4 und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem in *"ofi"* realisierten Unterprogramm (Menüpunkt 3). Verwenden Sie jeweils den Exponentialimpuls sowie die voreingestellten Parameter.

12 Pulscodemodulation

Inhalt: Die letzten fünf Kapitel dieses Praktikums behandeln einige Aspekte der Digitalsignalübertragung. Einführend betrachten wir mit der Pulscodemodulation (PCM) ein sehr grundlegendes und bereits seit langem etabliertes digitales Übertragungsverfahren. Nach einer Systembeschreibung anhand von Blockschaltbild und Signalverläufen wird insbesondere auf Abtastung und Signalrekonstruktion etwas ausführlicher eingegangen.

12.1 Einige Eigenschaften der Digitalsignalübertragung

Die bis Mitte der 80er Jahre dominierenden analogen Nachrichtensysteme werden mehr und mehr durch Digitalsysteme ersetzt. Alle in den letzten Jahren entstandenen Telekommunikationssysteme sind digital. Dafür gibt es mehrere Gründe:

- Durch die einheitliche Digitalübertragung von Sprach–, Bild– und Datensignalen kann ein sehr leistungsfähiges und flexibles Netz aufgebaut werden, das eine Reihe verschiedener Telekommunikationsdienste zur Verfügung stellt. Solche Digitalsysteme sind z.B. ISDN (*Integrated Services Digital Network*), GSM (*Global System for Mobile Communication*) und DECT (*Digital European Cordless Telephone*).
- Die Übertragung eines Datensignals bietet sich in digitaler Form an, da dieses selbst ein Digitalsignal ist. Dagegen muß für die digitale Übertragung eines Analogsignals – z.B. Sprache – dieses vorher "digitalisiert" werden, z.B. mittels der Pulscodemodulation mit den Verarbeitungsschritten Abtastung, Quantisierung und Codierung.
- Bei digitaler Übertragung kann der störende Einfluß von statistischen Störungen (z.B. dem unvermeidbaren thermischen Rauschen) vollständig eliminiert werden, solange diese Störung eine gewisse Schwelle nicht überschreitet. Deshalb ist im allgemeinen eine bessere Übertragungsqualität als bei Analogsystemen zu erzielen.
- Bei Digitalsignalübertragung können – eventuell zusätzlich zum Frequenzmultiplex (*FDMA*) – auch die Vorteile anderer Vielfachzugriffsverfahren wie z.B. Zeitmultiplex (*TDMA*), Codemultiplex (*CDMA*) und Raummultiplex (*SDMA*) genutzt werden.
- Für Digitalsignalübertragung sind einfache und sehr effiziente Datensicherungs– und –verschlüsselungsmechanismen bekannt. Durch die Anwendung von Quellen– und Kanalcodierverfahren und geeignete Decodieralgorithmen beim Empfänger läßt sich die Übertragungsqualität zusätzlich steigern.
- Jedes Digitalsignal ist in gewissen Grenzen regenerierbar. Das bedeutet: Bei sehr langen Übertragungswegen (*Weitverkehrssysteme*) können in festen Abständen Regenerativverstärker eingesetzt werden, die quasi wie eine Kombination aus Digitalempfänger für den letzten Abschnitt und Sendeeinrichtung für den nächsten Abschnitt wirken. Damit lassen sich – bei gleicher Übertragungsqualität – deutlich größere Entfernungen als mit Analogsystemen überbrücken.

Diesen vielen Vorteilen stehen natürlich auch einige Nachteile gegenüber. Insbesondere bei der Übertragung von Sprach– und Bildsignalen mittels PCM ergeben sich aufgrund der Quantisierung irreversible Verfälschungen (vgl. Abschnitt 12.2).

12.2 PCM-Blockschaltbild und -Signalverläufe

Bild 12.1 zeigt das Blockschalbild eines PCM–Übertragungssystems. In Bild 12.2 auf der nächsten Seite sind beispielhafte Signalverläufe dargestellt. Wie jedes Nachrichtenübertragungssystem kann auch das PCM–System in die Blöcke *Sender* (oben), *Kanal* (rechts) und *Empfänger* (unten) eingeteilt werden.

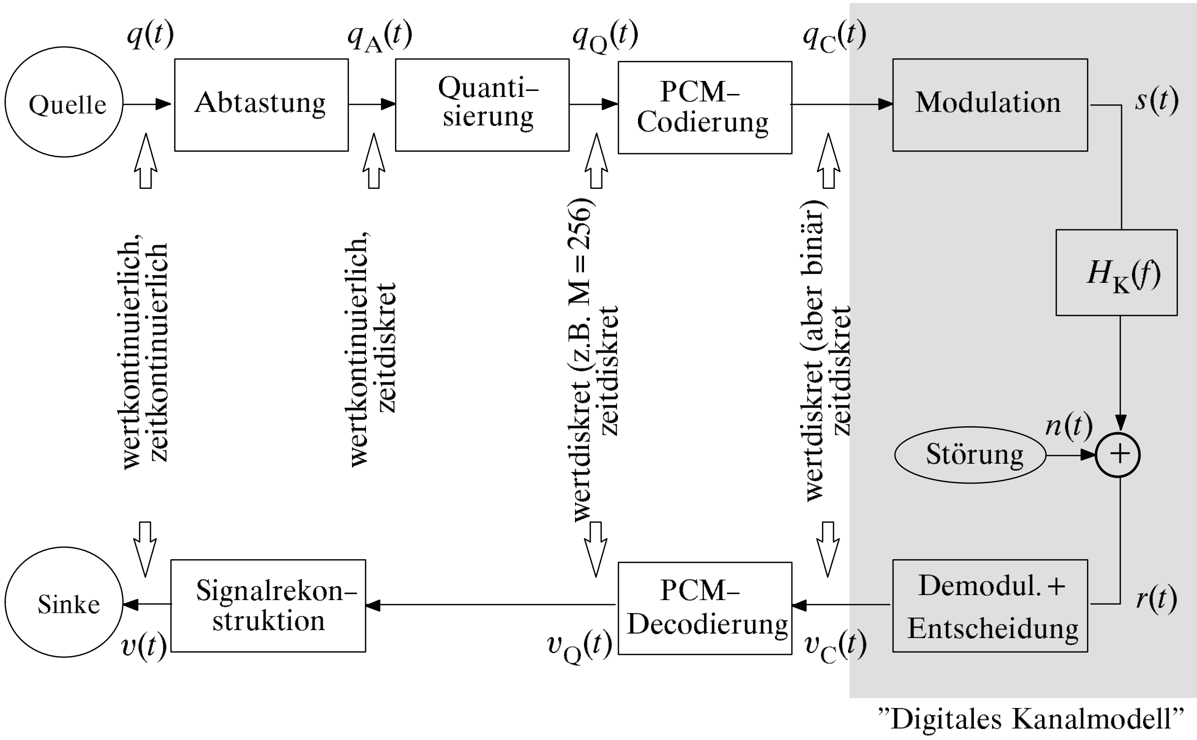


Bild 12.1: Blockschaltbild eines PCM–Übertragungssystems.

Die Nachrichtenquelle gibt das analoge Quellensignal $q(t)$ ab, das sowohl wert– als auch zeitkontinuierlich ist (durchgezogener Kurvenverlauf in Bild 12.2a). Daraus entsteht durch *Abtastung* das weiterhin wertkontinuierliche, nun aber zeitdiskrete Signal $q_A(t)$ entsprechend den Kreisen in Bild 12.2a. Die Abtastrate $f_A = 1/T_A$ ist hierbei durch das Abtasttheorem (siehe Abschnitt 12.3) vorgegeben.

Im Block *Quantisierung* wird jeder Abtastwert $q_A(\nu \cdot T_A)$ einem von M möglichen Quantisierungswerten zugeordnet, wobei man M als die Stufenzahl bezeichnet. Bei der Quantisierung teilt man den gesamten Wertebereich des Signals $q(t)$ in M Intervalle auf und ordnet jedem Intervall einen Repräsentanten zu, z.B. den Intervallmittelwert.

In Bild 12.2(a) ist die Zuordnung der Quantisierungswerte $q_Q(\nu \cdot T_A)$, mit Kreuzen markiert, zu den als Kreise dargestellten Abtastwerten $q_A(\nu \cdot T_A)$ für die Stufenzahl $M = 8$ veranschaulicht. Die Intervalle sind hier alle gleich groß gewählt; man spricht dann von linearer Quantisierung. Es ist deutlich zu erkennen, daß die Quantisierung zu nichtreversiblen Signalverfälschungen führt. Quantitativ werden diese Verzerrungen durch das *Quantisierungs–Signalrauschleistungsverhältnis* ϱ_Q erfaßt, dessen Berechnung in der Vorbereitungsfrage V12.2 von Ihnen gefordert wird. Bei linearer Quantisierung – wie für Bild 12.2(a) zugrundegelegt – mit der Stufenzahl M gilt: $\varrho_Q = M^2$.

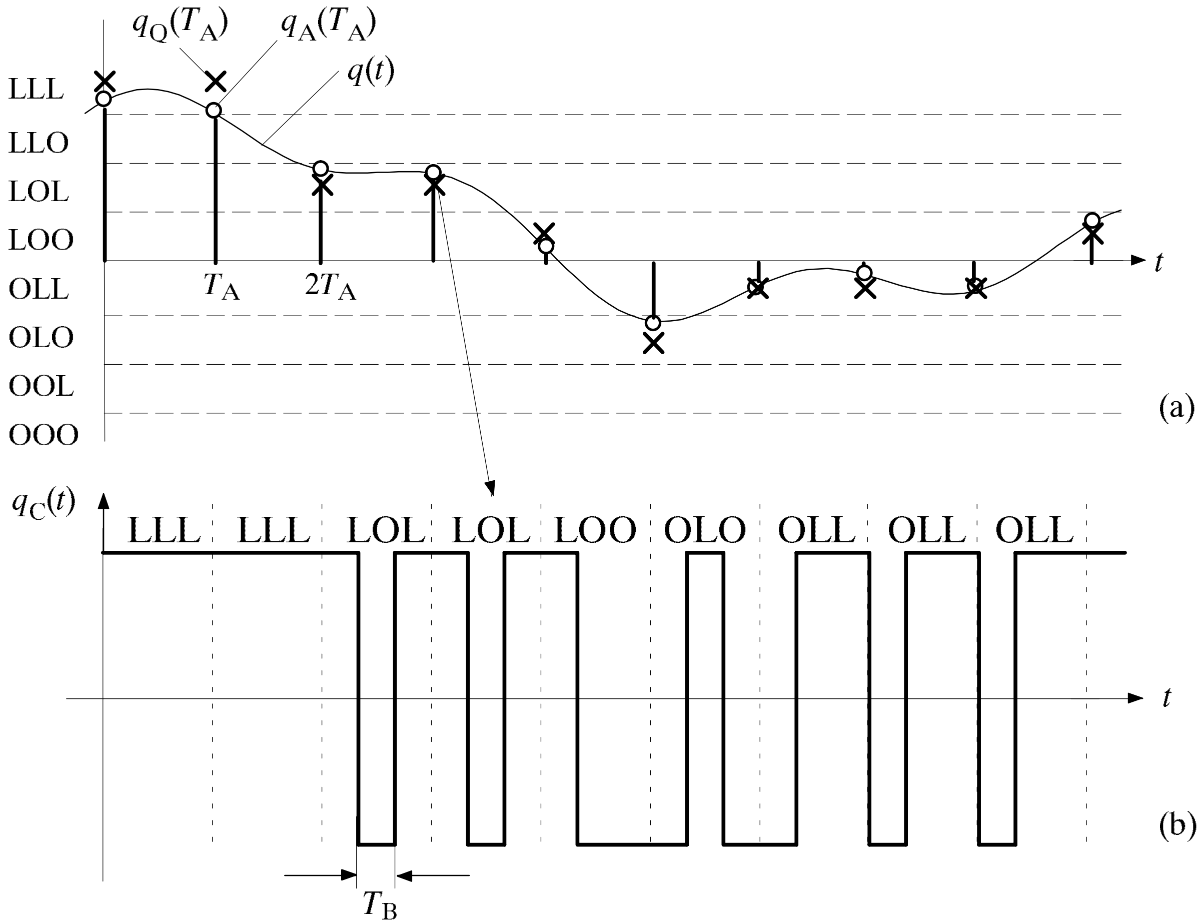


Bild 12.2: Signalverläufe eines PCM–Übertragungssystems mit $M = 8$.

Häufig wählt man die Intervallbreite bei kleinen Amplitudenwerten kleiner als bei größerer Signalamplitude (*nichtlineare Quantisierung*). Die Signalverfälschung wird dann für kleine Signalwerte (leise Töne) geringer. Eine solche ungleichmäßige Quantisierung kann z.B. durch eine nichtlineare Kennlinie (*Kompandierung*) mit anschließender linearer Quantisierung realisiert werden. Natürlich muß dann beim Empfänger diese Verformung durch eine inverse Nichtlinearität (*Expander*) rückgängig gemacht werden.

Die quantisierten Abtastwerte $q_Q(\nu \cdot T_A)$ sind wertdiskret, doch ist die Stufenzahl M meist sehr hoch. Im Block *Codierung* erfolgt nun eine Zuordnung der Abtastwerte zu Binärfolgen. Ist M eine Zweierpotenz, was für das Folgende meist vorausgesetzt wird, so kann jeder Wert durch $N = \mathrm{ld}(M)$ Binärsymbole (jeweils "O" oder "L") dargestellt werden. Hierbei kennzeichnet "ld" den Logarithmus zur Basis 2 (*Logarithmus dualis*).

Die Dauer T_B eines Rechteckimpulses ist nun um den Faktor N kleiner als das Abtastintervall T_A. Man bezeichnet T_B als die *Bitdauer* und den Kehrwert $1/T_B$ als die *Bitrate* des Übertragungssystems mit der Einheit "bit/s".

Die Zuordnung der quantisierten Abtastwerte zu Binärfolgen der Länge N kann auf verschiedene Weise erfolgen. Dem Bild 12.2b ist z.B. der sogenannte *Dualcode* zugrunde gelegt. Bei diesem werden die $M = 2^N$ Quantisierungsintervalle von 0 bis M–1 durchnumeriert und jedem Intervall die Binärdarstellung der Intervallnummer zugeordnet. Der im Versuch D12.5 beschriebene *Gray–Code* hat demgegenüber einige Vorteile.

Zur Übertragung des bipolaren (antipodischen) Binärsignals $q_C(t)$ über den Kanal können alle aus der digitalen Übertragungstechnik bekannten Modulationsverfahren verwendet werden, z.B. die Basisbandsignalübertragung (vgl. Kap. 14) oder eine digitale Amplitudenmodulation (ASK, *Amplitude Shift Keying*), eine digitale Frequenzmodulation (FSK, *Frequency Shift Keying*) oder eine digitale Phasenmodulation (PSK, *Phase Shift Keying*). ASK, FSK und PSK werden z.B. im Versuch *Digitale Modulationsverfahren* des Praktikums *Simulation digitaler Übertragungssysteme* eingehend behandelt.

Das Sendesignal $s(t)$ ist i.a. wieder ein Analogsignal, allerdings derart geformt, daß einer der Signalparameter (z.B. die Amplitude, Frequenz oder Phase) nur eine endliche Anzahl M verschiedener Werte annehmen kann. Bei der Übertragung über den Kanal – hier gekennzeichnet durch den Kanalfrequenzgang $H_K(f)$ – treten eventuell (lineare) Verzerrungen auf, so daß $r(t) \neq s(t)$ gilt. Außerdem beinhaltet das Empfangssignal $r(t)$ stets noch einen additiven Störanteil $n(t)$, der z.B. vom thermischen Rauschen herrührt.

Aufgabe des Demodulators ist – wie bei den analogen Modulationsverfahren auch – die Rücksetzung des empfangenen Signals $r(t)$ in das Basisband. Bei Basisbandübertragung entfällt diese Funktionseinheit. Im Gegensatz zu analoger Übertragung folgt jedoch beim PCM–System mit dem Entscheider (Detektor) ein weiterer Block, der das binäre Empfangssignal $v_C(t)$ liefert.

Sind die Verzerrungen und Störungen auf dem Übertragungskanal hinreichend klein, so ist $v_C(t) = q_C(t)$. Stärkere Signalverformungen auf dem Kanal führen dagegen zu Bitfehlern. Ein solcher liegt vor, wenn $v_C(\nu \cdot T_B) \neq q_C(\nu \cdot T_B)$ ist. Die Wahrscheinlichkeit p_B eines solchen Bitfehlers ist das entscheidende Gütekriterium der Digitalsysteme.

Bei Systemuntersuchungen kann der in Bild 12.1 grau hinterlegte Block durch ein sog. *Digitales Kanalmodell* ersetzt werden, der entsprechend einer vorgegebbaren Statistik Bitfehler generiert. Häufig verwendet man das Modell ”statistisch unabhängige Fehler”.

Betrachten wir nun die beiden weiteren Blöcke des Empfängers. Der Decoder hat die Aufgabe, die PCM–Codierung rückgängig zu machen. Das decodierte Signal $v_Q(t)$ ist somit wieder M–stufig und zeitdiskret. Bei fehlerfreier Übertragung, d.h. $v_C(t) = q_C(t)$, gilt stets auch $v_Q(t) = q_Q(t)$. Als letzte Einheit folgt die *Signalrekonstruktion* mit der Aufgabe der Digital–/Analogwandlung. Dieser Block stellt das Gegenstück zur Abtastung dar und wird wie diese in Abschnitt 12.3 genauer untersucht.

Bild 12.1 zeigt auch, daß die Quantisierung kein Pendant auf der Empfängerseite hat. Dies bedeutet aber, daß die auf die Quantisierung zurückzuführenden Verfälschungen irreversibel sind. Auch bei fehlerfreier Übertragung ist somit $v(t) \neq q(t)$. Die Signalverformung aufgrund der Quantisierung ist um so geringer, je größer die Stufenzahl M ist.

In Bild 12.3 ist das seit langer Zeit eingesetzte System PCM 30/32 (Systemparameter siehe in den Angaben zu V12.1) den Analogverfahren *Amplitudenmodulation* (AM) *ohne Träger* und *Frequenzmodulation* (FM) hinsichtlich des erreichbaren Signalrauschabstands $10 \cdot \lg(\varrho_v)$ vergleichend gegenübergestellt. Es gilt folgende Definition:

$$\varrho_v = \frac{P_{\text{Nutz}}}{P_{\text{Rausch}}} = \frac{\text{Nutzleistung von } v(t)}{\text{Rauschleistung von } v(t)} \; . \tag{12.1}$$

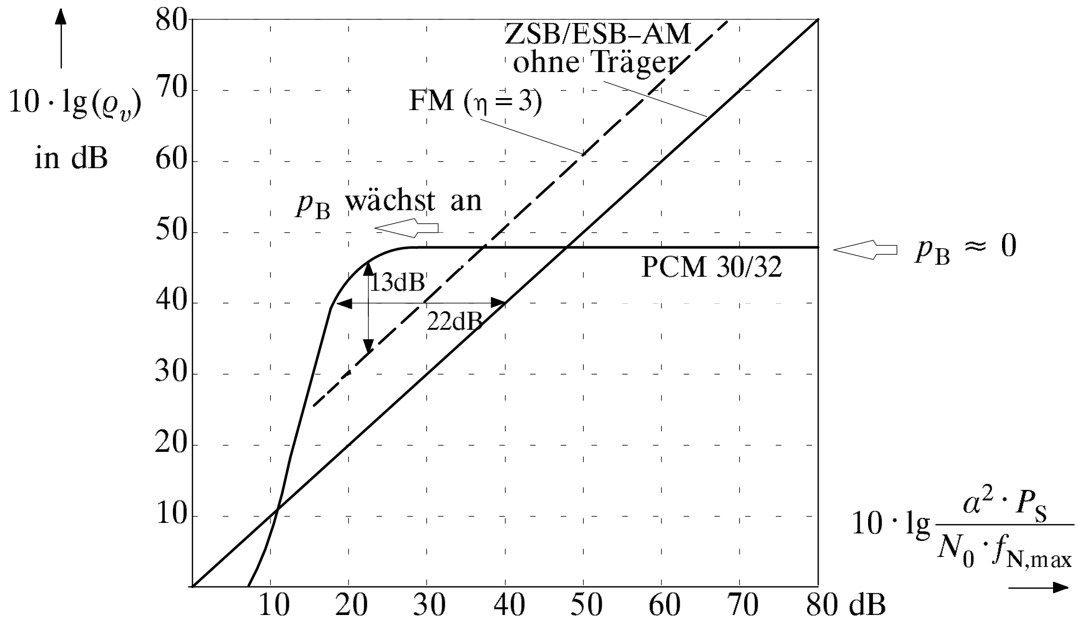


Bild 12.3: Vergleich von AM, FM und PCM hinsichtlich Signalrauschabstand.

Als Grundlage dieses Vergleichs wird vorausgesetzt:

- ein cosinusförmiges Nachrichtensignal $q(t)$ der Frequenz $f_{N,max}$,
- eine konstante Sendeleistung P_S,
- eine konstante Rauschleistungsdichte N_0 und
- ein für alle Frequenzen gleich dämpfender (verzerrungsfreier) Kanal mit $H_K(f) = a$.

Die durchgehende Kurve der ZSB–AM ist aufgrund der hier gewählten Abszisse eine Gerade mit 45° Steigung. Die gestrichelte FM–Kurve (gültig für den Modulationsindex $\eta = 3$) liegt für Abszissenwerte größer als ca. 10 dB um etwa 11.3 dB darüber.

Betrachten wir aber nun die Kurve des PCM–Systems 30/32. Für Abszissenwerte zwischen 13 und 38 dB liegt dieses System oberhalb der FM–Vergleichskurve. Der maximale Störabstandsgewinn von ca. 13 dB ergibt sich bei einem Abszissenwert von 23 dB.

Weiterhin ist aus Bild 12.3 zu ersehen, daß bei PCM der erreichbare Signalrauschabstand begrenzt ist. Auch bei sehr guten Kanälen, bei denen durch das Rauschen $n(t)$ praktisch keine Bitfehler verursacht werden, ergibt sich aufgrund der Quantisierungsverzerrungen stets ein endlicher Wert: $\varrho_v \approx \varrho_Q$. Für Bild 12.3 wurden $M = 256$ gleiche Quantisierungsintervalle zugrundegelegt, so daß man $10 \cdot \lg(\varrho_Q) = 20 \cdot \lg(M) \approx 48.2$ dB erhält. Diese Gleichung gilt allerdings nur unter der vereinfachenden Annahme, daß das Nachrichtensignal alle möglichen Amplitudenwerte mit gleicher Wahrscheinlichkeit annimmt, was z.B. bei einem sägezahnförmigen Signal zutrifft (siehe V12.2).

Der PCM–Kurvenzug, von rechts nach links betrachtet, entspricht einer Zunahme der Bitfehlerwahrscheinlichkeit. Im horizontalen Ast sind die Auswirkungen von Übertragungsfehlern auf das S/N–Verhältnis des Analogsignals im Vergleich zur Quantisierung vernachlässigbar. Erst wenn die Bitfehlerwahrscheinlichkeit 10^{-4} und mehr beträgt, wirkt sich dies auch auf die Qualität des Sprach– oder Bildsignals aus. Ist p_B zu groß (z.B. 1% oder mehr), so ist das Digitalsystem sogar schlechter als die analoge ZSB–AM.

12.3 Signalabtastung und -rekonstruktion

Nun betrachten wir die ideale Abtastung des Analogsignals $q(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Q(f)$, also die *Zeitdiskretisierung*. Die Abtastung von $q(t)$ kann als Multiplikation mit einem Diracpuls

$$p_\delta(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} T_A \cdot \delta(t - \nu \cdot T_A) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad P_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n \cdot f_A) \tag{12.2}$$

aufgefaßt werden. Unter einem Diracpuls $p_\delta(t)$ soll wie in Kapitel 9 eine unendliche Summe (um gleiche Abstände T_A) verschobener Diracimpulse gleichen Gewichts verstanden werden. Somit gilt für das abgetastete Signal im Zeit– und Frequenzbereich:

$$q_A(t) = q(t) \cdot p_\delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Q_A(f) = Q(f) * P_\delta(f) \; . \tag{12.3}$$

Bild 12.4 verdeutlicht diesen Sachverhalt im Zeitbereich. Nach dem *Abtasttheorem* ist allerdings nur dann die gesamte Information des Analogsignals $q(t)$ im abgetasteten Signal $q_A(t)$ enthalten, wenn die Abtastfrequenz $f_A = 1/T_A$ mindestens doppelt so groß ist wie die maximale Frequenz $f_{N,max}$ des Nachrichtensignals:

$$f_A \geq 2 \cdot f_{N,max} \quad \text{bzw.} \quad T_A \leq \frac{1}{2 \cdot f_{N,max}} \; . \tag{12.4}$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur bei einem Signal mit kontinuierlichem Spektrum $Q(f)$. Bei einem periodischen Signal mit einer Dirackomponente bei $f_{N,max}$ muß dagegen die Abtastfrequenz f_A stets (geringfügig) größer sein als $2 \cdot f_{N,max}$ (siehe Versuch D12.1).

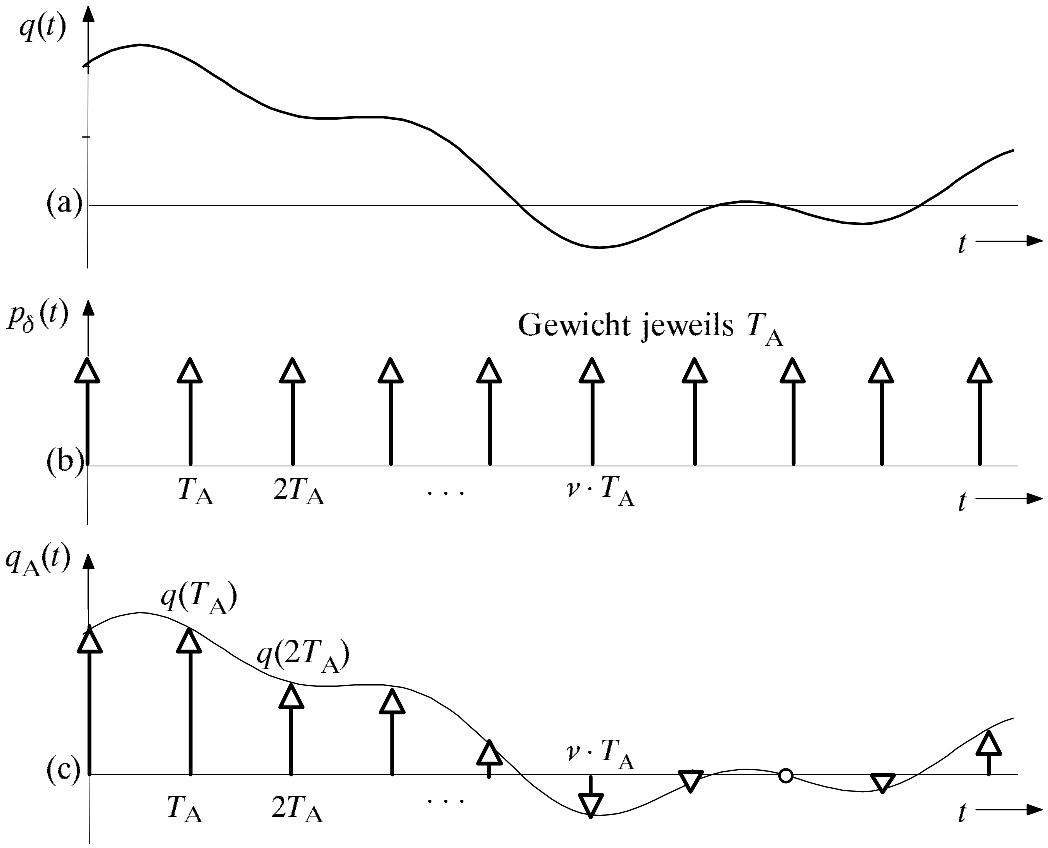


Bild 12.4: Abgetastetetes Signal (c) als Produkt von Analogsignal (a) und Diracpuls (b).

Zur Interpretation des Abtasttheorems betachten wir nun den Frequenzbereich. Das Spektrum eines Diracpulses $p_\delta(t)$ im Zeitbereich ist entsprechend (12.2) ein Diracpuls $P_\delta(f)$ im Frequenzbereich, wobei der Abstand der einzelnen Spektrallinien f_A beträgt. Die Herleitung dieser wichtigen Beziehung sollte bereits in der Vorbereitungsfrage V9.3 erfolgen. Das Spektrum $Q_A(f)$ ergibt sich nach (12.3) aus der Faltung von $Q(f)$ mit $P_\delta(f)$. Daraus folgt, daß $Q_A(f)$ gleich der im Abstand f_A periodisch fortgesetzten Funktion $Q(f)$ ist. Das Spektrum des abgetasteten Signals ist somit unendlich breit (vgl. Bild 12.5).

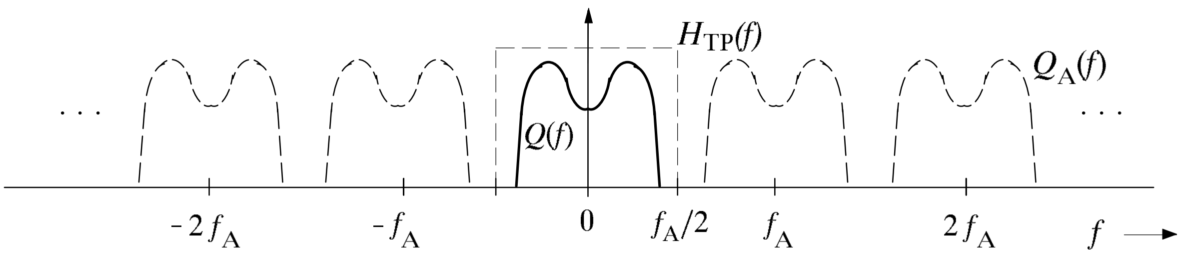


Bild 12.5: Spektren $Q(f)$ und $Q_A(f)$ von analogem bzw. abgetastetetem Signal.

Betrachten wir abschließend noch die *Signalrekonstruktion*, also die Gewinnung des wert– und zeitkontinuierlichen Sinkensignals $v(t)$ aus dem wert– und zeitdiskreten Signal $v_Q(t)$. Vereinfachend – aber ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit – nehmen wir an, daß $v_Q(t) \approx q_A(t)$ sei. Dies entspricht einer Vernachlässigung der Quantisierungsverzerrungen sowie einer fehlerfreien Übertragung. Aus Bild 12.5 ist zu ersehen, daß die Signalrekonstruktion durch einen ideal rechteckförmigen Tiefpaß (*Küpfmüller–Tiefpaß*) mit der Grenzfrequenz $f_G = f_A/2$ realisiert werden kann. Dann gilt:

$$V(f) = V_Q(f) \cdot H_{TP}(f) \approx Q_A(f) \cdot H_{TP}(f) = Q(f) \ . \qquad (12.5)$$

Im Zeitbereich bedeutet die Filterung mit dem Küpfmüller–Tiefpaß eine Interpolation von $v_Q(t)$ mittels einer si–Funktion (Impulsantwort des Küpfmüller–Tiefpasses).

Die Wiederherstellung des Analogsignals beim Empfänger ist allerdings nur dann verzerrungsfrei möglich ($v(t) = q(t)$), wenn sendeseitig das Abtasttheorem beachtet wurde. Ist dieses nicht erfüllt (d.h. ist T_A zu groß bzw. f_A zu klein), so kommt es zu nichtreversiblen Überschneidungen im Spektralbereich (vgl. Bild 12.6). Die Spektren können dann durch einen Tiefpaß nicht mehr getrennt werden; man spricht von *Aliasing*.

In der Praxis wird anstelle des idealen, diracförmigen Pulses $p_\delta(t)$ zur Abtastung oft ein Puls $p_R(t)$ mit schmalen Rechteckimpulsen verwendet. Dies führt zu geringfügigen, aber reversiblen Verfälschungen (vgl. Vorbereitungsfrage V12.3).

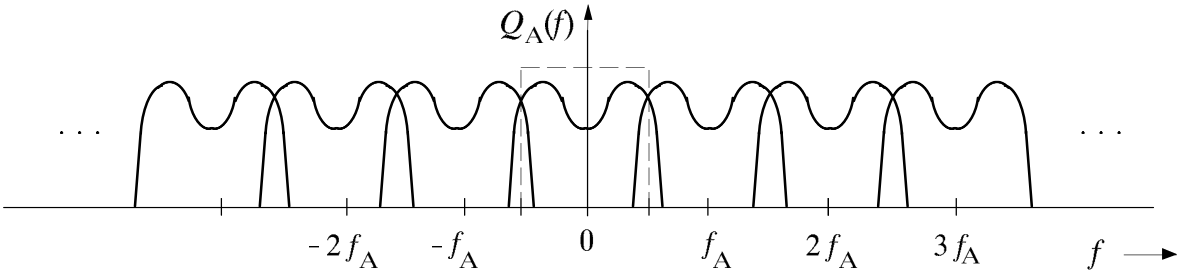


Bild 12.6: Spektrum $Q_A(f)$ bei Nichteinhaltung des Abtasttheorems.

12.4 Vorbereitungsfragen

V12.1: Seit vielen Jahren wird in Deutschland das PCM–System 30/32 eingesetzt. Dieses erlaubt die digitale Übertragung von bis zu 30 Sprachkanälen (jeweils für eine maximale NF–Frequenz von $f_{\mathrm{N,max}} = 4$ kHz) zusammen mit einem Synchronisations– und einem Wählzeichenkanal, so daß die Gesamtkanalzahl $Z = 32$ ist (*Zeitmultiplexsystem*).

a) Mit welcher Abtastfrequenz f_{A} müssen die Sprachsignale abgetastet werden? In welchem zeitlichen Abstand T_{A} erfolgt die Abtastung, wenn man den kleinstmöglichen Wert von f_{A} heranzieht?

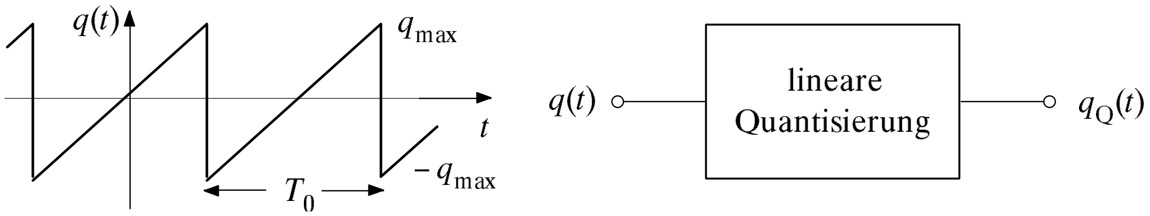
b) Die abgetasteten Sprachsignale werden jeweils mit $M = 256$ Stufen quantisiert und jeder Quantisierungswert wird mit N Binärsymbolen übertragen. Wie groß ist N?

c) Welche Zeit T_{B} würde zur Übertragung eines Binärsymbols zur Verfügung stehen, wenn nur ein Kanal vorhanden wäre? (T_{B} bezeichnet die Bitdauer.)

d) Welche Zeit T_{B} steht zur Übertragung eines Binärsymbols zur Verfügung, wenn alle $Z = 32$ Kanäle berücksichtigt werden?

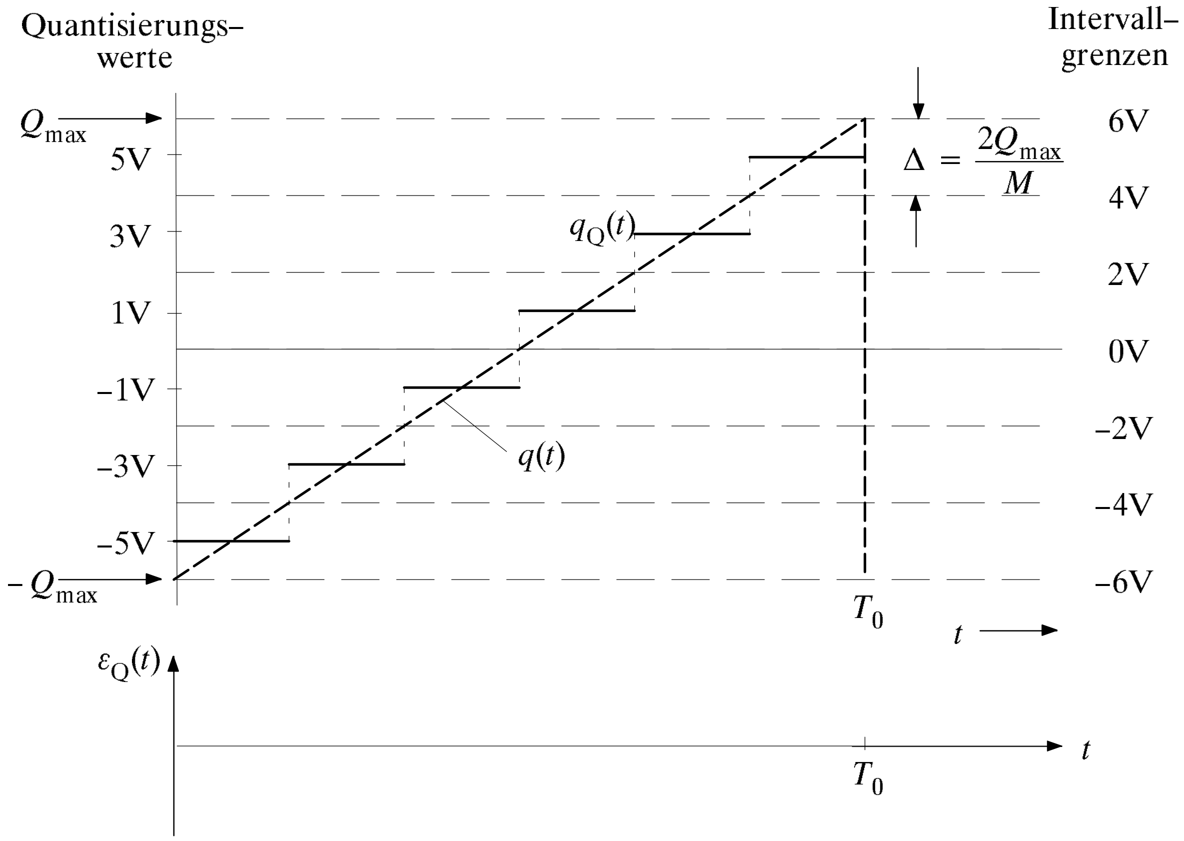
e) Geben Sie eine allgemeingültige Gleichung für T_{B} an. Wie groß ist die Bitrate f_{B}?
Hinweis: Im Gegensatz zur Frequenz in "Hz" hat die Bitrate die Einheit "bit/s".

V12.2: Das Prinzip der linearen Quantisierung wurde im Abschnitt 12.2 anhand von Bild 12.2 erläutert. Nun soll die damit verbundene Beeinträchtigung der PCM–Übertragung durch die Quantisierungsverzerrungen quantitativ erfaßt werden.



Wir gehen wir von einem sägezahnförmigen Nachrichtensignal $q(t)$ aus, das innerhalb der Zeit T_0 linear von $-q_{\max}$ auf $+q_{\max}$ ansteigt. Im folgenden sei stets $q_{\max} = 6$V. Bei Quantisierung mit $M = 6$ Stufen, wobei die einzelnen Intervalle alle gleich seien (Breite Δ), erhält man das in nachfolgender Skizze eingezeichnete quantisierte Signal $q_Q(t)$.

Vorausgesetzt, der Quantisierungsbereich ($\pm Q_{\max}$) stimme mit dem Signalbereich ($\pm q_{\max}$) exakt überein, ergeben sich für $M = 6$ die Intervallgrenzen 0V, ±2V und ±4V. Die möglichen Amplitudenwerte für das quantisierte Signal sind ±1V, ±3V und ±5V.



a) Skizzieren Sie das Fehlersignal $\varepsilon_Q(t) = q_Q(t) - q(t)$ in obiges Diagramm. Berechnen Sie anschließend dessen quadratischen Mittelwert (*Quantisierungsrauschleistung*):

$$P_Q = \overline{\varepsilon_Q(t)^2} = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} \varepsilon_Q(t)^2 \, \mathrm{d}t \ . \tag{12.6}$$

b) Berechnen Sie die Nutzleistung $P_{\rm S}$ des Nachrichtensignals $q(t)$ in analoger Weise.

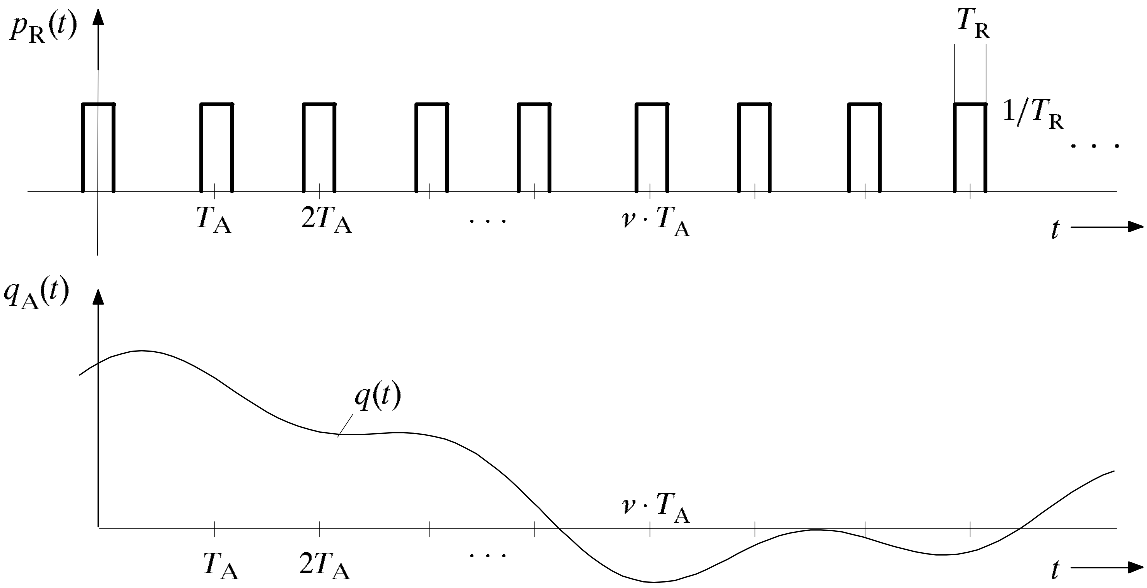
c) Berechnen Sie mit den Werten aus a) und b) das S/N–Verhältnis $\varrho_{\rm Q} = P_{\rm S}/P_{\rm Q}$. Welche Zahlenwerte (in dB) ergeben sich bei einer Quantisierung mit 8 Bit ($M = 2^8$, z.B. PCM–System 30/32) bzw. mit 16 Bit ($M = 2^{16}$, z.B. CD–Technik)?

d) Wieviele Quantisierungsstufen M sind erforderlich, damit der Quantisierungsrauschabstand mindestens 60 dB beträgt (das entspricht in etwa "Musikqualität")? Mit wievielen Bits müssen demnach die Abtastwerte quantisiert werden?

e) Geben Sie alle Voraussetzungen an, die erfüllt sein müssen, damit das unter Punkt c) berechnete S/N–Verhältnis exakt stimmt.

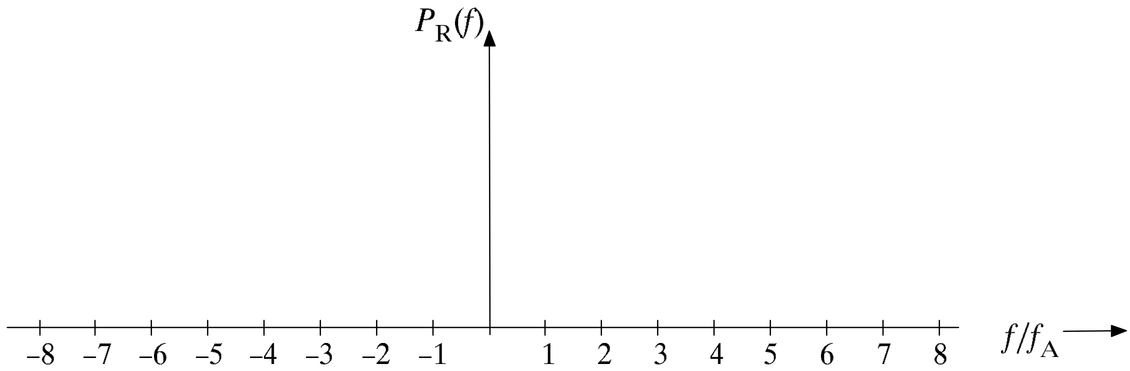
V12.3: Die ideale Abtastung läßt sich mathematisch durch die Multiplikation mit dem Diracpuls $p_\delta(t)$ exakt beschreiben (vgl. Bild 12.4). In der Praxis muß zur Abtastung jedoch anstelle des idealen, diracförmigen Pulses $p_\delta(t)$ stets ein Puls $p_R(t)$ mit schmalen Rechteckimpulsen verwendet werden. Die Breite eines einzelnen Rechteckimpulses $\varrho(t)$ sei T_R, die Höhe $1/T_R$ (siehe nachfolgende Skizze).

a) Zeichnen Sie in das untere Diagramm das Signal $q_A(t)$ ein, das sich ergibt, wenn man das Analogsignal $q(t)$ mittels des Rechteckpulses $p_R(t)$ natürlich abtastet. *Hinweis:* Im Versuch D12.2 wird auf den Unterschied zwischen der hier betrachteten natürlichen und der sogenannten diskreten Abtastung ausführlicher eingegangen.

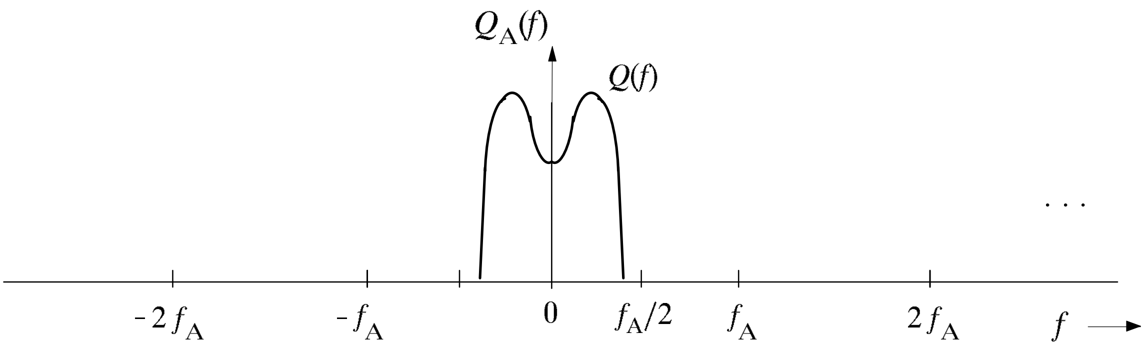


b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Pulsen $p_\delta(t)$ und $p_R(t)$?

c) Geben Sie das Spektrum $P_R(f)$ des Rechteckpulses $p_R(t)$ formelmäßig an. Skizzieren Sie $P_R(f)$ in das nachfolgende Diagramm für $T_R/T_A = 4$.



d) Skizzieren Sie qualitativ das Spektrum $Q_A(f)$ eines mit einem Rechteckpuls $p_R(t)$ abgetasteten bandbegrenzten Nachrichtensignals $q(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Q(f)$. Interpretation.



e) Wie kann das Nachrichtensignal am Empfänger rekonstruiert werden?

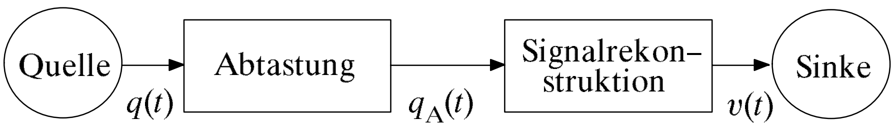
12.5 Versuchsdurchführung

Alle nachfolgenden Aufgaben sollen mit dem Programm *"pcm"* durchgeführt werden. Hierbei gilt für das Quellensignal (frei wählbare Parameter sind mit Pfeilen markiert):

$$q(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{10} C_i \cdot \cos(2\pi \cdot i \cdot f_0 \cdot t - \varphi_i) \qquad \text{mit} \qquad f_0 = \frac{1}{T_0}\,. \tag{12.7}$$

Hinweis: Aufgrund des nichtvorhandenen Zeichens "φ" wird bei der Programmeingabe "$-\phi$" verwendet. Dies entspricht der im Praktikum verwendeten Nomenklatur.

D12.1: Der erste Versuch beschäftigt sich mit der Signalabtastung und –rekonstruktion. Wählen Sie zunächst das *Standardsystem A.* Damit wird für $q(t)$ ein 5 kHz–Cosinussignal ausgewählt (T_0 = 1 ms, C_5 = 1, alle anderen Signalparameter 0) und ein PCM–System ohne Quantisierungsverzerrungen simuliert ($M \to \infty$). Das Eingangssignal des Blockes "Signalrekonstruktion" (idealer Tiefpaß mit Grenzfrequenz f_G) ist in diesem Fall identisch mit dem abgetasteten Signal (siehe nachfolgendes Modell).



a) Wieviele Abtastwerte sind zur Beschreibung des gesamten Signalverlaufs (d.h. von $-\infty$ ... $+\infty$) einer harmonischen Schwingung $q(t) = \hat{q} \cdot \cos(\omega_q \cdot t - \varphi_q)$ erforderlich?

b) Betrachten Sie nun die äquidistante Abtastung mittels eines Diracpulses. Welche ist die kleinstmögliche Abtastfrequenz f_A für ein auf 5 kHz bandbegrenztes Signal $q(t)$, wenn dessen Spektrum bei 5 kHz keine Spektrallinie aufweist? Wie groß muß die Grenzfrequenz f_G des idealen Tiefpasses zur Signalrekonstruktion gewählt werden?

c) Betrachten Sie im Programm *"pcm"* die Signale $q_A(t)$ und $v(t)$ sowie deren Spektren, wenn $q(t)$ ein 5 kHz–Cosinussignal ist und die Abtastfrequenz f_A = 10 kHz beträgt ($f_A/f_0 = T_0/T_A = 10$). Kann dieses Signal verzerrungsfrei rekonstruiert werden?

d) Wählen Sie nun die Phase des 5 kHz–Signals zu 45°. Ist auch dieses Signal mit der Abtastfrequenz $f_A = 10$ kHz vollständig rekonstruierbar? Begründen Sie das Ergebnis durch eine (komplexe) Frequenzbereichsbetrachtung.

e) Welches Sinkensignal erhält man bei sinusförmigem Nachrichtensignal (Phase 90°)?

f) Zeigen und begründen Sie, daß bereits durch eine geringfügige Erhöhung der Abtastfrequenz das Signal verzerrungsfrei rekonstruiert werden kann. Wählen Sie hierzu $f_A = 11$ kHz (*Anmerkung:* Im Programm ist das Verhältnis f_A/f_0 stets ganzzahlig).

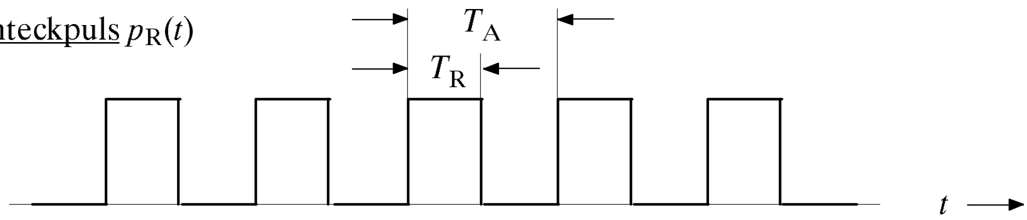
g) Wählen Sie nun das *"Mustersignal 1"* mit folgenden Parametern: $T_0 = 1$ms, $A_0 = 0.1$, $C_1 = 0.26$ (φ_1:–10°), $C_2 = 0.54$ (φ_2: 180°), $C_3 = 0.30$ (φ_3:–60°), $C_4 = 0.14$ (φ_4:20°). Zeigen Sie, daß auch dieses Analogsignal verzerrungsfrei rekonstruiert werden kann, wenn die Abtastung mit $f_A = 10$ kHz erfolgt und die Grenzfrequenz f_G des idealen Tiefpasses 5 kHz beträgt.

h) Wählen Sie nun bei gleichem Abtastsignal $q_A(t)$ die (normierte) Grenzfrequenz f_G/f_A gleich 0.35 bzw. 0.65. Interpretieren Sie die unzureichenden Ergebnisse.

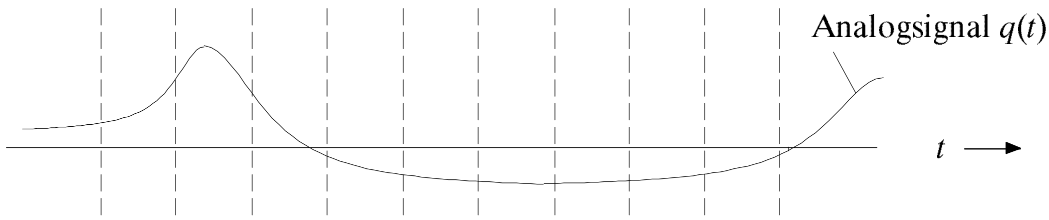
D12.2: Nun sollen die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen der natürlichen und der diskreten Abtastung in Zeit– und Frequenzbereich herausgearbeitet werden. Wählen Sie hierzu das ”Mustersignal 1” und das Tastverhältnis $T_R/T_A = 0.5$ (siehe Skizze).

a) Betrachten Sie das Signal $q_A(t)$ bei natürlicher und diskreter Abtastung. Skizzieren Sie jeweils $q_A(t)$ für das vorgegebene Analogsignal und beschreiben Sie die Unterschiede. *Hinweis:* Entsprechend der Voreinstellung von *”pcm”* ergibt sich bei der diskreten Abtastung stets ein akausales Signal. Mit dem Menüpunkt P (*Programmeinstellungen: Rechteckpuls ungerade*) läßt sich dieses ändern. Arbeiten Sie trotzdem mit der Einstellung ”Rechteckpuls gerade”, um komplexe Spektren zu vermeiden.

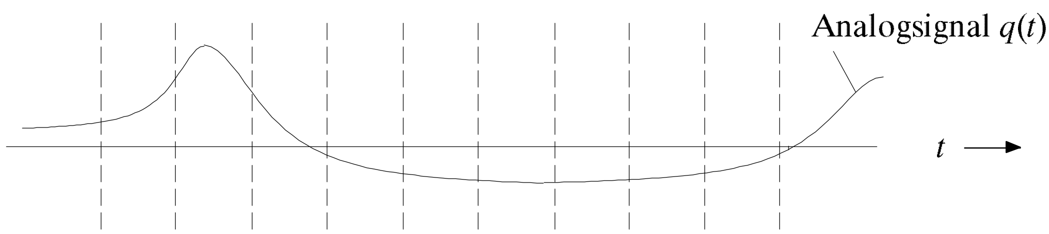
Rechteckpuls $p_R(t)$



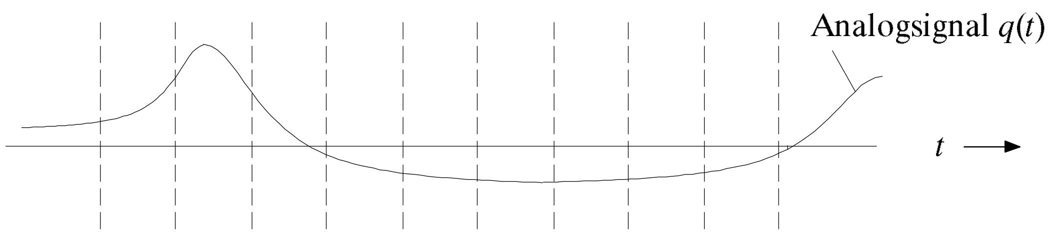
natürliche Abtastung



diskrete Abtastung (kausale Darstellung: Rechteckimpuls ungerade)



diskrete Abtastung (akausale Darstellung: Rechteckimpuls gerade)



b) Geben Sie für beide Abtastarten eine analytische Beschreibung des Zeitsignals $q_\mathrm{A}(t)$ an, und zwar unter Verwendung des Analogsignals $q(t)$, des Diracpulses $p_\delta(t)$ und eines Rechteckimpulses $\varrho(t)$ mit der Breite T_R und der Höhe $1/T_\mathrm{R}$ (siehe V12.3).

c) Welche Folgerungen ergeben sich aus dem Ergebnis von b) für die dazugehörigen Spektren $Q_\mathrm{A}(f)$? Verwenden Sie die Fourierkorrespondenz $\varrho(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ R(f)$.

d) Wählen Sie nun im Menüpunkt P (*Programmeinstellungen*) die Option "Normierung" sowie "Mustersignal 2" mit den Parameterwerten $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1$ (alle Phasenwinkel $0°$) und $T_0 = 1\,\mathrm{ms}$, $A_0 = 0$. Betrachten Sie im Programm *"pcm"* (Menüpunkt B) das Spektrum $Q_\mathrm{A}(f)$ bei natürlicher Abtastung. Interpretieren Sie Ihre Berechnungen aus Punkt c) anhand der ausgegebenen Graphen.
Hinweis: Im Programm *"pcm"* ist die Höhe der Rechtecke nicht $1/T_\mathrm{R}$, sondern 1.

e) Zeigen Sie anhand des mittleren quadratischen Fehlers

$$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} \big(v(t) - q(t)\big)^2 \, \mathrm{d}t \tag{12.8}$$

zwischen Sinken– und Quellensignal, daß bei natürlicher Abtastung ein Küpfmüller–Tiefpaß mit der Grenzfrequenz $f_\mathrm{G} = f_\mathrm{A}/2 = 5\,\mathrm{kHz}$ zur Signalrekonstruktion ausreicht. *Hinweis:* Da im Programm die Rechtecke die Amplitude 1 haben (und nicht $1/T_\mathrm{R}$), ist beim Tiefpaßfilter eine entsprechende Gleichsignalverstärkung $H(0)$ erforderlich.

f) Wie groß ist bei diskreter Abtastung und Signalrekonstruktion mittels Küpfmüller–Tiefpaß der mittlere quadratische Fehler? Begründen Sie diese Tatsache anhand des Spektrums $Q_\mathrm{A}(f)$.

g) Versuchen Sie, den mittleren quadratischen Fehler durch ein geeignetes Tiefpaßfilter (praktisch) zu Null zu machen. Welchen Frequenzgang hat dieses Filter?

D12.3: Nun soll der Einfluß der Quantisierung untersucht werden. Wählen Sie hierzu ein 1 kHz–Cosinussignal und gleichmäßige Quantisierung mit der Stufenzahl $M = 2^4 = 16$; diese ist aus Demonstrationszwecken bewußt klein gewählt. *Hinweis:* Zur Aktivierung der Quantisierung müssen Sie im Block *Abtastung* den obersten Menüpunkt auswählen.

Mit dem Menüpunkt Q5 (*Quantisierungskennlinien/MQF bei spontaner Quantisierung*) kann das Fehlersignal $\varepsilon_Q(t) = q_Q(t) - q(t)$ entsprechend der Definition von V12.2 sowohl für das eingestellte Cosinussignal (mit der Nutzleistung $P_S = 1/2$) als auch für ein sägezahnförmiges Nachrichtensignal ($P_S = 1/3$) dargestellt werden. Außerdem wird hier noch jeweils die Quantisierungsrauschleistung P_Q gemäß Gl. (12.6) und der Quantisierungs–Rauschabstand $10 \cdot \lg(\varrho_Q) = 10 \cdot \lg(P_S/P_Q)$ ausgegeben.

a) Betrachten und beschreiben Sie die jeweiligen Fehlersignale.

b) Welche Werte ergeben sich für P_Q und $10 \cdot \lg(\varrho_Q) = 10 \cdot \lg(P_S/P_Q)$? Vergleichen Sie den vom Programm ausgegebenen Quantisierungsrauschabstand (in dB) mit dem in V12.2 für das Sägezahnsignal berechneten Wert.

NF–Signal	P_S (simuliert)	P_Q (simuliert)	$10 \cdot \lg(\varrho_Q)$ (simuliert)	$10 \cdot \lg(\varrho_Q)$ (berechnet)
Sägezahn				
Cosinus				——

c) Wiederholen Sie den Versuch b) mit $M = 2^8 = 256$.

NF–Signal	P_S (simuliert)	P_Q (simuliert)	$10 \cdot \lg(\varrho_Q)$ (simuliert)	$10 \cdot \lg(\varrho_Q)$ (berechnet)
Sägezahn				
Cosinus				——
Muster–signal 1				——

d) Wählen Sie als Quellensignal das Mustersignal 1. Die anderen Einstellungen bleiben gegenüber Punkt c) unverändert: Abtastfrequenz $f_A = 10$ kHz, Quantisierung mit $M = 2^8 = 256$. Welche Werte ergeben sich für P_S, P_Q und $10 \cdot \lg(\varrho_Q) = 10 \cdot \lg(P_S/P_Q)$? Tragen Sie diese Werte in die letzte Tabelle ein und interpretieren Sie diese.

e) Betrachten Sie weiterhin die Einstellungen nach Punkt d). Die Signalrekonstruktion ist ideal, die Übertragung fehlerfrei. Damit ist die Abweichung zwischen Sinken– und Quellensignal allein auf die Quantisierung zurückzuführen. Zeigen Sie, daß sich trotzdem der mittlere quadratische Fehler zwischen $v(t)$ und $q(t)$ entsprechend Definition (12.8) von der Quantisierungsrauschleistung P_Q gemäß (12.6) unterscheidet:

$$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} \big(v(t) - q(t)\big)^2 \, dt \quad \neq \quad P_Q = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} \big(q_Q(t) - q(t)\big)^2 \, dt \ .$$

Begründen Sie dieses Ergebnis. *Hinweis:* P_Q und $10 \cdot \lg(\varrho_Q) = 10 \cdot \lg(P_S/P_Q)$ wurden bereits in d) bestimmt. Der MQF gemäß (12.8) sowie der zugehörige Störabstand $10 \cdot \lg(\varrho_v)$ können im Fenster "Zeitsignalverläufe/Sinkensignal" abgelesen werden.

$P_Q =$ $\qquad\qquad$ $10 \cdot \lg(\varrho_Q) =$

$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} =$ $\qquad\qquad$ $10 \cdot \lg(\varrho_v) =$

f) Betrachten und beschreiben Sie für die getroffene Einstellung die Signale $q_A(t)$, $q_Q(t)$, $q_C(t)$, $v_C(t)$, $v_Q(t)$ und $v(t)$. Welche sind gleich?

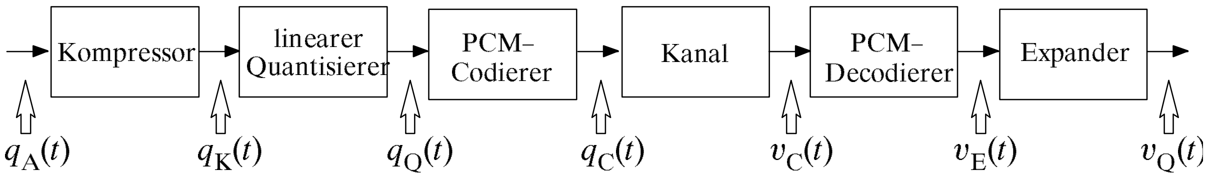
g) Welche Störabstände ergeben sich, wenn der Quantisierungsbereich ($\pm Q_{max}$) nicht mit dem Signalbereich ($\pm q_{max}$) übereinstimmt? Letzterer beträgt beim Mustersignal 1 etwa $q_{max} = 1$. Wählen Sie hierzu $Q_{max} = 0.7$, 0.8 und 1.3. Begründen Sie diese Ergebnisse. Warum ist hier $Q_{max} = 0.8$ sogar günstiger als $Q_{max} = 1$?

$Q_{max} = 0.7: \quad 10 \cdot \lg(\varrho_v) =$

$Q_{max} = 0.8: \quad 10 \cdot \lg(\varrho_v) =$

$Q_{max} = 1.3: \quad 10 \cdot \lg(\varrho_v) =$

D12.4: Bei Sprach– und Musiksignalen werden Verfälschungen der leisen Signalanteile (Werte in der Nähe der Nullinie) als störender empfunden als Beeinträchtigungen großer Amplitudenwerte. Diese Tatsache legt eine von den Bereichsgrenzen zur Nullinie hin zunehmend feinere Quantisierung nahe. Eine solche *ungleichmäßige Quantisierung* kann z.B. dadurch realisiert werden, in dem die abgetasteten Werte $q_A(\nu \cdot T_A)$ zunächst durch eine nichtlineare Kennlinie $y(x)$ verformt und die entstehenden Ausgangswerte $q_K(\nu \cdot T_A)$ gleichmäßig quantisiert werden. Damit ergibt sich folgende Signalkette:



Eine solche ungleichmäßige Quantisierung bedeutet Verstärkung kleiner und eine Abschwächung großer Signalwerte (*Kompression*). Diese bewußte Signalverzerrung muß beim Empfänger durch die Umkehrfunktion der jeweils verwendeten Kompressorkennlinie wieder rückgängig gemacht werden (*Expandierung*). Den Gesamtvorgang von sendeseitiger Kompression und empfängerseitiger Expansion nennt man auch *Kompandierung*.

Für das PCM–System 30/32 wurde vom CCITT (*Comité Consultatif International des Télégraphique et Téléphonique*) die sogenannte *A–Kennlinie* empfohlen:

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + \ln(A \cdot x)}{1 + \ln A} & \text{für} \quad \dfrac{1}{A} \le x \le 1 \ , \\[2ex] \dfrac{A \cdot x}{1 + \ln A} & \text{für} \quad -\dfrac{1}{A} \le x \le \dfrac{1}{A} \ , \\[2ex] -\dfrac{1 + \ln(-A \cdot x)}{1 + \ln A} & \text{für} \quad -1 \le x \le -\dfrac{1}{A} \ . \end{cases} \qquad (12.9)$$

Hierbei ist $x = q_A(\nu \cdot T_A)/Q_{max}$ und $y = q_K(\nu \cdot T_A)/Q_{max}$ zu setzen. Diese Kennlinie mit dem in der Praxis eingeführten Wert $A = 87.56$ hat eine sich ständig ändernde Steigung.

a) Gehen Sie wieder vom Mustersignal 1 aus. Stellen Sie die Quantisierungsstufenzahl $M = 2^8$ ($Q_{max} = 1$) und die ungleichmäßige Quantisierung gemäß der A–Kennlinie ($A = 87.56$) ein. Betrachten Sie die vom Programm angezeigten Quantisierungskennlinien (Menüpunkt "Q"). Welche Bedeutung haben die einzelnen Kennlinien?

   $q_K = f(q_A)$:

   $q_Q = f(q_K)$:

   $q_Q = f(q_A)$:

   $v_Q = f(v_E)$:

   $v_Q = f(q_A)$:

b) Welche Verfälschungen ergeben sich bei gleichmäßiger Quantisierung, welche bei ungleichmäßiger Quantisierung (Kompandierung) gemäß der A–Kennlinie? Tragen Sie die Ergebnisse in die erste Zeile der unteren Tabelle ein und bewerten Sie diese.

	Quantisierungskennlinie		
	gleichmäßig	mit $A = 87.56$	mit 13–Segmente
Mustersignal 1 (MS1)	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} =$ $10 \cdot \lg(\varrho_v) =$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} =$ $10 \cdot \lg(\varrho_v) =$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} =$ $10 \cdot \lg(\varrho_v) =$
$0.1 \cdot$ MS1	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} =$ $10 \cdot \lg(\varrho_v) =$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} =$ $10 \cdot \lg(\varrho_v) =$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} =$ $10 \cdot \lg(\varrho_v) =$
$0.9 + 0.1 \cdot$ MS1	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} =$ $10 \cdot \lg(\varrho_v) =$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} =$ $10 \cdot \lg(\varrho_v) =$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} =$ $10 \cdot \lg(\varrho_v) =$

c) Betrachten Sie nun ein gegenüber Punkt b) um den Faktor 10 kleineres Nachrichtensignal ($A_0 = 0.010$, $C_1 = 0.026$, $C_2 = 0.054$, $C_3 = 0.030$, $C_4 = 0.014$, Phase gegenüber dem Mustersignal 1 unverändert): $q_{\max} = 0.1$. Welche Verfälschungen ergeben sich nun bei gleichmäßiger bzw. ungleichmäßiger Quantisierung? Tragen Sie Ihre Ergebnisse in die zweite Zeile obiger Tabelle ein und bewerten Sie diese.

d) Überlagern Sie nun dem Signal nach Punkt c) noch einen zusätzlichen Gleichanteil von 0.9 ($A_0 = 0.910$, $C_1 = 0.026$, $C_2 = 0.054$, $C_3 = 0.030$, $C_4 = 0.014$), so daß wieder $q_{\max} = 1$ gilt. Welche Ergebnisse liefern hier die gleichmäßige bzw. die ungleichmäßige Quantisierung? Wie ist dieses Ergebnis zu interpretieren?

Die A–Kennlinie hat eine sich ständig ändernde Steigung, wodurch alle Quantisierungsintervalle unterschiedliche Größe haben. Als Konsequenz werden somit zur anschließenden Codierung, und auch zur Decodierung, 2^{N-1} Vergleichsnormale benötigt, was für größere N technisch schwer zu realisieren ist.

Dieser Nachteil ist bei der sogenannten 13–Segment–Kennlinie nicht mehr gegeben. Für $|x| \le 1/64$ ist diese Kennlinie identisch mit der A–Kennlinie. Für $|x| > 1/64$ ergeben sich mit $k = 1, ..., 6$ folgende weitere 12 Bereiche der Kompressorkennlinie:

$$y(x) = \begin{cases} 2^{4-k} \cdot x + \dfrac{k}{8} & \text{für} \quad 2^{k-7} \le x \le 2^{k-6}\,, \\[2ex] 2^{4-k} \cdot x - \dfrac{k}{8} & \text{für} \quad -2^{k-6} \le x \le -2^{k-7}\,. \end{cases} \tag{12.10}$$

Die Steigungen und damit auch die Größe der Quantisierungsintervalle sind jetzt innerhalb eines Segmentes gleich und verhalten sich bei benachbarten Abschnitten wie 2:1.

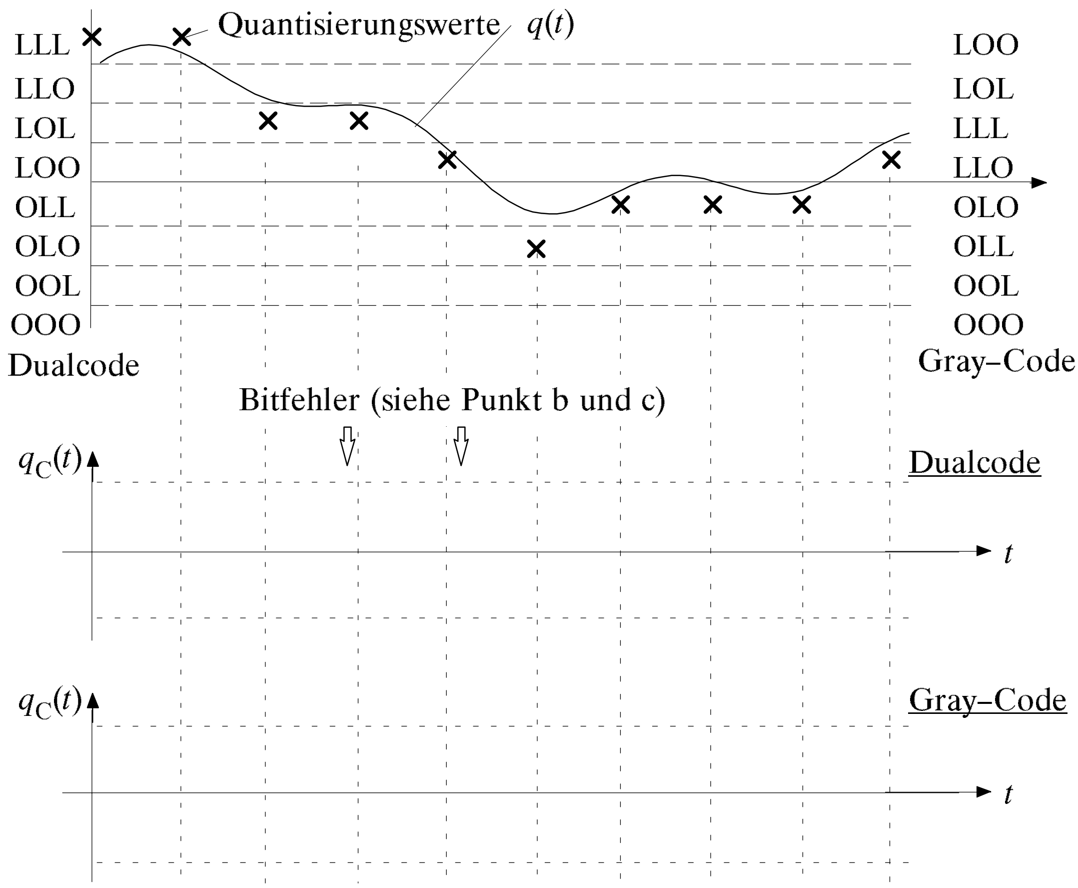
e) Die Stufenzahl sei weiterhin $M = 2^8$. Verwenden Sie nun die ungleichmäßige Quantisierung mit der 13–Segment–Kennlinie. Welcher prinzipielle Unterschied ist an den Kennlinien $q_K = f(q_A)$ und $v_Q = f(q_A)$ gegenüber Punkt b) festzustellen?

f) Wiederholen Sie nun die Versuche b) bis d) mit der 13–Segment–Kennlinie? Tragen Sie Ihre Ergebnisse in die Tabelle bei Punkt b) ein und bewerten Sie diese.

D12.5: Nun wird die PCM–Codierung/–Decodierung sowie der Einfluß von Bitfehlern untersucht. Gehen Sie vom *Standardsystem B* aus. Eingestellt ist damit das Mustersignal 1 sowie gleichmäßige Quantisierung (mit $M = 2^8$), und die Umsetzung der quantisierten Abtastwerte $q_Q(\nu \cdot T_A)$ in das Binärsignal $q_C(t)$ erfolgt gemäß dem Dualcode. Diese Zuordnung ist für $M = 8$ ($N = 3$) in der Skizze auf der nächsten Seite (links) veranschaulicht.

In der Skizze rechts ist zusätzlich die Zuordnung des Gray–Codes, ebenfalls für $M = 8$ ($N = 3$), angegeben. Dieser ist so konstruiert, daß sich benachbarte Quantisierungswerte genau um ein Bit unterscheiden. Mit Ausnahme einer Verfälschung des ersten Bits wirkt sich somit jeder Übertragungsfehler im Mittel weniger stark aus als beim Dualcode.

a) Skizzieren Sie für die eingezeichneten Quantisierungswerte das codierte Signal $q_C(t)$ bei Dual– bzw. Gray–Codierung.



b) Betrachten Sie die Dualcodierung. Welche Werte würden für $v_Q(3 \cdot T_A)$ und $v_Q(5 \cdot T_A)$ nach der Decodierung ausgegeben, wenn bei der Übertragung des 3. Quantisierungswertes das letzte Bit (*LSB*, ***L**east **S**ignificant **B**it*) und bei der Übertragung des 5. Quantisierungswertes das erste Bit (*MSB*, ***M**ost **S**ignificant **B**it*) verfälscht wurde?

c) Welche Auswirkungen haben obige Fehler dagegen bei der Gray–Codierung?

d) Betrachten Sie nun mit dem Programm *"pcm"* die Signale vor und nach dem PCM–Coder ($M = 2^8$) und überprüfen Sie die Dualcode–Zuordnung der quantisierten Werte zu den Bitfolgen.

e) Erzeugen Sie im Programm *"pcm"* jeweils einen Bitfehler für den Abtastwert Nr. 3. Betrachten Sie dessen Auswirkungen auf das rekonstruierte Signal? Verwenden Sie als Kriterium hierzu wieder den Sinken–Signalstörabstand $10 \cdot \lg(\varrho_v)$. Diesen können Sie z.B. im Fenster "Zeitsignalverläufe/Sinkensignal" ablesen.

	kein Bitfehler	ein Bitfehler (LSB)	ein Bitfehler (3. Bit)	ein Bitfehler (MSB)
$10 \cdot \lg\ (\varrho_v)$				

Für den Gray–Code gilt die folgende Konstruktionsregel: Ausgangspunkt für $N = 1$ sind die beiden Symbole "O" und "L". Beim Übergang von N auf $N+1$ wird der "Kern" übernommen und darunter noch einmal in umgekehrter Reihenfolge geschrieben. Der obere Block wird dann vorne mit "O", der untere mit "L" ergänzt:

$N = 1$:

Nr. 0: O
Nr. 1: L

$N = 2$:

Nr. 0: OO
Nr. 1: OL

Nr. 2: LL
Nr. 3: LO

$N = 3$:

Nr. 0: OOO
Nr. 1: OOL
Nr. 2: OLL
Nr. 3: OLO

wie $N = 2$

Nr. 4: LLO
Nr. 5: LLL
Nr. 6: LOL
Nr. 7: LOO

wie $N = 2$, aber von unten nach oben

f) Wie lautet der Gray–Code für $N = 4$? Überprüfen Sie Ihr Ergebnis per Programm.

g) Wiederholen Sie den Versuch von Punkt e) für den Gray–Code, wieder mit $M = 2^8$. Interpretieren Sie die unterschiedlichen Ergebnisse.

	kein Bitfehler	ein Bitfehler (LSB)	ein Bitfehler (3. Bit)	ein Bitfehler (MSB)
$10 \cdot \lg\ (\varrho_v)$				

13 Fehlerwahrscheinlichkeit

Inhalt: In diesem Kapitel werden mit der Bitfehlerwahrscheinlichkeit und der Bitfehlerquote die wichtigsten Beurteilungskriterien eines Digitalsystems definiert. Anschließend wird die Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit bei einem durch Gaußsches Rauschen gestörten binären oder mehrstufigen Digitalsignal und die Bestimmung der optimalen Schwellenwerte des Empfängers beschrieben. Für das hierzu benötigte Gaußsche Fehlerintegral werden verschiedene Näherungen angegeben.

13.1 Beurteilungskriterien eines Digitalsystems

Bild 13.1 zeigt ein sehr einfaches und deshalb auch allgemeingültiges Modell eines digitalen Übertragungssystems. Die digitale Quelle und die digitale Sinke werden durch die beiden Zufallsfolgen $\langle q_\nu \rangle$ und $\langle v_\nu \rangle$ beschrieben (vgl. Abschnitt 1.1); i.a. sind diese M–stufig. Das gesamte digitale Übertragungssystem (*Digitaler Übertragungskanal*) wird als "Black Box" betrachtet und allein durch die Fehlerfolge $\langle e_\nu \rangle$ charakterisiert. Bei fehlerfreier Übertragung ($v_\nu = q_\nu$) gilt $e_\nu = 0$, andernfalls ($v_\nu \neq q_\nu$) wird $e_\nu = 1$ gesetzt.

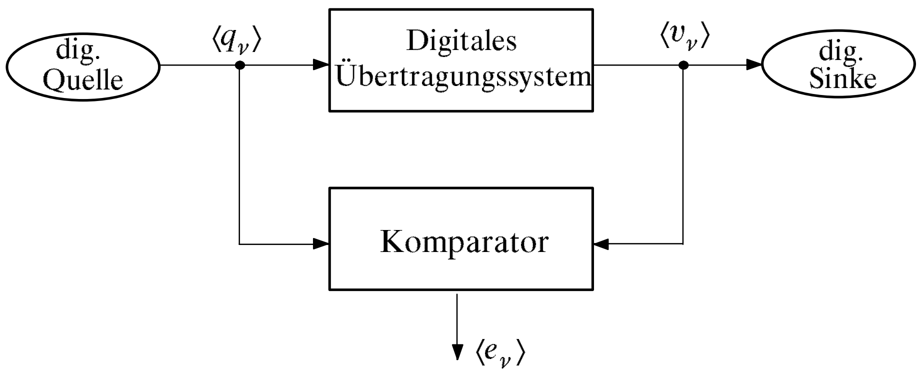


Bild 13.1: Einfachstes Modell eines digitalen Übertragungssystems.

Das wichtigste Beurteilungskriterium eines jeden digitalen Übertragungssystems ist die (mittlere) *Symbolfehlerwahrscheinlichkeit*

$$p_{\mathrm{S}} = \mathrm{E}[p(v_\nu \neq q_\nu)] = \overline{p(v_\nu \neq q_\nu)} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=1}^{N} p(v_\nu \neq q_\nu) \ . \tag{13.1}$$

Die Berechnung als Erwartungswert E[...] entspricht einer *Scharmittelung* über die Verfälschungswahrscheinlichkeit $p(v_\nu = q_\nu)$ des ν–ten Symbols, während die im rechten Teil der Gleichung verwendete überstreichende Linie eine *Zeitmittelung* kennzeichnet.

Der Begriff *Symbolfehlerwahrscheinlichkeit* wird unabhängig von der Stufenzahl M des Systems verwendet. Für den Sonderfall $M = 2$ sind die Symbolfolgen $\langle q_\nu \rangle$ und $\langle v_\nu \rangle$ binär ("O" oder "L"), und man bezeichnet die Wahrscheinlichkeit gemäß (13.1) dann auch als *Bitfehlerwahrscheinlichkeit* p_{B}. Diese Größe eignet sich z.B. gut für die Konzipierung und Optimierung noch zu planender Systeme. Dagegen muß zur meßtechnischen Erfassung der Qualität eines realisierten Digitalsystems oder bei einer Systemsimulation stets auf die *Bitfehlerquote* h_{B} (engl.: *Bit Error Rate*, BER) übergegangen werden.

Diese ist als relative Häufigkeit definiert und kann durch den Vergleich von Quellen– und Sinkensymbolfolge ermittelt werden, indem man die Anzahl $n_B^{(N)}$ der aufgetretenen Bitfehler ($v_\nu \neq q_\nu$) durch die Anzahl N der insgesamt übertragenen Bit dividiert:

$$h_B^{(N)} = \frac{n_B^{(N)}}{N} \; . \tag{13.2}$$

Der hochgestellte Index soll hier deutlich machen, daß die per Messung oder Simulation ermittelte Bitfehlerquote signifikant von N abhängt. Nach den elementaren Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung stimmt im Grenzfall $N \to \infty$ die *Aposteriori*–Kenngröße h_B mit der *Apriori*–Kenngröße p_B überein.

Bei einem realisierten oder simulierten System kann die Bitfehlerquote h_B als Schätzwert für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_B herangezogen werden, deren Genauigkeit nun in Abhängigkeit der Anzahl N der übertragenen (simulierten) Bits abgeschätzt werden soll. Dazu sind allerdings Annahmen bezüglich der Fehlerfolge $\langle e_\nu \rangle$ erforderlich.

Es gibt eine Reihe von Modellen für den Digitalen Kanal, die z.B. im gleichlauteten Versuch des Praktikums *Simulation digitaler Übertragungssysteme* behandelt werden. Sind, wie im folgenden vorausgesetzt, die Bitfehler statistisch voneinander unabhängig, so spricht man vom BSC–Modell (*Binary Symmetrical Channel*) mit nur einem Parameter $p = p(e_\nu = 1)$. Für die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit gilt in diesem Sonderfall: $p_B = p$.

Wir betrachten im weiteren die Anzahl $n_B^{(N)}$ aufgetretener Bitfehler als eine diskrete Zufallsgröße mit Symbolvorrat $\{0, 1, \ldots, N\}$. Hierbei gilt folgender Zusammenhang:

$$n_B^{(N)} = \sum_{\nu=1}^{N} e_\nu \; . \tag{13.3}$$

Der Hochindex soll wieder die starke Abhängigkeit vom Parameter N hervorheben. Unter Zugrundelegung des BSC–Modells ist diese Zufallsgröße binomialverteilt (vgl. Abschnitt 1.3). Mittelwert und Streuung einer binomialverteilten Zufallsgröße sind durch (1.17) bzw. (1.18) gegeben:

$$m_{nB}^{(N)} = N \cdot p \; , \tag{13.4}$$

$$\sigma_{nB}^{(N)} = \sqrt{N \cdot p \cdot (1-p)} \; . \tag{13.5}$$

Für Mittelwert und Streuung der abgeleiteten Größe $h_B = n_B/N$ folgt daraus:

$$m_{hB}^{(N)} = \frac{m_{nB}^{(N)}}{N} = p \; , \tag{13.6}$$

$$\sigma_{hB}^{(N)} = \frac{\sigma_{nB}^{(N)}}{N} = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{N}} \; . \tag{13.7}$$

Die erste Gleichung zeigt, daß der Erwartungswert bzw. Mittelwert der Zufallsgröße h_B (Aposteriori–Größe) tatsächlich gleich der zu erwartenden Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_B (Apriori–Größe) ist, zumindest beim Sonderfall statistisch unabhängiger Fehler.

Die Gleichung (13.7) macht deutlich, daß die Streuung $\sigma_{h\mathrm{B}}$ der Zufallsgröße h_B mit steigendem N kleiner wird und folglich – wie erwartet – auch die Meß– bzw. Simulationsgenauigkeit zunimmt.

Für $N \cdot p \gg 1$ geht die Binomialverteilung nach dem Gesetz von Moivre–Laplace in eine diskrete Gaußverteilung über, d.h. es treten folgende Wahrscheinlichkeiten auf:

$$p(h_\mathrm{B} = \frac{\mu}{N}) \approx \frac{1}{N \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{h\mathrm{B}}} \cdot \exp\Big(-\frac{(\mu/N - m_{h\mathrm{B}})^2}{2 \cdot \sigma_{h\mathrm{B}}^2}\Big) \ . \tag{13.8}$$

Diese diskrete Gaußverteilung kann durch die kontinuierliche Gauß–WDF entsprechend Abschnitt 4.4 approximiert werden (vgl. [29]):

$$f_{h\mathrm{B}}(h_\mathrm{B}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{h\mathrm{B}}} \cdot \exp\Big(-\frac{(h_\mathrm{B} - p_\mathrm{B})^2}{2 \cdot \sigma_{h\mathrm{B}}^2}\Big) \ . \tag{13.9}$$

Der Schätzwert h_B für die zu ermittelnde Bitfehlerwahrscheinlichkeit ist somit gaußverteilt um den Sollwert $m_{h\mathrm{B}} = p_\mathrm{B}$, wobei die Streuung $\sigma_{h\mathrm{B}}$ durch (13.7) gegeben ist.

Betrachten wir nun die Wahrscheinlichkeit, daß die per Simulation ermittelte Bitfehlerquote von der tatsächlichen Bitfehlerwahrscheinlichkeit betragsmäßig um weniger als einen vorgegebenen Wert $\varepsilon > 0$ abweicht. Diese kann mit der im Anhang B tabellierten Gaußschen Fehlerfunktion wie folgt berechnet werden:

$$p_\varepsilon = p(|h_\mathrm{B}^{(N)} - p_\mathrm{B}| < \varepsilon) = 1 - 2 \cdot \mathrm{Q}(\frac{\varepsilon}{\sigma_{h\mathrm{B}}}) \ . \tag{13.10}$$

Aus dieser Gleichung kann der maximal zulässige Wert von $\sigma_{h\mathrm{B}}$ berechnet werden, damit der durch Simulation ermittelte Schätzwert h_B mit einer Wahrscheinlichkeit $\geq p_\varepsilon$ noch im Intervall zwischen $p_\mathrm{B} - \varepsilon$ und $p_\mathrm{B} + \varepsilon$ liegt. Die Wahrscheinlichkeit p_ε bezeichnet man allgemein als das *Konfidenzniveau*.

Mit der aus der Umkehrfunktion zu $\mathrm{Q}(x)$ berechenbaren Größe

$$\alpha = \mathrm{Q}^{-1}(\frac{1 - p_\varepsilon}{2}) \tag{13.11}$$

erhält man aus Gl. (13.10) die Bedingung: $\sigma_{h\mathrm{B}} \leq \varepsilon/\alpha$. Unter Verwendung von (13.7) kann auch die für die gewünschte Simulationsgenauigkeit erforderliche Anzahl der simulierten Bits angegeben werden:

$$N \geq \frac{p \cdot (1 - p) \cdot \alpha^2}{\varepsilon^2} \ . \tag{13.12}$$

Soll das Konfidenzniveau $p_\varepsilon = 90\%$ betragen, so ist $\alpha = 1.65$ einzusetzen (vgl. Tabelle im Anhang B). Dagegen ergibt sich für $p_\varepsilon = 99\%$ die Konstante zu $\alpha = 3.29$.

Je größer die gewünschte Sicherheit (gekennzeichnet durch α) und je kleiner die zulässige Abweichung ε, um so mehr unabhängige Zufallsgrößen müssen berücksichtigt werden. Der erforderliche Wert von N hängt aber auch von der zu erwartenden Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_B ab. In der Vorbereitungsfrage V13.3 werden die hier angegebenen Abhängigkeiten an einigen charakteristischen Zahlenwerten verdeutlicht und eine Faustformel für die Anzahl der erforderlichen Zufallsgrößen abgeleitet.

13.2 Fehlerwahrscheinlichkeit bei Gaußschem Rauschen

Nun wird der Einfluß von Störungen auf die Qualität (Fehlerwahrscheinlichkeit) der Digitalsignalübertragung untersucht. Dazu betrachten wir das Detektionssignal $d(t)$ im Modell von Bild 13.2, das sich additiv aus einem digitalen, M–stufigen Nutzanteil $d_S(t)$ und einem Rauschanteil $d_N(t)$ zusammensetzt. Über die Entstehung dieses Signals werden vorerst keine Aussagen gemacht.

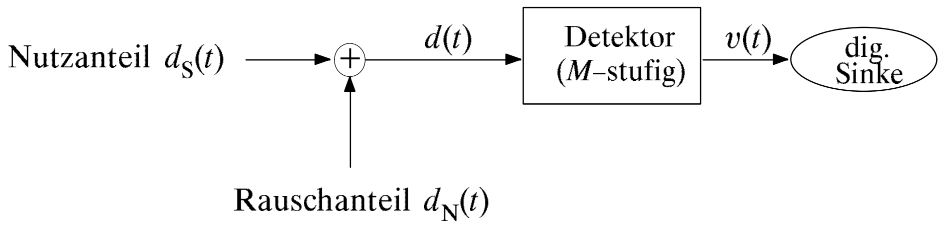


Bild 13.2: Detektion eines durch Gaußsches Rauschen gestörten Digitalsignals.

Wir setzen für das Folgende voraus, daß der stochastische Signalanteil $d_N(t)$ stationär sei, so daß seine WDF $f_{dN}(d_N)$ zeitunabhängig ist. In vielen Fällen kann dieser Anteil zudem als mittelwertfrei, signalunabhängig und gaußverteilt angenommen werden. Damit ist die Streuung σ_d der einzige Parameter des Rauschprozesses, und es gilt:

$$f_{dN}(d_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_d} \; e^{-d_N^2/(2\sigma_d^2)} \; . \tag{13.13}$$

Alle Eigenschaften des Rauschanteils $d_N(t)$ sind in Abschnitt 4.3 beschrieben. Bild 13.3 zeigt einen beispielhaften Ausschnitt des Signalverlaufs $d(t)$ für die Stufenzahl $M = 2$.

Das Detektionssignal $d(t)$ wird anschließend einer (M–stufigen) Schwellenwertentscheidung unterzogen, so daß das Sinkensignal $v(t)$ die gleiche Stufenzahl M wie das gesendete Nutzsignal $s(t)$ aufweist. Die Funktion des Detektors ist ähnlich der eines Quantisierers (vgl. Kapitel 12), doch ist das Eingangssignal hier verrauscht.

Bei einem digitalen Übertragungssystem bewirkt der stochastische Signalanteil $d_N(t)$ fehlerhafte Entscheidungen, so daß die (mittlere) Symbolfehlerwahrscheinlichkeit p_S endlich ist. Sind die gesendeten Symbole statistisch voneinander unabhängig, so gilt mit der Stufenzahl M und den Auftrittswahrscheinlichkeiten p_i der einzelnen Symbole:

$$p_S = \sum_{i=1}^{M} p_i \cdot p_{Si} \; . \tag{13.14}$$

Diese Wahrscheinlichkeit wird hier als Scharmittelwert berechnet. p_{Si} bezeichnet die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß das i–te Symbol des Symbolvorrats aufgrund des Rauschens und der anschließenden Entscheidung in ein anderes Symbol verfälscht wird.

Gleichung (13.14) wird nun für den Sonderfall $M = 2$ interpretiert. Die möglichen Amplitudenstufen des rechteckförmigen Nutzsignals seien $\pm s_0$ (man spricht dann von *binärer bipolarer Übertragung*), so daß für dessen WDF entsprechend Kapitel 4 gilt:

$$f_{dS}(d_S) = p(d_S = -s_0) \cdot \delta(d_S + s_0) + p(d_S = +s_0) \cdot \delta(d_S - s_0) \; . \tag{13.15}$$

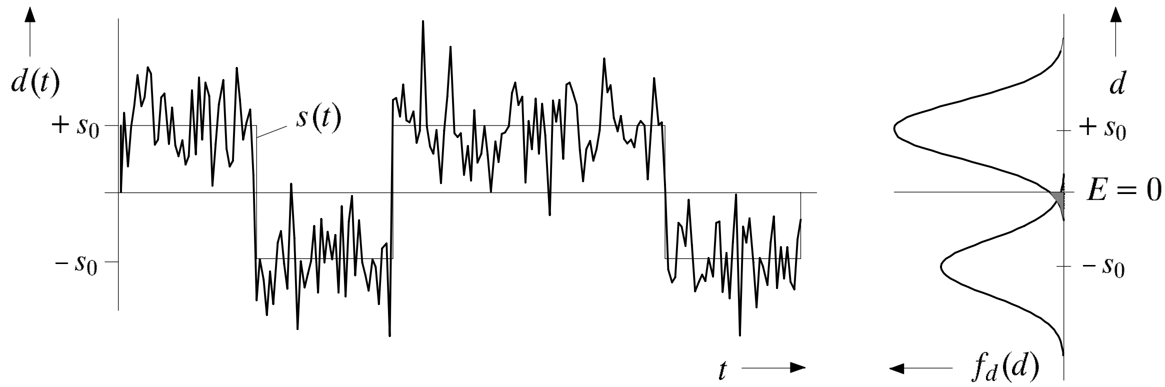


Bild 13.3: Detektionssignal $d(t) = d_S(t) + d_N(t)$ eines durch Gaußsches Rauschen (mit $\sigma_d = s_0/2$) gestörten Binärsignals, und zugehörige WDF $f_d(d)$.

Sind Nutz- und Störanteil statistisch voneinander unabhängig, was bei sehr vielen Anwendungen zutrifft, so ergibt sich für die WDF des gesamten Detektionssignals $d(t)$:

$$f_d(d) = f_{dS}(d) * f_{dN}(d) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{dS}(d_S) \cdot f_{dN}(d - d_S)\, \mathrm{d}d_S \; . \tag{13.16}$$

Die Gleichung gilt allgemein für die WDF der Summe unabhängiger Zufallsgrößen (vgl. [24]). Berücksichtigt man, daß die Faltungsoperation einer gegenüber dem Nullpunkt verschobenen Diracfunktion $\delta(x - x_0)$ mit einer beliebigen Funktion $f(x)$ das Ergebnis $f(x - x_0)$ liefert, so folgt mit den Abkürzungen $p_1 = p(d_S = -s_0)$ und $p_2 = p(d_S = +s_0)$ für die WDF des Detektionssignals:

$$f_d(d) = \frac{p_1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_d} \cdot \exp\Big(-\frac{(d + s_0)^2}{2 \cdot \sigma_d^2}\Big) + \frac{p_2}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_d} \cdot \exp\Big(-\frac{(d - s_0)^2}{2 \cdot \sigma_d^2}\Big) \; . \tag{13.17}$$

In Bild 13.3 ist rechts das Ergebnis der Faltungsoperation (13.17) dargestellt, wobei die resultierende WDF $f_d(d)$ gleich der Summe der beiden gewichteten und um $+s_0$ bzw. $-s_0$ verschobenen Gaußfunktionen ist. Für diese Darstellung ist vorausgesetzt, daß das Binärsignal den Amplitudenwert $+s_0$ mit größerer Wahrscheinlichkeit annimmt als $-s_0$.

Wird das Signal $d(t)$ einem Schwellenwertentscheider mit der Entscheiderschwelle $E = 0$ zugeführt, so erhält man für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit:

$$p_B = p_1 \cdot p_{S1} + p_2 \cdot p_{S2} = p_1 \cdot p\big(d_N(T_D) > +s_0\big) + p_2 \cdot p\big(d_N(T_D) < -s_0\big) \; . \tag{13.18}$$

Hierbei ist berücksichtigt, daß beim Binärsystem die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit p_S identisch mit der Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_B ist.

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Rauschanteil $d_N(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t, z.B. zum Detektionszeitpunkt T_D, den Wert s_0 überschreitet, berechnet sich mit (4.2) und dem *komplementären Gaußschen Fehlerintegral* Q(x) gemäß (4.40) wie folgt:

$$p\big(d_N(T_D) > s_0\big) = \int_{s_0}^{+\infty} f_{dN}(d_N)\, \mathrm{d}d_N = \mathrm{Q}\Big(\frac{s_0}{\sigma_d}\Big). \tag{13.19}$$

Die linke Gleichung gilt dabei allgemein, die rechte nur bei Gaußschen Störungen.

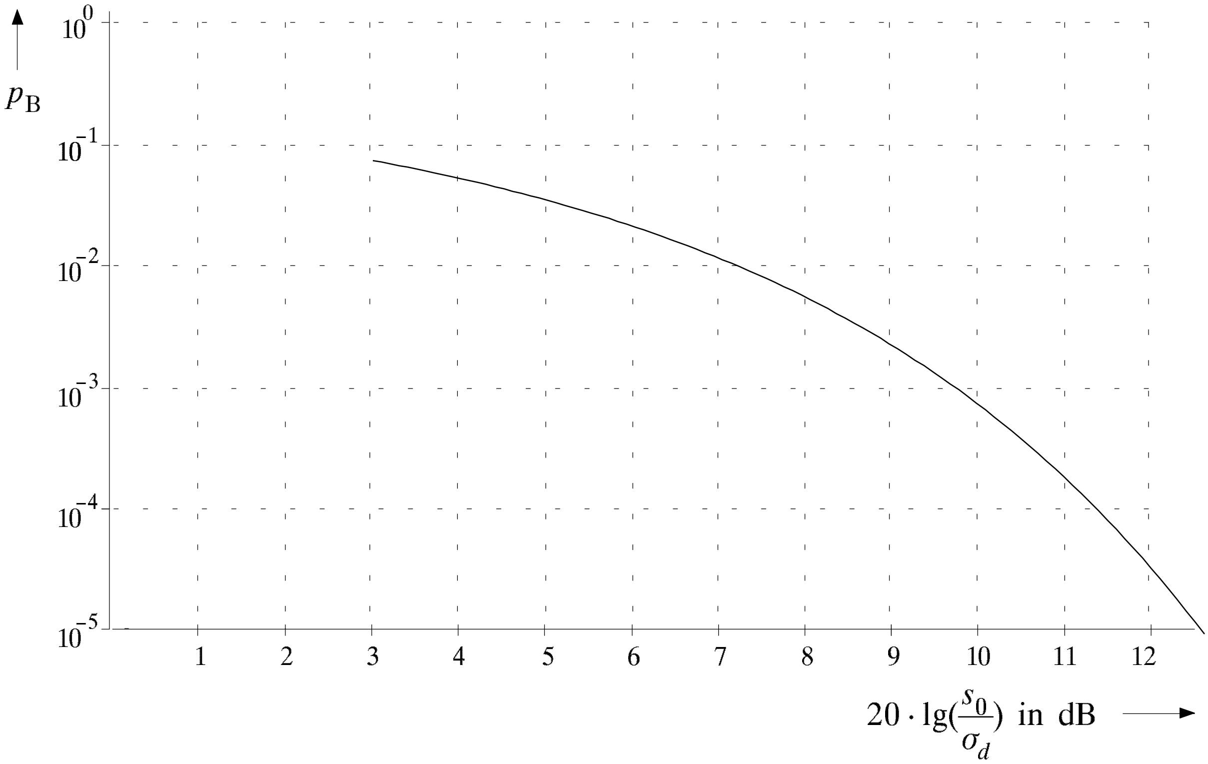


Bild 13.4: Bitfehlerwahrscheinlichkeit entsprechend der Q–Funktion.

Für die Unterschreitungswahrscheinlichkeit erhält man aufgrund der Symmetrie der WDF den gleichen Wert (hierbei ist die Beziehung $Q(-x) = 1 - Q(x)$ berücksichtigt):

$$p(d_N(T_D) < -s_0) = \int_{-\infty}^{-s_0} f_{dN}(d_N)\, dd_N = \phi(\frac{-s_0}{\sigma_d}) = Q(\frac{s_0}{\sigma_d}). \tag{13.20}$$

Setzt man diese Ergebnisse in (13.18) ein, so ergibt sich für die (mittlere) Bitfehlerwahrscheinlichkeit eines durch Gaußsches Rauschen gestörten bipolaren Binärsignals

$$p_B = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right), \tag{13.21}$$

und zwar unabhängig von den Auftrittswahrscheinlichkeiten p_1 bzw. p_2. Dieser Verlauf ist in Bild 13.4 doppelt–logarithmisch dargestellt.

Das Fehlerintegral $Q(x)$ wurde in Gl. (4.40) als bestimmtes Integral definiert; es kann analytisch nicht gelöst werden. Im Anhang B sind die Zahlenwerte der für Fehlerwahrscheinlichkeitsberechnungen äußerst wichtigen Fehlerfunktion tabellarisch angegeben. Nachfolgend finden Sie die C–Implementierung einer auf einer Reihenentwicklung basierenden $Q(x)$–Näherung (für $x > 1$ ist der relative Fehler kleiner $4 \cdot 10^{-3}$):

```
# include <math.h>
  double Q(double x)
  { double zwei_pi=6.283185307,v,sum;
      v = 1.0/(x*x);
      sum = v/(1.0+8.0*v/(1.0+9.0*v/(1.0+10*v/(1.0+11.0*v/(1.0+12.0*v)))));
      sum = v/(1.0+3.0*v/(1.0+4.0*v/(1.0+5*v/(1.0+6.0*v/(1.0+7.0*sum)))));
      sum = exp(-0.5*x*x)/(sqrt(zweipi)*x*(1.0+v/(1.0+2.0*sum)));
      return (sum);
  }
```

13.3 Optimaler Binärempfänger

Es gelten weiterhin die Voraussetzungen von Abschnitt 13.2. Das binäre Sendesignal $s(t)$ sei bipolar ($\pm s_0$) und rechteckförmig (vgl. Bild 13.3), der Kanal dämpfungs– sowie verzerrungsfrei. Das Gaußsche Rauschsignal $n(t)$ stellt somit nach wie vor die einzige Beeinträchtigung des Digitalsignals dar. Einen solchen Kanal mit $H_K(f) = 1$ und additivem Rauschterm $n(t)$ nennt man AWGN–Kanal (*Additive White Gaussian Noise*).

Für das Gaußsche Störsignal $n(t)$ wird nun weißes Rauschen mit der (zweiseitigen) Rauschleistungsdichte $\Phi_n(f) = N_0/2$ zugrunde gelegt. Ein solcher Rauschprozeß besitzt einen unendlich großen Effektivwert, d.h. es gilt: $\sigma_n \to \infty$. Ohne geeignete Maßnahme am Empfänger ergibt sich gemäß (13.21) so die Bitfehlerwahrscheinlichkeit zu $p_B = 1/2$.

Um die Rauschleistung vor dem Schwellenwertentscheider zu begrenzen, ist deshalb am Empfängereingang ein Filter erforderlich (vgl. Bild 13.5). Das Eingangssignal dieses Filters sei $r(t)$, das Ausgangssignal wird mit $d(t)$ bezeichnet. Dieses setzt sich additiv aus dem Nutzanteil $d_S(t)$ und dem Störanteil $d_N(t)$ zusammen:

$$d(t) = d_S(t) + d_N(t) \ . \tag{13.22}$$

Der erste Anteil rührt von $s(t)$ her, der zweite ist auf $n(t)$ zurückzuführen.

Das beste Ergebnis hinsichtlich des erreichbaren Signalrauschverhältnisses liefert das an einen rechteckförmigen Sendeimpuls $g_s(t)$ der Amplitude s_0 und der Symboldauer T angepaßte Matched–Filter (vgl. Abschnitt 11.1) mit dem Frequenzgang

$$H_{MF}(f) = \mathrm{si}(\pi \cdot f \cdot T). \tag{13.23}$$

Damit gilt für die dazugehörige (akausale) Impulsantwort $h_{MF}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ H_{MF}(f)$:

$$h_{MF}(t) = \begin{cases} 1/T & \text{für } |t| \le T/2 \ , \\ 0 & \text{sonst} \ . \end{cases} \tag{13.24}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß der Schwellenwertentscheider zum Detektionszeitpunkt $T_D = 0$ entscheidet. Gleichung (13.24) bedeutet: Die optimale Impulsantwort des Filters ist formgleich mit dem rechteckförmigen Sendegrundimpuls; sie kann z.B. mit Hilfe eines Integrators (über eine Symboldauer T) realisiert werden.

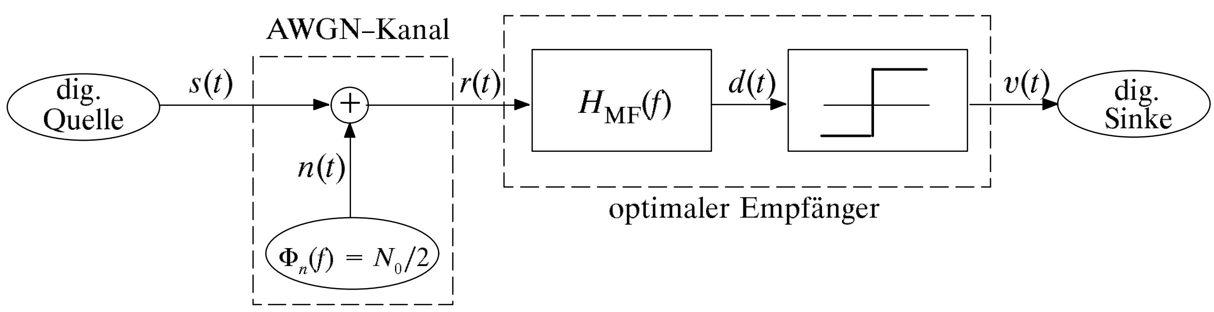


Bild 13.5: Optimaler Binärempfänger bei Rechteck–Sendeimpulsen und AWGN–Kanal, bestehend aus Matched–Filter und Schwellenwertentscheider.

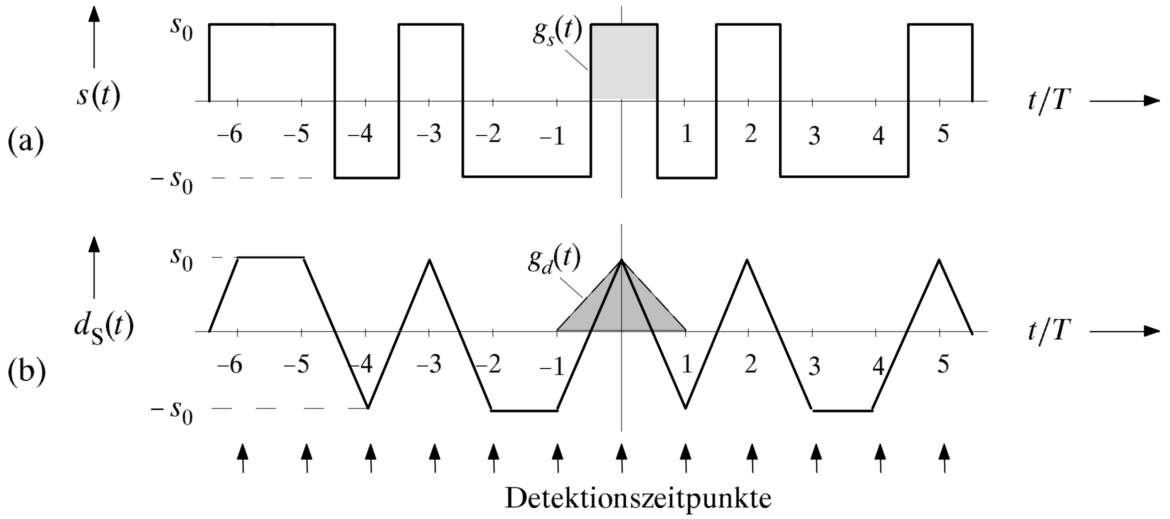


Bild 13.6: Ausschnitte aus dem Sendesignal (a) und dem Detektionsnutzsignal (b) beim optimalen Binärsystem (Störungen sind hier nicht berücksichtigt: $n(t) = 0$).

Wird ein einzelner Rechtecksendeimpuls $g_s(t)$ mit Symboldauer T und Amplitude s_0 gesendet und ist das Rauschen vernachlässigbar, so ist das am Schwellenwertentscheider anliegende Signal ein Dreieckimpuls $g_d(t)$ mit gleicher Amplitude s_0, aber nun mit der absoluten Dauer $2 \cdot T$. In Bild 13.6 sind die Grundimpulse $g_s(t)$ und $g_d(t)$ grau dargestellt.

Die durchgezogene Kurve in Bild 13.6(b) zeigt einen Ausschnitt des Detektionsnutzsignals $d_S(t)$ für das oben dargestellte rechteckförmige Sendesignal $s(t)$; dieses setzt sich aus Geradenstücken zusammen. Zu allen Detektionszeitpunkten gilt: $d_S(\nu T) = \pm s_0$. Nach Abschnitt 13.2 kann somit für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit geschrieben werden:

$$p_B = Q\Big(\frac{g_d(0)}{\sigma_d}\Big). \tag{13.25}$$

Hierbei bezeichnet σ_d den Effektivwert des Detektionsstörsignals $d_N(t)$; das Quadrat ist die *Detektionsstörleistung*. Für diese folgt aus (13.23):

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{MF}(f)|^2 \, df = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{si}^2(\pi f T) \, df = \frac{N_0}{2T} . \tag{13.26}$$

Setzt man dieses Ergebnis in (13.25) ein, so erhält man:

$$p_B = Q\Big(\sqrt{\frac{2 \cdot s_0^2 \cdot T}{N_0}}\Big) = Q\Big(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\Big) . \tag{13.27}$$

Hierbei bezeichnet $E_B = s_0{}^2 \cdot T$ die Energie des NRZ–Rechtecksendeimpulses (*Energie pro Bit*). Diese für die gesamte digitale Übertragungstechnik wichtige Gleichung gilt für ein bipolares binäres Basisbandsystem mit AWGN–Kanal, Matched–Filter und optimaler Entscheiderschwelle. Der Einfluß einer Schwellendrift wird in Vorbereitungsfrage V13.1 behandelt, andere Voraussetzungen bezüglich Sender, Kanal und Empfängerkonzept in nachfolgenden Kapiteln. Die linke Gleichung in (13.27) ist nur bei rechteckförmigen Sendeimpulsen anwendbar. Dagegen gilt die rechte Gleichung auch für eine andere Impulsform, wenn auch ein entsprechend anderes Matched–Filter berücksichtigt wird.

13.4 Vorbereitungsfragen

V13.1: Es gelten die Voraussetzungen von Abschnitt 13.2, d.h. es wird die Übertragung eines Binärsignals (Symboldauer T) mit gleichwahrscheinlichen Amplitudenwerten $\pm s_0$ über den AWGN–Kanal, gekennzeichnet durch die Rauschleistungsdichte N_0, betrachtet. Es gelte $s_0 = 2\,\mathrm{V}$ und $N_0 = 10^{-6}\,\mathrm{V^2/Hz}$. Die Bitrate betrage 2 Mbit/s.

a) Wie groß ist die Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_B, wenn der Schwellenwert $E=0$ vorausgesetzt wird? Welcher Wert ergibt sich für die "Energie pro Bit"?

b) In der Literatur wird anstelle von $\mathrm{Q}(x)$ häufig auch die vergleichbare Funktion

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{x}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \tag{13.28}$$

verwendet. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\mathrm{Q}(x)$ und $\mathrm{erfc}(x)$?

c) Geben Sie p_B auch in der Form von Gl. (13.25) an. Wie groß ist σ_d?

d) Kann unter der Voraussetzung, daß die Symbolwahrscheinlichkeiten $p_1 = p(s = -s_0)$ und $p_2 = p(s = +s_0)$ gleich seien, durch einen anderen Schwellenwert als $E = 0$ eine kleinere Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_B erreicht werden?

Für das Folgende seien die Auftrittswahrscheinlichkeiten der beiden Symbole unterschiedlich: $p_1 = p(s = -s_0) = 0.31$ und $p_2 = p(s = +s_0) = 0.69$. Außerdem soll nun der Schwellenwert E ein frei wählbarer Parameter sein.

e) Geben Sie für diesen Fall den allgemeinen Ausdruck für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit $p_\mathrm{B} = p_\mathrm{S}$ gemäß (13.14) in Abhängigkeit aller Parameter (p_1, p_2, σ_d, E) an.

f) Zeigen Sie durch Nullsetzen der Ableitung $\mathrm{d}p_\mathrm{B}/\mathrm{d}E$, daß man für den optimalen Schwellenwert folgende Beziehung erhält:

$$E_\mathrm{opt} = \frac{\sigma_d^2}{2 \cdot s_0} \cdot \ln \frac{p(s = -s_0)}{p(s = +s_0)} \quad . \tag{13.29}$$

Hinweis: Für die Ableitung der Q–Funktion gilt:

$$\frac{\mathrm{dQ}(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-x^2/2} \quad . \tag{13.30}$$

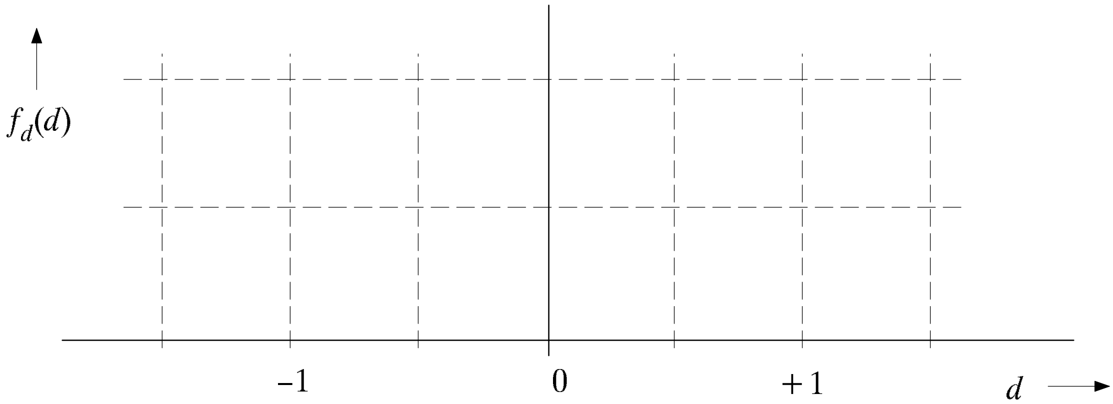
Dieses Ergebnis ist einsichtig, da $\mathrm{Q}(x)$ das (bestimmte) Integral über die Gaußsche WDF ist. Die Ableitung $\mathrm{dQ}(x)/\mathrm{d}x$ liefert dann natürlich wieder diese Funktion. Das Vorzeichen ergibt sich aus dem monoton fallenden Funktionsverlauf.

g) Welchen Wert erhält man mit den oben angegebenen Auftrittswahrscheinlichkeiten und σ_d gemäß Punkt c) für den optimalen Schwellenwert? Interpretation.

h) Welcher Wert ergibt sich damit für die minimale Bitfehlerwahrscheinlichkeit $p_\mathrm{B,min}$?

V13.2: Ein Ternärsignal $s(t)$ mit den (normierten) Amplitudenstufen -1, 0, $+1$ und den Auftrittswahrscheinlichkeiten $p(-1) = p(+1) = 0.25$ und $p(0) = 0.5$ wird durch einen Gaußschen Rauschanteil mit dem (normierten) Effektivwert $\sigma_d = 0.2$ gestört. Die beiden (normierten) Entscheiderschwellen liegen symmetrisch bei $E_1 = -0.5$ und $E_2 = +0.5$.

a) Skizzieren Sie die WDF $f_d(d)$ des Summensignals $d(t)$ in das nachfolgende Diagramm. Beschriften Sie die Ordinate und zeichnen Sie die Schwellenwerte E_1 und E_2 ein. Schraffieren Sie die für p_S charakteristischen Flächenanteile.



b) Berechnen Sie die mittlere Symbolfehlerwahrscheinlichkeit p_S dieses Ternärsignals.

c) Welche der drei Amplitudenstufe wird mit der größten Wahrscheinlichkeit gestört? Kann durch eine andere Wahl der Schwellenwerte E_1 und E_2 die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit p_S verringert werden? (Begründung)

V13.3: Diese Aufgabe behandelt die erreichbare Genauigkeit von simulierten Bitfehlerkurven (vgl. Abschnitt 13.1).

a) Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit eines Digitalsystems beträgt 10^{-4}. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_ε, daß die per Simulation über 10^6 Symbole ermittelte Bitfehlerquote zwischen $0.9 \cdot 10^{-4}$ und $1.1 \cdot 10^{-4}$ liegt?

b) Geben Sie – ausgehend von (13.12) – eine Näherung für die Anzahl N simulierter Bit an, die erforderlich ist, damit die per Simulation ermittelte Bitfehlerquote h_B betragsmäßig nicht mehr als einen Faktor ε_rel von der Fehlerwahrscheinlichkeit p_B abweicht. Das Konfidenzniveau p_ε soll wieder durch die mit (13.11) definierte Konstante α beschrieben werden.

c) Welche Konstante α ergibt sich für das Konfidenzniveau $p_\varepsilon = 95\%$?

d) Geben Sie eine Faustformel für die erforderliche Bitanzahl N an, die für eine maximale Abweichung von 10% vom Sollwert und das Konfidenzniveau $p_\varepsilon = 95\%$ gilt? Welcher Wert von N ergibt sich daraus für $p_\mathrm{B} = 10^{-4}$?

13.5 Versuchsdurchführung

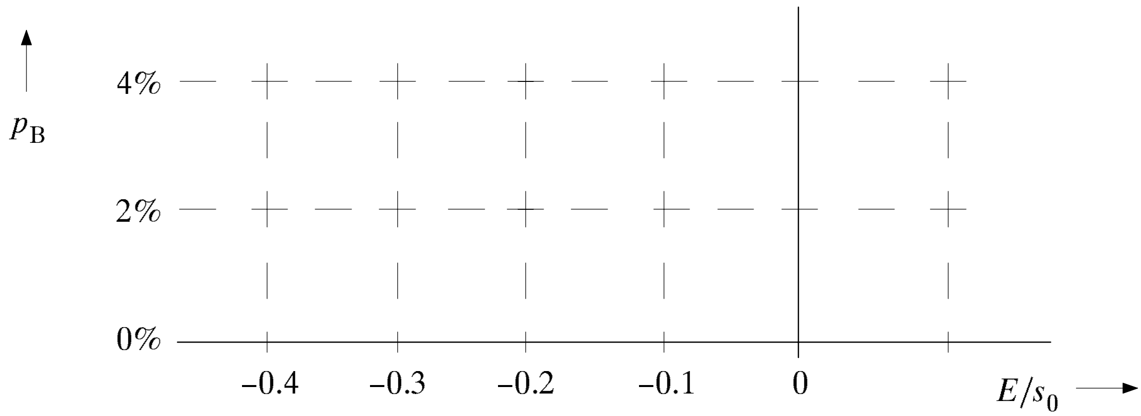
Die Aufgaben D13.1 und D13.2 sollen mit dem Programm *"fwk"* durchgeführt werden, der Versuch D13.3 mit *"dis"*.

D13.1: Überprüfen Sie zunächst mit *"fwk"* das Ergebnis der Vorbereitungsfrage V13.1. Die Auftrittswahrscheinlichkeiten seien $p_1 = p(s = -s_0) = 0.31$, $p_2 = p(s = +s_0) = 0.69$ und der Schwellenwert E ein frei wählbarer Parameter. Berücksichtigen Sie dabei, daß im Programm *"fwk"* alle Größen auf s_0 normiert sind.

a) Welchen Wert müssen Sie für die normierte Streuung σ eingeben, damit Sie mit dem Programm das gleiche Ergebnis wie in V13.1 erhalten können?

b) Untersuchen Sie die Abhängigkeit der Bitfehlerwahrscheinlichkeit $p_\mathrm{B} = p_\mathrm{S}$ von der Entscheiderschwelle E, indem Sie die Ergebnisse für $E/s_0 = -0.4, -0.3, -0.2, -0{,}1$ und 0 in das nachfolgende Diagramm eintragen.

Eingabeparameter: $M =$ $p(-1) =$ $\sigma =$



c) Stimmt der hier per Simulation ermittelte Wert für E_opt mit der Berechnung in V13.1 überein? Wo liegt allgemein der optimale Schwellenwert E_opt bei einem Binärsystem?

D13.2: Sind die Amplitudenwerte eines M–stufigen Signals gleichwahrscheinlich und liegen sie äquidistant zwischen den Werten $-s_0$ und $+s_0$, so erhält man für die mittlere Symbolfehlerwahrscheinlichkeit:

$$p_\mathrm{S} = \frac{2 \cdot (M-1)}{M} \cdot \mathrm{Q}\Big(\frac{s_0/(M-1)}{\sigma}\Big)\,. \tag{13.31}$$

Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Gleichung sind Schwellenwerte in der Mitte zwischen zwei benachbarten Amplitudenwerten.

a) Begründen Sie obige Gleichung am Beispiel der Stufenzahl $M = 4$.

b) Wie groß darf die (normierte) Streuung σ des Störsignals $n(t)$ maximal sein, damit die Fehlerwahrscheinlichkeit den Wert 10^{-3} nicht überschreitet? Berechnen Sie den Grenzwert von σ für $M=2$, $M=3$ und $M=4$ mit Hilfe der Fehlertabelle im Anhang.

c) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse von b) mit dem Programm *"fwk"*.

	σ/s_0 gemäß b)	Schwellenwerte	p_S
$M=2$		$E_1/s_0 =$	
$M=3$		$E_1/s_0 =$ $E_2/s_0 =$	
$M=4$		$E_1/s_0 =$ $E_2/s_0 =$ $E_3/s_0 =$	

d) Ermitteln Sie mit dem Programm *"fwk"* die optimalen Schwellenwerte für ein Ternärsystem mit den Auftrittswahrscheinlichkeiten $p(-1) = p(+1) = 0.25$ und $p(0) = 0.5$ sowie der Streuung $\sigma = 0.2$ (vgl. V13.2) und $\sigma = 0.5$. Welche Verbesserung ergibt sich gegenüber mittigen Schwellenwerten?

D13.3: Untersuchen Sie nun mit dem Programm *"dis"* (Menüpunkt 6) die Genauigkeit von simulierten Fehlerwahrscheinlichkeiten. Die tatsächliche Bitfehlerwahrscheinlichkeit des betrachteten Digitalsystems sei $p_{\rm B} = 10^{-3}$.

a) In jeder Versuchsreihe wird die Bitfehlerwahrscheinlichkeit $p_{\rm B}$ durch die Bitfehlerquote $h_{\rm B}$ angenähert, wobei stets $N = 100\,000$ Symbole berücksichtigt werden sollen. Wie groß sind (theoretisch) der Erwartungswert $m_{h{\rm B}}^{(N)}$ und die Streuung $\sigma_{h{\rm B}}^{(N)}$?

b) Bestimmen Sie mit dem Programm *"dis"* die simulierten Werte von $m_{h{\rm B}}^{(N)}$ und $\sigma_{h{\rm B}}^{(N)}$ durch Auswertung von 100 Versuchsreihen. Welche Minimal– und Maximalwerte ergeben sich bei diesen 100 Versuchen?

c) Berechnen Sie das Intervall, in dem 80 % der Meßwerte zu erwarten sind.

d) Welche 80 %–Schranke wird mit dem Programm durch Simulation über 100 Versuchsreihen ermittelt? Geben Sie weiterhin die 90 %– und die 95 %–Schranke an.

e) Überprüfen Sie abschließend mit dem Programm *"dis"* die in V13.3(d) abgeleitete Faustformel für die erforderliche Bitanzahl N, die für eine maximale Abweichung von 10% vom Sollwert und das Konfidenzniveau $p_\varepsilon = 95\%$ abgeleitet werden sollte. Wählen Sie für diesen Versuch $p_\mathrm{B} = 0.01$?

13.6 Übungsaufgaben

Ü13.1: Zur Berechnung des komplementären Gaußschen Fehlerintegrals $Q(x)$ kann man auch die sogenannten Fehlerfunktionen verwenden (siehe Vorbereitungsfrage V13.1):

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-u^2}\, du \quad , \tag{13.32}$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_x^{+\infty} e^{-u^2}\, du \;=\; 1 - \operatorname{erf}(x) \quad . \tag{13.33}$$

a) Schreiben Sie die Funktion "Q1*(x)*", die $Q(x)$ gemäß obigen Gleichungen mit Hilfe von "erf*(x)*" bzw. "erfc*(x)*" berechnet. Welche Funktion eignet sich für große x–Werte (d.h. für kleine Fehlerwahrscheinlchkeiten) besser? *Hinweis:* Da erf*(x)* und erfc*(x)* nicht in der verwendeten C–Bibliothek vorhanden sind, sondern anderweitig zur Verfügung gestellt werden, müssen sie in C intern als *"float"* vereinbart werden.

```
C:  #include <math.h>
    float Q1(x)
    float x;
```

```
F77:  real function Q1(x)
      real x
```

b) Schreiben Sie zum Vergleich die beiden Funktionen "Qo*(x)*" und "Qu*(x)*", die eine obere bzw. untere Schranke für $Q(x)$ darstellen:

$$Q_o(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot x}\; e^{-x^2/2} \quad , \tag{13.34}$$

$$Q_u(x) = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\sqrt{2\pi} \cdot x}\; e^{-x^2/2} \quad . \tag{13.35}$$

Berücksichtigen Sie hierbei, daß diese Gleichungen für x–Werte ≤ 0 nicht zulässig sind. Setzen Sie in diesen Fällen $Q_o(x) = Q_u(x) = 1\,000\,000$.

```
C:  float Qo(x)
      float x;
```

```
F77:  real function Qo(x)
        real x
```

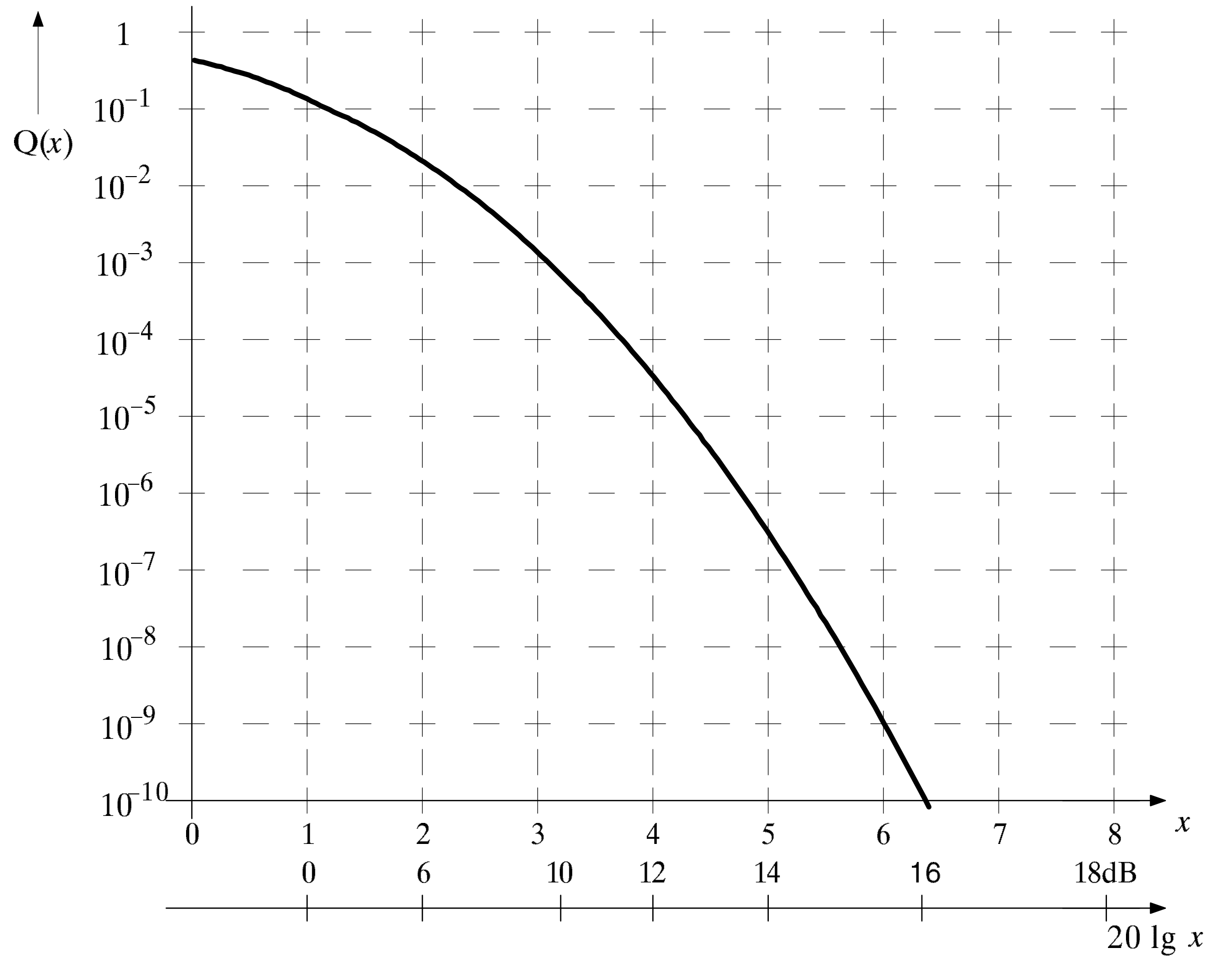
```
C:  float Qu(x)
      float x;
```

```
F77:  real function Qu(x)
        real x
```

c) Schreiben Sie ein Programm *"fwktab"*, das die Funktionen "Q1*(x)*", "Qo*(x)*" und "Qu*(x)*" aufruft und in einer Tabelle der Form "*x* Q1*(x)* Qo*(x)* Qu*(x)*" am Bildschirm ausgibt. Die Variable x soll hierbei Werte von 0 bis 10 im Abstand $\Delta x = 0.5$ annehmen. Übersetzen und binden Sie Ihr Programm mit "*mkfwktab*" bzw. "*mkfwktab –f*".

```
C: #include <stdio.h>                F77:  program fwktab
   main()
```

e) Tragen Sie die vom Programm *"fwktab"* ausgegebenen Werte in das nachfolgende Diagramm ein (nur für ganzzahlige Werte von x). Überprüfen Sie insbesondere, ob $Q_o(x)$ und $Q_u(x)$ tatsächlich Schranken für $Q(x)$ darstellen. *Hinweis:* Für die bereits eingezeichnete Kurve $Q(x)$ wurden die exakten Werte aus dem Anhang verwendet.



Ü13.2:

a) Schreiben Sie ein Programm *"fwkber"*, mit dem die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit eines Dreistufensignals in Abhängigkeit der Entscheiderschwelle berechnet und ausgegeben wird. Die Amplitudenstufen seien symmetrisch und liegen bei $-A$, 0 und $+A$. Das Programm soll diesen Amplitudenwert, den Störeffektivwert (Streuung) und die beiden Auftrittswahrscheinlichkeiten $p(-1)$ und $p(+1)$ einlesen.

Die beiden Entscheiderschwellen sollen ebenfalls symmetrisch zu 0 liegen, d.h. es gelte: $E_1 = -E$, $E_2 = +E$. Bestimmen Sie den optimalen Wert E_{opt}, indem Sie E von 0 bis A im Abstand $\Delta E = 0{,}05 \cdot A$ variieren und dabei jeweils die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit p_S berechnen und ausgeben. Am Ende soll auch die minimale Symbolfehlerwahrscheinlichkeit $p_{S,\min}$ sowie die optimale Entscheiderschwelle am Bildschirm angezeigt werden. Für das Übersetzen und Binden können Sie die Anweisung *"mkfwkber"* bzw. *"mkfwkber –f"* verwenden.

```
C:  #include <stdio.h>                F77:  program fwkber
    main()
```

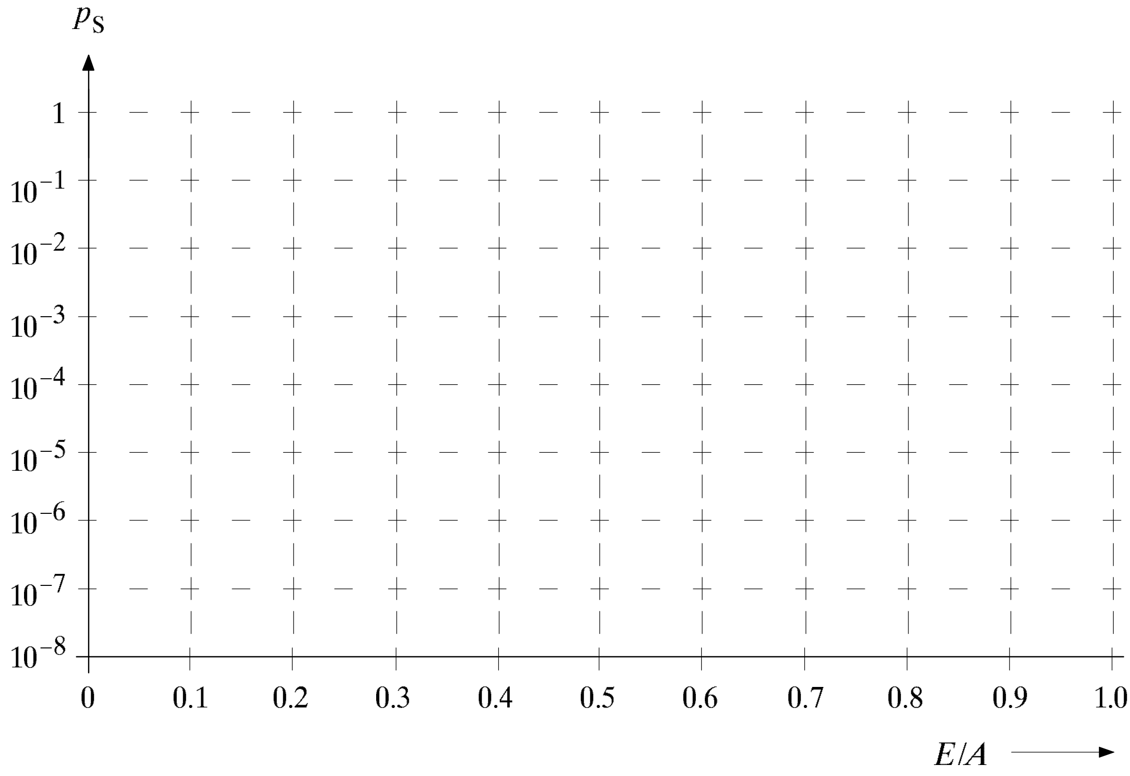
b) Überprüfen Sie Ihr Programm *"fwkber"* anhand der Ergebnisse des Programms *"fwk"* für folgenden Parametersatz:

$$A = 1, \quad \sigma = 0.2, \quad p(-1) = p(+1) = 0.2.$$

$$p_{\rm S}\,(\,\text{"}fwkber\text{"}) \;=$$

$$p_{\rm S}\,(\,\text{"}fwk\text{"}) \;=$$

c) Tragen Sie die Verläufe der Symbolfehlerwahrscheinlichkeit $p_{\rm S}$ in Abhängigkeit des normierten Schwellenparameters E/A in das nachfolgende Diagramm ein, und zwar für die drei unterschiedlichen Streuungen $\sigma = 0.1$, $\sigma = 0.2$ und $\sigma = 0.4$. Die Symbolwahrscheinlichkeiten sollen hierbei wie unter Punkt b) gewählt werden. Interpretieren Sie die einzelnen Kurvenverläufe.



14 Digitale Basisbandübertragung

Inhalt: In diesem Kapitel werden die Komponenten eines digitalen Basisbandsystems vorgestellt. Die Bezeichnung "Basisband" bedeutet hierbei, daß das digitale Nachrichtensignal ohne vorherige Frequenzumsetzung (Modulation mit Sinusträger) übertragen wird. Außerdem werden die wichtigsten Beurteilungs– und Optimierungskriterien der digitalen Übertragungssysteme diskutiert. Hierzu gehören insbesondere das Augendiagramm sowie die mittlere und die ungünstigste ("worst case") Fehlerwahrscheinlichkeit.

14.1 Blockschaltbild eines digitalen Basisbandsystems

Bild 14.1 zeigt das allgemeine Blockschaltbild eines Basisbandsystems. Beispielhafte Signalverläufe, gültig für eine binäre bipolare Übertragung, sind in Bild 14.2 dargestellt. Im folgenden werden die Aufgaben bzw. Eigenschaften der einzelnen Systemkomponenten (Sender, Kanal und Empfänger) erläutert. Aus Vereinfachungsgründen bleiben die schaltungstechnisch bedingten Laufzeiten der einzelnen Komponenten unberücksichtigt.

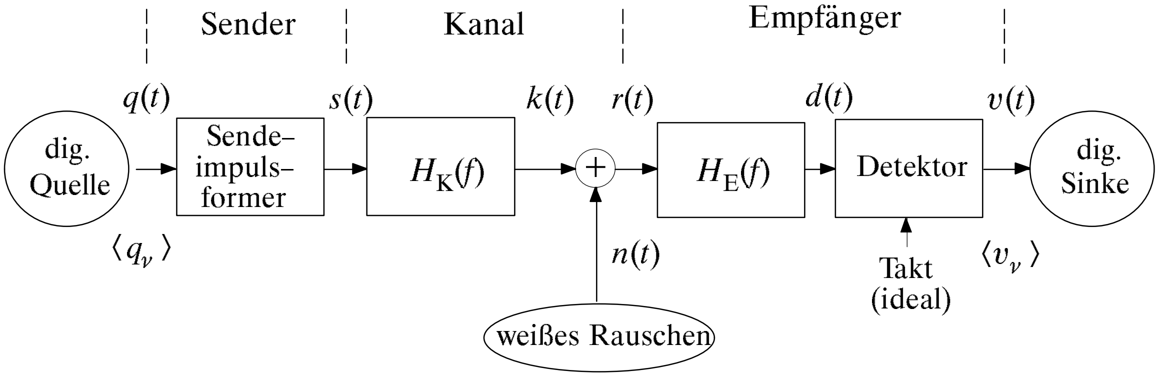


Bild 14.1: Blockschaltbild eines digitalen Basisbandübertragungssystems.

Die digitale Quelle erzeugt die Quellensymbolfolge $\langle q_\nu \rangle$, die möglichst fehlerfrei zur Nachrichtensinke übertragen werden soll. Die physikalische Repräsentation der Quellensymbolfolge ist das Quellensignal $q(t)$. Im folgenden wird die digitale Quelle als binär (d.h.: die Stufenzahl ist $M=2$) und redundanzfrei vorausgesetzt. Das bedeutet, daß die beiden möglichen Symbole "O" und "L" gleichwahrscheinlich sind und statistisch unabhängig voneinander auftreten. Mit der Bitdauer T_B eines binären Nachrichtensymbols ergibt sich für die *Bitrate* des hier betrachteten Übertragungssystems: $R_\mathrm{B} = 1/T_\mathrm{B}$.

Das Quellensignal $q(t)$ muß vor der Übertragung an die spektralen Eigenschaften des Übertragungsmediums und der Empfangseinrichtungen angepaßt werden. Hierzu dient der Sender, der im allgemeinen aus einem Coder und einem Sendeimpulsformer besteht. Das Ausgangssignal des Senders ist das Sendesignal $s(t)$, das mit dem Sendegrundimpuls $g_s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ G_s(f)$, den dimensionslosen Amplitudenkoeffizienten a_ν und der Symboldauer T (bei Binärübertragung gilt $T = T_\mathrm{B}$) in folgender Weise geschrieben werden kann:

$$s(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot g_s(t - \nu \cdot T) \ . \tag{14.1}$$

Mit dem Sendeimpulsformer kann die Rechteckform der Impulse beispielsweise in einen Dreieck–, Gauß– oder Cosinusquadratimpuls gewandelt werden, wodurch das Leistungsdichtespektrum des Sendesignals beeinflußt wird. Eine zweite Möglichkeit zur spektralen Anpassung des Sendesignals an den Übertragungskanal bietet die sogenannte Übertragungscodierung. Ein solcher Coder löst diese Aufgabe auf Symbolebene und ist i.a. eine nichtlineare Schaltungseinrichtung. Auf die Aufgaben und Einflüsse der Übertragungscodes wird im Kapitel 15 noch ausführlich eingegangen.

Für das Folgende wird die binäre redundanzfreie Übertragung mit rechteckförmigen NRZ–Sendeimpulsen (Amplitude s_0, Dauer T) betrachtet. Somit lautet das Spektrum von $g_s(t)$: $G_s(f) = s_0 \cdot T \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot f \cdot T)$. Bei einem unipolaren System sind die Amplitudenkoeffizienten $a_\nu \in \{0,\ 1\}$. Dagegen gilt bei bipolarer Übertragung: $a_\nu \in \{-1, +1\}$.

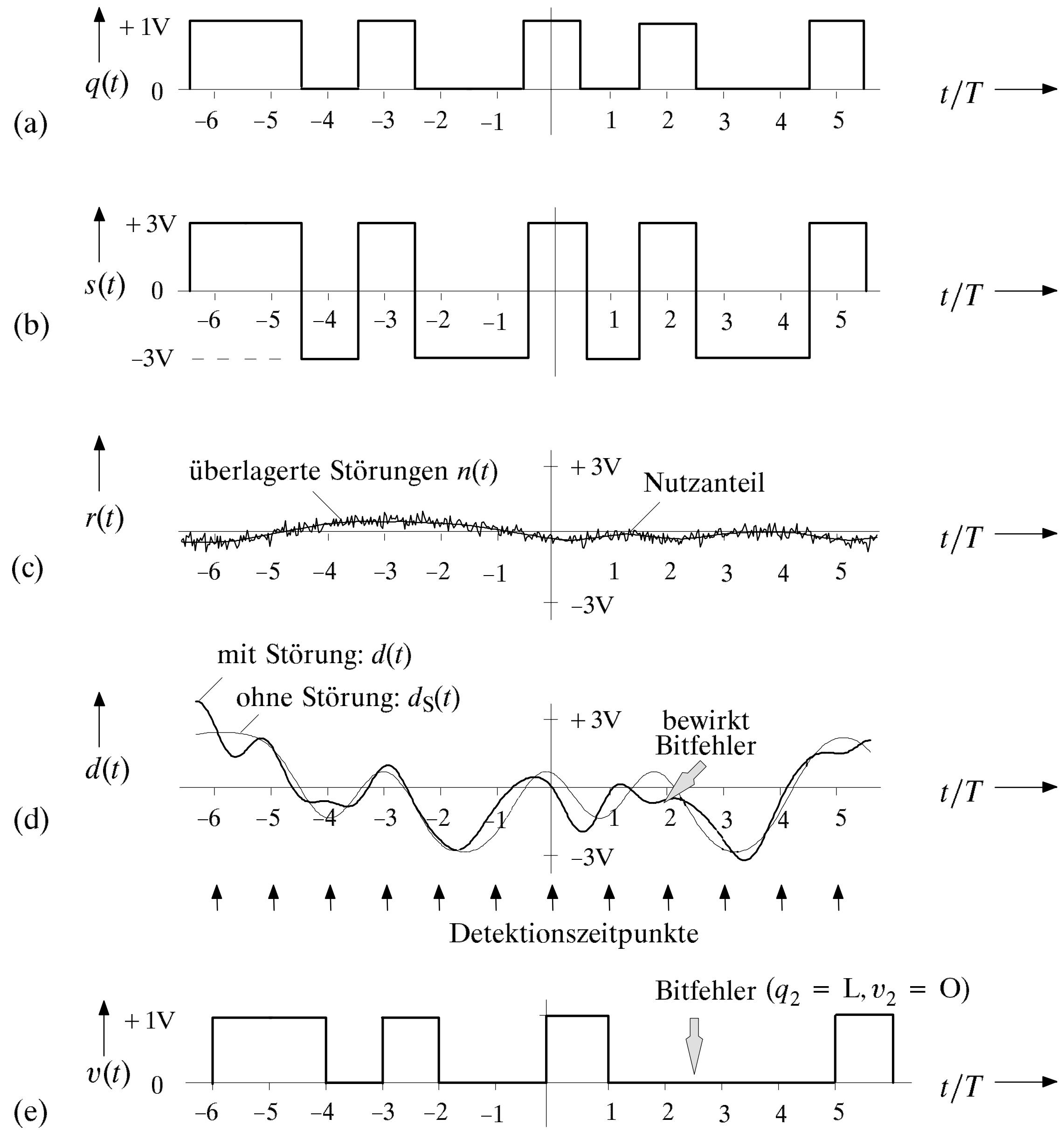


Bild 14.2: Beispiel der Signalverläufe bei binärer bipolarer redundanzfreier Basisbandübertragung über ein Koaxialkabel und Schwellenwertentscheidung.

Im Beispiel von Bild 14.2(b) ist eine binäre bipolare Signalisierung verwendet, bei der dem Binärsymbol "L" die Amplitudenstufe 3 V und dem Symbol "O" die Amplitudenstufe –3 V zugeordnet ist. (Manchmal bezeichnet man "bipolar" auch als "antipodisch").

Bei der Übertragung über den Kanal (Übertragungsmedium) wird das Signal $s(t)$ i.a. verzerrt und von (additiven) Störungen überlagert. Der Kanal kann z.B. ein Koaxialkabel oder ein Lichtwellenleiter sein (Anmerkung: Bei Funksystemen ist die Basisbandübertragung direkt nicht anwendbar). Sind die Übertragungseigenschaften des Kanals linear und zeitunabhängig, so wird der Einfluß des Kanals auf das zu übertragende Nutzsignal ausreichend genau durch den Kanalfrequenzgang $H_K(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\ h_K(t)$ beschrieben. Das Kanal–Ausgangssignal inklusive Störungen bezeichnet man als das Empfangssignal

$$r(t) = s(t) * h_K(t) + n(t) \ . \quad \text{(Hierbei kennzeichnet } * \text{ die Faltung)} \ . \tag{14.2}$$

Das Störsignal $n(t)$ kann explizit nicht angegeben werden. Es muß vielmehr durch seine statistischen Kenngrößen, z.B. durch die WDF $f_n(n)$ und das LDS $\Phi_n(f)$ charakterisiert werden. Im folgenden wird von gaußverteilten und weißen Störungen $n(t)$ ausgegangen.

Das in Bild 14.2(c) dargestellte Empfangssignal $r(t)$ gilt für ein Koaxialkabel mit der relativ geringen Kabeldämpfung (bei der halben Bitfrequenz) von 40 dB. Die normierte Streuung des Störsignals beträgt hier $\sigma_n/s_0 = 0.1$. Das Bild zeigt, daß die Verzerrungen bereits bei diesem, noch relativ günstigen Kanal so stark sind, daß die gesendete Symbolfolge auch bei Vernachlässigung der Störungen nicht mehr zu erkennen ist.

Der Empfänger des digitalen Basisbandsystems beinhaltet stets ein Empfangsfilter und einen getakteten Detektor (z.B. einen Schwellenwertentscheider). Das Empfangsfilter hat die Aufgabe, die Störleistung vor dem Detektor zu begrenzen. Hierzu eignet sich ein Tiefpaß mit dem Frequenzgang $H_E(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\ h_E(t)$, also ein passives Filter.

Zusätzlich hat das Empfangsfilter oft die Aufgabe, die auf dem Kanal entstandenen Amplituden– und Phasenverzerrungen soweit wie nötig und möglich zu beseitigen. Dazu müssen die für die Übertragung des Nutzsignals wichtigen Frequenzanteile angehoben werden, was nur mit einer aktiven Schaltung möglich ist (*Entzerrer*).

Das Ausgangssignal des Empfangsfilters $H_E(f)$ und gleichzeitig das Eingangssignal des Detektors ist das Detektionssignal

$$d(t) = r(t) * h_E(t) = s(t) * h_K(t) * h_E(t) + n(t) * h_E(t) = d_S(t) + d_N(t) \ . \tag{14.3}$$

Die beiden Indizes "S" und "N" stehen hierbei wieder für "Signal" und "Noise".

Der Nutzanteil $d_S(t)$ läßt sich wie $s(t)$ als Summe von gewichteten und jeweils um die Symboldauer T verschobenen Einzelimpulsen darstellen. Analog zu (14.1) gilt:

$$d_S(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot g_d(t - \nu \cdot T) \ . \tag{14.4}$$

Der Detektionsgrundimpuls kann dabei in folgender Weise berechnet werden:

$$g_d(t) = g_s(t) * h_K(t) * h_E(t) \ . \tag{14.5}$$

Aufgrund der Verzerrungen ist $g_d(t)$ stets breiter als $g_s(t)$.

Ist das Rauschen $n(t)$ vor dem Empfänger gaußverteilt, so ist das Detektionsstörsignal $d_{\rm N}(t)$ ebenfalls gaußverteilt. Die Leistung σ_d^2 dieses unerwünschten, störenden Anteils kann man mit nachfolgender Gleichung berechnen, wobei der rechte Teil nur für weißes Rauschen mit der konstanten (zweiseitigen) Rauschleistungsdichte $\Phi_n(f) = N_0/2$ gilt:

$$\sigma_d^2 = \overline{d_{\rm N}(t)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(f) \cdot |H_{\rm E}(f)|^2 \, {\rm d}f = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{\rm E}(f)|^2 \, {\rm d}f \, . \tag{14.6}$$

Bild 14.2(d) zeigt das Detektionssignal $d(t)$ für den Fall einer (allerdings unvollständigen) Entzerrung. Aus dem in Bild 14.2(d) ebenfalls eingezeichneten Nutzanteil $d_{\rm S}(t)$ sind die gesendeten Symbole bereits wieder zu erkennen, doch ist der Signalverlauf aufgrund der unvollständigen Entzerrung im Gegensatz zu $s(t)$ nicht rechteckförmig. Das Detektionsstörsignal $d_{\rm N}(t)$ ist in dieser Darstellung gleich der Differenz zwischen $d(t)$ und $d_{\rm S}(t)$.

Zur Amplituden– und Zeitregenerierung wird das Detektionssignal $d(t)$ dem Detektor zugeführt. Im System nach Bild 14.1 wird hierfür ein binärer Schwellenwertentscheider verwendet. Dieser vergleicht die Momentanwerte des Detektionssignals $d(t)$ zu den Detektionszeitpunkten – in Bild 14.2(d) durch Pfeile markiert – mit dem Schwellenwert $E = 0$ und gewinnt so das rechteckförmige Sinkensignal $v(t)$ bzw. die dazugehörige Sinkensymbolfolge $\langle v_\nu \rangle$ von Bild 14.2(e). Bei fehlerfreier Übertragung ist das Signal $v(t)$ bis auf eine schaltungsbedingte Laufzeit gleich dem Quellensignal $q(t)$.

Das zum Entscheidungsprozeß notwendige Taktsignal muß von der Taktgewinnungseinrichtung aus dem ankommenden Signal $r(t)$ erzeugt werden, z.B. mit Hilfe eines Phasenregelkreises. Für einen solchen ist auch die Bezeichnung PLL (*Phase Locked Loop*) üblich. Die Taktgewinnungseinrichtung wird in diesem Versuch allerdings stets als ideal angenommen.

Solange die Störungen und Verzerrungen des Kanals einen gewissen Grenzwert nicht überschreiten, ist die Sinkensymbolfolge mit der Quellensymbolfolge identisch, d.h. es gilt $\langle v_\nu \rangle = \langle q_\nu \rangle$. Zum Zeitpunkt $t = 2 \cdot T$ ist in diesem Beispiel ein Bitfehler zu erkennen. Dieser ist darauf zurückzuführen, daß aufgrund der Verzerrungen und Störungen des Kanals das Detektionssignal $d(t)$ den Schwellenwert $E = 0$ fälschlicherweise unterschreitet, und somit das Quellensymbol $q_2 =$ "L" als das Symbol $v_2 =$ "O" entschieden wird (vgl. Signalverläufe in den Bildern 14.2(a), (d) und (e)).

Im Programm *"bas"* wird stets die hier beschriebene symbolweise Detektion mittels Schwellenwertentscheider verwendet. Anzumerken bleibt, daß mit einem aufwendigeren Empfänger, der die gesamte Symbolfolge (oder einen Ausschnitt davon) gemeinsam auswertet, in vielen Fällen eine sicherere Entscheidung getroffen werden kann. Beispiele hierfür sind die Entscheidungsrückkopplung, auch als *Quantisierte Rückkopplung* (QR) bekannt, und der sog. *Viterbi–Algorithmus*. Letzterer ist ein Maximum–Likelihood–Detektor. Diese Entscheidungsstrategien werden z.B. im Versuch *Impulsinterferenzen & Entzerrung* des Praktikums [30] ausführlich diskutiert.

14.2 Fehlerwahrscheinlichkeit und Augendiagramm

Das wichtigste Gütekriterium eines Digitalsystems ist die Bitfehlerwahrscheinlichkeit

$$p_{\mathrm{B}} = \mathrm{E}[p(v_\nu \neq q_\nu)] = \overline{p(v_\nu \neq q_\nu)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=1}^{N} p(v_\nu \neq q_\nu) \,. \tag{14.7}$$

Bei einem optimalen Binärsystem mit AWGN–Kanal und Matched–Filter ist die Berechnung von p_{B} recht einfach (vgl. Abschnitt 13.3). In diesem Sonderfall sind alle Verfälschungswahrscheinlichkeiten $p(v_\nu \neq q_\nu)$ gleich, und es kann auf die aufwendige Zeitmittelung in (14.7) verzichtet werden. Mit den Gleichungen von Abschnitt 13.3 gilt

$$p_{\mathrm{B}} = \mathrm{Q}\Big(\frac{g_d(0)}{\sigma_d}\Big) = \mathrm{Q}\Big(\sqrt{\frac{2\cdot E_{\mathrm{B}}}{N_0}}\Big) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{erfc}\Big(\sqrt{\frac{E_{\mathrm{B}}}{N_0}}\Big) \,, \tag{14.8}$$

und man spricht von einem *Nyquist–System*. Ein solches zeichnet sich dadurch aus, daß die Symboldetektion nicht von Nachbarimpulsen beeinflußt wird (vgl. Kapitel 16). Im weiteren verwenden wir hierfür auch den Begriff "impulsinterferenzfreies System".

Bei einem verzerrenden Kanal kann dagegen die Berechnung von p_{B} nach (14.7) sehr aufwendig sein, selbst beim einfachsten Fall gaußverteilter Störungen. Eine Vereinfachung ergibt sich, wenn man von der Zeitmittelung nach (14.7) zu einer Scharmittelung übergeht. Ein geeignetes Hilfsmittel hierfür ist das Augendiagramm.

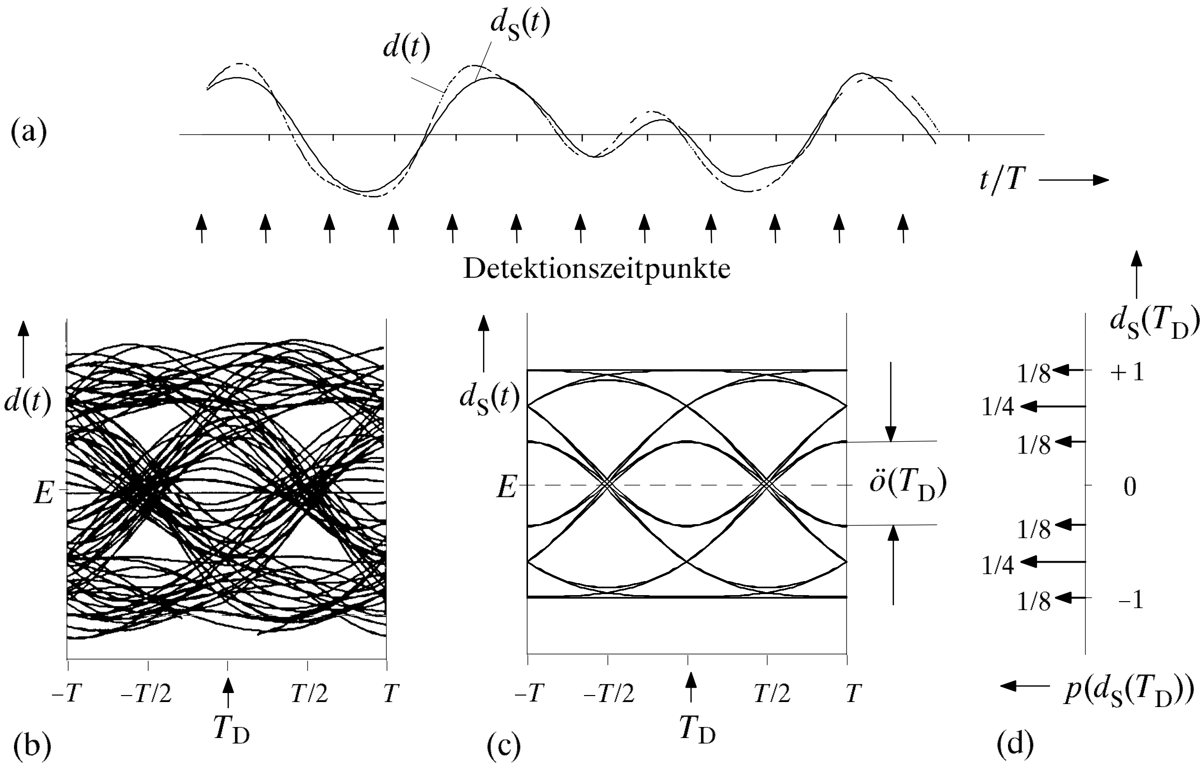


Bild 14.3: Zur Verdeutlichung der Augendiagramme anhand des Detektionssignals:
(a) Ausschnitt aus dem Detektionssignal bei gaußähnlichem Impuls,
(b) Augendiagramm mit Störungen (Signal $d(t)$),
(c) Augendiagramm ohne Störungen (Signal $d_{\mathrm{S}}(t)$),
(d) WDF der Detektionsnutzabtastwerte $d_{\mathrm{S}}(T_{\mathrm{D}})$ für $T_{\mathrm{D}} = 0$.

Das *Augendiagramm* ist die Summe aller übereinander gezeichneter Ausschnitte eines (eventuell verzerrten und gestörten) Digitalsignals, deren Dauer ein ganzzahliges Vielfaches der Symboldauer T beträgt. Dieses Diagramm hat eine gewisse Ähnlichkeit mit einem menschlichen Auge, was zu seiner Namensgebung geführt hat. Es kann z.B. auf einem Oszilloskop dargestellt werden, das mit dem Taktsignal getriggert wird.

In Bild 14.3(b) und (c) sind zwei solche Augendiagramme für das Detektionssignal $d(t)$ von Bild 14.3(a) dargestellt. Bild 14.3(b) zeigt das Augendiagramm mit Störungen, während für Bild 14.3(c) nur der Nutzanteil $d_{\mathrm{S}}(t)$ des Detektionssignals berücksichtigt ist.

Zur Bestimmung der Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_{B} ist das Augendiagramm ohne Störungen besser geeignet. Natürlich kann ein solches Augendiagramm nicht in praxi am Oszilloskop dargestellt, sondern nur mittels einer Rechnersimulation erzeugt werden.

Wie aus Bild 14.3(c) ersichtlich ist, sind im Augendiagramm ohne Störungen nur endlich viele Augenlinien zu unterscheiden. Diese Eigenschaft kann bei der Berechnung der mittleren Bitfehlerwahrscheinlichkeit ausgenutzt werden.

Dazu bestimmt man für alle Augenlinien den Abstand zur Entscheiderschwelle $E = 0$ zum Detektionszeitpunkt T_{D}, daraus zusammen mit der Streuung σ_d des Störanteils $d_{\mathrm{N}}(t)$ die jeweilige Überschreitungswahrscheinlichkeit und mittelt über alle Augenlinien.

Diese Berechnungsvorschrift läßt sich durch die Einführung der WDF der Detektionsnutzabtastwerte $d_{\mathrm{S}}(T_{\mathrm{D}})$ formalisieren. Da ohne Berücksichtigung der Störungen nur endlich viele Augenlinien auftreten, ist $d_{\mathrm{S}}(T_{\mathrm{D}})$ eine diskrete Zufallsgröße, deren WDF aus einer Summe gewichteter Diracfunktionen besteht (vgl. Kapitel 4).

In Bild 14.3(d) ist die WDF der Detektionsnutzabtastwerte $d_{\mathrm{S}}(T_{\mathrm{D}})$ für das Augendiagramm von Bild (c) und den Detektionszeitpunkt $T_{\mathrm{D}} = 0$ dargestellt. Es zeigt, daß sich im vorliegenden Fall die diskrete WDF aus 6 Diracfunktionen zusammensetzt, deren Gewichte die Auftrittshäufigkeiten der jeweiligen Werte angeben. Berücksichtigt man die Symmetrie zur Entscheiderschwelle $E = 0$, so kann p_{B} als Summe über 3 Überschreitungswahrscheinlichkeiten berechnet werden (vgl. Versuchsdurchführung D14.1).

Es ist offensichtlich, daß durch den Übergang von der Zeitmittelung entsprechend (14.7) auf die Scharmittelung über alle unterscheidbaren Augenlinien die Rechenzeit zur Fehlerwahrscheinlichkeitsbestimmung drastisch verringert wird. Trotzdem kann in manchen Fällen die Berechnung der mittleren Bitfehlerwahrscheinlichkeit aufwendig sein.

Man verwendet deshalb oft als Näherung die ungünstigste Fehlerwahrscheinlichkeit (*worst case*), für deren Berechnung stets von den beiden ungünstigsten Symbolfolgen ausgegangen wird. Das bedeutet, daß hier die tatsächliche WDF der Nutzabtastwerte $d_{\mathrm{S}}(T_{\mathrm{D}})$ gemäß Bild 14.3(d) durch eine vereinfachte WDF mit nur den beiden inneren Diracfunktionen (jeweils mit dem Gewicht 1/2) ersetzt wird. Mit der in Bild 14.3(c) angegebenen *vertikalen Augenöffnung* $ö(T_{\mathrm{D}})$ zum Detektionszeitpunkt T_{D} gilt:

$$p_{\mathrm{U}} = \mathrm{Q}\left(\frac{ö(T_{\mathrm{D}})/2}{\sigma_d}\right) . \tag{14.9}$$

Diese Gleichung gilt nur unter der Voraussetzung von gaußverteilten Störungen und einem optimalen Schwellenwert. Liegt die Entscheiderschwelle nicht in Augenmitte, so ist in (14.9) anstelle von $\ddot{o}(T_{\mathrm{D}})/2$ der minimale Abstand einer Augenlinie von der Entscheiderschwelle E einzusetzen.

Die Näherung p_{U} geht davon aus, daß alle Folgen mit der gleichen, nämlich der maximalen Fehlerwahrscheinlichkeit verfälscht werden. Alle anderen Symbole, die nicht zu inneren Augenlinien gehören, haben aber u.U. eine deutlich kleinere Bitfehlerwahrscheinlichkeit als p_{U}, so daß p_{U} eine obere Schranke für p_{B} darstellt ($p_{\mathrm{U}} \geq p_{\mathrm{B}}$). Das Gleichheitszeichen gilt hierbei nur für die binären Nyquist–Systeme (vgl. Abschnitt 13.3 und Kapitel 16).

Bei einem redundanzfreien Binärsystem wird das Augendiagramm (ohne Störungen) allein durch den Detektionsgrundimpuls $g_d(t)$ bestimmt. Je breiter $g_d(t)$ ist, um so mehr Linien sind im Augendiagramm zu unterscheiden und um so mehr Nachbarimpulse beeinflussen die Detektion eines Symbols.

Die Beeinflussung einer Symbolentscheidung durch die anklingenden Flanken nachfolgender Impulse (*Vorläufer*) und die abklingenden Flanken vorangegangener Impulse (*Nachläufer)* bezeichnet man als *Impulsinterferenzen* (engl.: *Intersymbol Interference*).

Im folgenden betrachten wir das Augendiagramm zum Detektionszeitpunkt T_{D} und setzen voraus, daß der Detektionsgrundimpuls $g_d(t)$ genau v Vorläufer und n Nachläufer aufweist. Darunter versteht man, daß von den äquidistanten Abtastwerten zu den Detektionszeitpunkten nur $g_d(T_{\mathrm{D}} - v \cdot T)$, ... , $g_d(T_{\mathrm{D}} - T)$, $g_d(T_{\mathrm{D}})$, $g_d(T_{\mathrm{D}} + T)$, ... , $g_d(T_{\mathrm{D}} + n \cdot T)$ zu berücksichtigen sind, während alle anderen Abtastwerte vernachlässigt werden können. Bei den in Bild 14.3 dargestellten Augendiagrammen gilt beispielsweise $n = v = 1$.

Mit dieser Voraussetzung kann der Detektionsnutzabtastwert $d_{\mathrm{S}}(T_{\mathrm{D}})$ maximal 2^{n+v+1} verschiedene Werte annehmen. Ist der Grundimpuls $g_d(t)$ symmetrisch, so schneiden sich mehrere Augenlinien zum Detektionszeitpunkt $T_{\mathrm{D}} = 0$, und die WDF besteht dann aus weniger als 2^{n+v+1} Diracfunktionen (vgl. Bild 14.3).

Die vertikale Augenöffnung gibt den Abstand der beiden inneren Diracfunktionen an und kann bei redundanzfreier Binärübertragung wie folgt berechnet werden:

$$\ddot{o}(T_{\mathrm{D}}) = 2 \cdot \Big[g_d(T_{\mathrm{D}}) - \sum_{\nu=1}^{n} |g_d(T_{\mathrm{D}} + \nu \cdot T)| - \sum_{\nu=1}^{v} |g_d(T_{\mathrm{D}} - \nu \cdot T)| \Big] \; . \tag{14.10}$$

Der Faktor 2 in dieser Gleichung gilt nur für bipolare Signale, bei unipolaren Signalen ist dieser Faktor gleich 1. Die Betragsbildung ist notwendig, da für die Berechnung der Augenöffnung stets vom ungünstigsten Fall ausgegangen werden muß. Ist der erste Nachläufer positiv, so wird die Detektion des Amplitudenkoeffizienten a_ν durch $a_{\nu-1} \neq a_\nu$ beeinträchtigt.

Dagegen wirkt sich bei gleichem Grundimpuls ein Koeffizient $a_{\nu-1} = a_\nu$ positiv aus. Das bedeutet, daß hier die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung des Koeffizienten a_ν durch die Impulsinterferenz zwischen benachbarten Symbolen sogar herabgesetzt wird. Entsprechendes gilt für die Vorläufer.

14.3 Ideale Entzerrung und Impulsformung

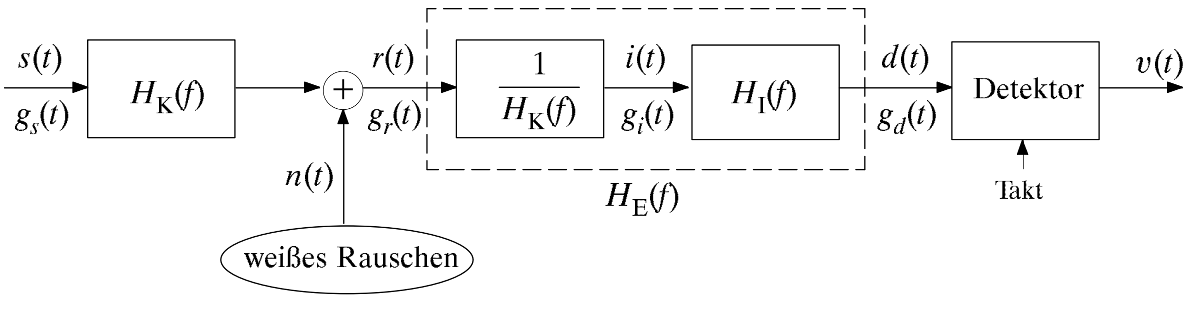
Grund für die Impulsverbreiterung durch den Übertragungskanal sind Amplituden– und Phasenverzerrungen. Sowohl die Dämpfung $a(f)$ als auch die Phase $b(f)$ verlaufen z.B. bei einem koaxialen Übertragungskanal, physikalisch bedingt durch den sog. *Skineffekt*, $\sqrt{f}$–förmig. Voraussetzung für einen verzerrungsfreien Übertragungskanal wäre dagegen ein konstanter Dämpfungsverlauf $a(f)$ und ein linear mit der Frequenz f ansteigender Phasenverlauf $b(f)$, wobei allgemein folgender Zusammenhang gilt:

$$H_{\mathrm{K}}(f) = \mathrm{e}^{-a(f)} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j} \cdot b(f)} \,. \tag{14.11}$$

Wirkt ein stark verzerrender Kanalfrequenzgang $H_{\mathrm{K}}(f)$ auf ein (impulsförmiges) Nutzsignal $g_s(t)$, so erstreckt sich der Ausgangsimpuls $g_r(t)$ über eine sehr große Zeitdauer und ist zudem in der Amplitude gegenüber dem Eingangsimpuls $g_s(t)$ stark vermindert; es kommt zu großen Impulsinterferenzen. Überlagert man viele solcher Impulse, so ergibt sich im allgemeinen ein geschlossenes Auge.

Durch eine geeignete Dimensionierung des Empfangsfilters $H_{\mathrm{E}}(f)$ können die Amplituden– und Phasenverzerrungen des Kanals jedoch merklich vermindert werden. Bei Abwesenheit von Störungen (d.h.: $n(t) = 0$) könnte man beispielsweise $H_{\mathrm{E}}(f) = 1/H_{\mathrm{K}}(f)$ wählen. Das Ausgangssignal $i(t)$ dieses idealen Entzerrers wäre in diesem Fall identisch mit dem Sendesignal $s(t)$ und wie dieses z.B. ideal rechteckförmig (vgl. Bild 14.4). Die Frequenzanteile, die auf dem Kanal einer besonders großen Dämpfung unterliegen, werden durch dieses – möglicherweise nicht realisierbare – Empfangsfilter so weit angehoben, daß für alle Frequenzen $H_{\mathrm{K}}(f) \cdot H_{\mathrm{E}}(f) = 1$ gilt.

Bei leitungsgebundener Übertragung fällt $|H_{\mathrm{K}}(f)|$ mit wachsender Frequenz meist monoton. Dementsprechend wächst bei idealer Entzerrung $1/|H_{\mathrm{K}}(f)|$ monoton an, was zur Folge hat, daß entsprechend (14.6) bei weißem Rauschen $n(t)$ am Empfängereingang die Rauschleistung σ_d^2 nach dem idealen Entzerrer unendlich groß wird. Um diese Varianz zu begrenzen, ist deshalb ein zusätzlicher Tiefpaß erforderlich.



Sendegrundimpuls $g_s(t)$: z.B. rechteckförmig;

Empfangsgrundimpuls $g_r(t)$: extrem breit;

Grundimpuls $g_i(t)$: wie $g_s(t)$, z.B. rechteckförmig;

Detektionsgrundimpuls $g_d(t)$: breiter als $g_s(t)$ und $g_i(t)$, aber schmaler als $g_r(t)$.

Bild 14.4: Zur Verdeutlichung des idealen Entzerrers und des Impulsformers.

Bild 14.4 zeigt das Blockschaltbild eines möglichen Empfängers bei Vorhandensein von Impulsinterferenzen. Das Empfangsfilter mit dem bandpaßähnlichen Frequenzgang $H_\mathrm{E}(f)$ setzt sich – zumindest gedanklich – aus dem idealen Entzerrer $1/H_\mathrm{K}(f)$ und einem Tiefpaß $H_\mathrm{I}(f)$ zur Rauschleistungsbegrenzung zusammen. Der Gesamtfrequenzgang von Kanal und Empfangsfilter ist somit ebenfalls gleich $H_\mathrm{I}(f)$:

$$H_\mathrm{KE}(f) = H_\mathrm{K}(f) \cdot \frac{1}{H_\mathrm{K}(f)} \cdot H_\mathrm{I}(f) = H_\mathrm{I}(f)\ . \tag{14.12}$$

Aufgrund dieser Eigenschaft wird das zeitdispersive (Nutzsignal–)Verhalten des Gesamtsystems allein durch den sog. *Impulsformer–Frequenzgang* $H_\mathrm{I}(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, h_\mathrm{I}(t)$ bestimmt. Beispielsweise gilt dann für den Detektionsgrundimpuls:

$$g_d(t) = g_s(t) * h_\mathrm{I}(t)\ . \tag{14.13}$$

Wählt man z.B. einen rechteckförmigen Impulsformer (*Küpfmüller–Tiefpaß*), dessen Frequenzgang $H_\mathrm{I}(f)$ allein durch die Grenzfrequenz f_I bestimmt ist (siehe Anhang C), so ergibt sich – unabhängig vom Kanalfrequenzgang $H_\mathrm{K}(f)$ – stets die gleiche Augenöffnung. $H_\mathrm{K}(f)$ hat dann lediglich Einfluß auf die Größe der Störungen am Entscheider. Für die Detektionsstörleistung gilt nun bei weißem Rauschen:

$$\sigma_d^2 = \overline{d_\mathrm{N}(t)^2} = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|H_\mathrm{I}(f)|^2}{|H_\mathrm{K}(f)|^2}\, \mathrm{d}f = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-f_\mathrm{I}}^{+f_\mathrm{I}} \frac{1}{|H_\mathrm{K}(f)|^2}\, \mathrm{d}f\ . \tag{14.14}$$

Aus der linken, allgemeineren Gleichung ist ersichtlich, daß der Impulsformer $|H_\mathrm{I}(f)|$ – zumindest ab einer bestimmten Frequenz – schneller abfallen muß als $1/|H_\mathrm{K}(f)|$ ansteigt. Die rechte Gleichung gilt dagegen speziell für den Küpfmüller–Impulsformer.

In Bild 14.5 ist das Betragsquadrat $|H_\mathrm{E}(f)|^2$ des Empfangsfilter–Frequenzgangs gezeichnet. Es ist vorausgesetzt, daß $|H_\mathrm{K}(f)|$ mit der Frequenz monoton fällt, so daß der Kehrwert ansteigt. Da $H_\mathrm{I}(f)$ für alle Frequenzen $|f| < f_\mathrm{I}$ gleich 1 ist (und außerhalb 0), ist die Fläche unter der Kurve ein Maß für die Störleistung am Detektor. Verringert man die Grenzfrequenz f_I auf die Hälfte, so wird σ_d^2 um mehr als den Faktor 2 vermindert. Dies geht natürlich auf Kosten des Einschwingverhaltens (vertikale Augenöffnung).

In der Versuchsdurchführung D14.2 wird gezeigt, daß es für jeden Kanal $H_\mathrm{K}(f)$ eine optimale Grenzfrequenz $f_\mathrm{I,opt}$ gibt, die die Fehlerwahrscheinlichkeit mimimiert.

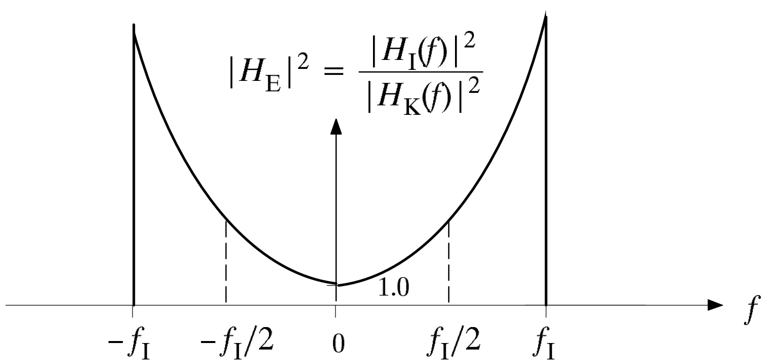


Bild 14.5: Zur Verdeutlichung der Störleistung bei rechteckförmigem Impulsformer.

14.4 Vorbereitungsfragen

V14.1: Gegeben sei ein redundanzfreies binäres bipolares Basisbandsystem mit der Bitrate R_B = 100 Mbit/s. Die Sendeimpulse seien "NRZ–rechteckförmig" und besitzen die möglichen Amplitudenwerte ±2V. Die Rauschleistungsdichte des AWGN–Kanals sei $N_0 = 10^{-9}$ V²/Hz. Als Empfangsfilter wird ein Gauß–Tiefpaß mit dem Frequenzgang

$$H_\mathrm{E}(f) = \mathrm{e}^{-\pi(\frac{f}{2f_\mathrm{E}})^2} , \tag{14.15}$$

verwendet, wobei die Grenzfrequenz f_E = 40 MHz beträgt. Für den Detektionsgrundimpuls $g_d(t)$ gilt in diesem Fall:

$$g_d(t) = g_s(t) * h_\mathrm{E}(t) = 2 \cdot f_\mathrm{E} \cdot s_0 \cdot \int_{t-T/2}^{t+T/2} \mathrm{e}^{-\pi \cdot (2 f_\mathrm{E} \cdot \tau)^2} \, \mathrm{d}\tau \; . \tag{14.16}$$

Mit dem komplementären Gaußschen Fehlerintegral Q(x) nach (4.40) bzw. Anhang B kann für den Detektionsgrundimpuls auch geschrieben werden:

$$g_d(t) = s_0 \cdot [\mathrm{Q}(2 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot f_\mathrm{E} \cdot (t - \frac{T}{2})) - \mathrm{Q}(2 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot f_\mathrm{E} \cdot (t + \frac{T}{2}))] \; . \tag{14.17}$$

Dieser Impuls ist in Bild 14.6 dargestellt.

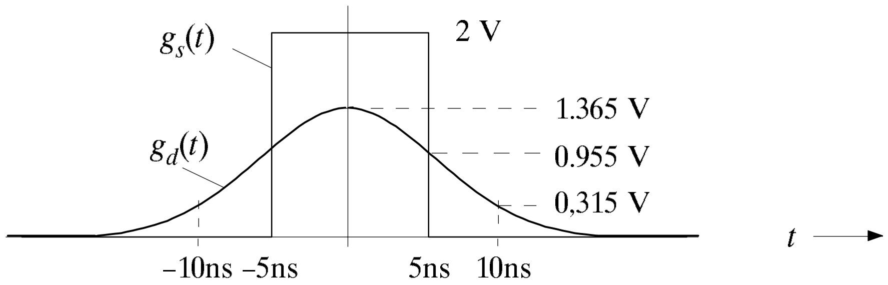
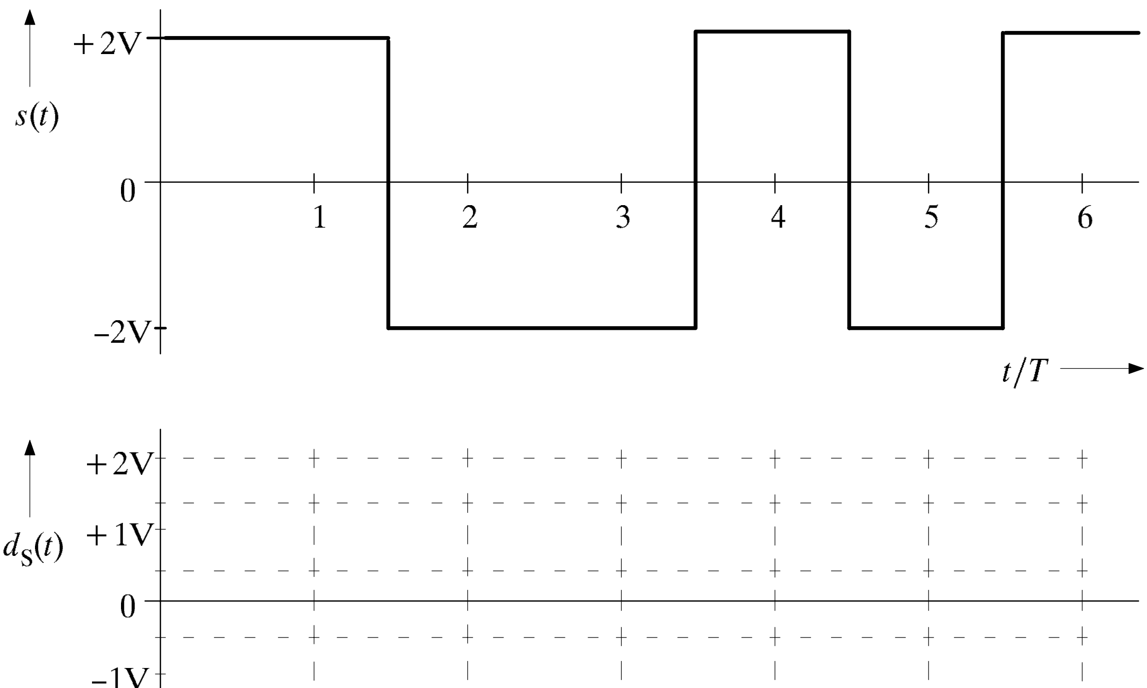


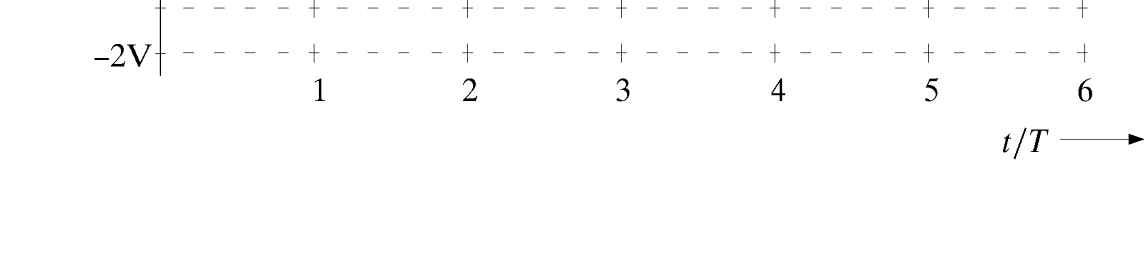
Bild 14.6: Detektionsgrundimpuls $g_d(t)$ im Vergleich zum Sendegrundimpuls $g_s(t)$ bei gaußförmigem Empfangsfilter (normierte Grenzfrequenz $f_\mathrm{E} \cdot T = 0.4$).

a) Wie groß ist die Sendeimpulsdauer $T = T_\mathrm{B}$ und die Energie pro Bit (E_B)?

b) Überprüfen Sie die in Bild 14.6 eingetragenen Zahlenwerte für $g_d(0)$, $g_d(\pm 5$ ns) und $g_d(\pm 10$ ns). Verwenden Sie dabei die Tabelle im Anhang B.

c) Skizzieren Sie *qualitativ* das zur Symbolfolge L L O O L O L gehörige Detektionsnutzsignal $d_S(t)$ in nachfolgendes Diagramm. Überlagern Sie hierzu die verschobenen und gewichteten Detektionsimpulse gemäß Bild 14.6.

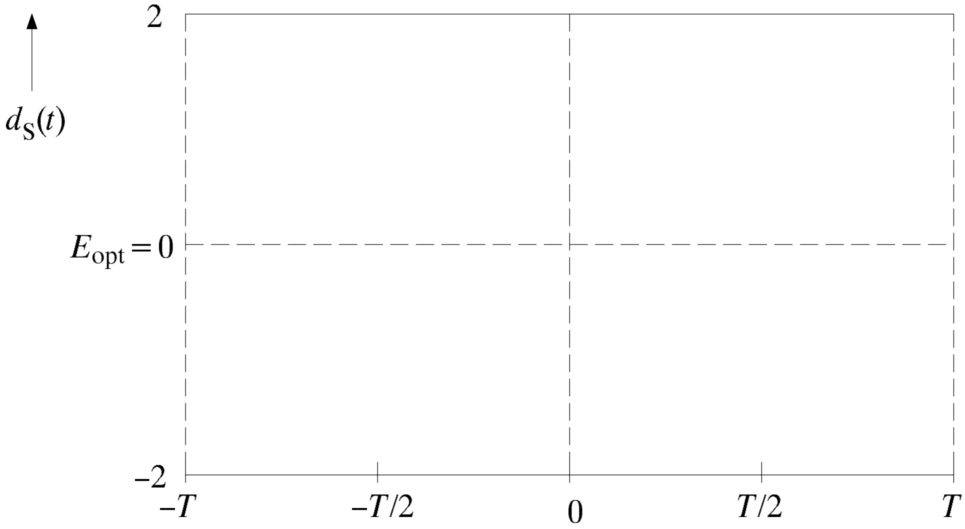




V14.2: Es gelten weiterhin die in V14.1 getroffenen Voraussetzungen.

a) Berechnen Sie die vertikale Augenöffnung $\ddot{o}(T_\mathrm{D})$ für die optimal gewählte Entscheiderschwelle E_opt und den optimalen Detektionszeitpunkt $T_\mathrm{D,opt}$? Wie groß sind E_opt und $T_\mathrm{D,opt}$? Vernachlässigen Sie für diese Berechnung ab ± 20ns alle Vor– und Nachläufer des Detektionsgrundimpulses $g_d(t)$.

b) Zeichnen Sie aus den Angaben von Bild 14.6 das Augendiagramm ohne Störungen. Berücksichtigen Sie dabei nur einen Vor– und einen Nachläufer ($n = v = 1$). Wie ändert sich das Augendiagramm für $n = v = 2$?



c) Wie groß ist die Leistung σ_d^2 des gaußverteilten Detektionsstörsignals $d_\mathrm{N}(t)$?

Hinweis: Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(a\cdot x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \ . \qquad (14.18)$$

d) Häufig wird anstelle von p_{U} das ungünstigste Signalstörleistungsverhältnis

$$\varrho_{\mathrm{U}} = \left(\frac{\ddot{o}(T_{\mathrm{D}})/2}{\sigma_d}\right)^2 \tag{14.19}$$

als Optimierungskriterium herangezogen. Zwischen diesen beiden Größen besteht der folgende feste Zusammenhang:

$$p_{\mathrm{U}} = \mathrm{Q}(\sqrt{\varrho_{\mathrm{U}}})\ . \tag{14.20}$$

Berechnen Sie das ungünstigste Signalstörleistungsverhältnis ϱ_{U} (in dB).

e) Berechnen Sie die ungünstigste Fehlerwahrscheinlichkeit p_{U}.

f) Geben Sie eine untere und eine obere Schranke für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_{B} an. Berücksichtigen Sie dabei, daß ein impulsinterferenzbehaftetes System stets eine größere Bitfehlerwahrscheinlichkeit als ein Nyquist–System aufweist.

g) Um wieviel dB wird das Signalstörleistungsverhältnis geringer, wenn statt eines bipolaren ein unipolares Binärsignal verwendet wird? Welcher Wert ergibt sich in diesem Fall für die Fehlerwahrscheinlichkeit?

14.5 Versuchsdurchführung

Die nachfolgenden Aufgaben können mit dem Programm *"bas"* durchgeführt werden.

D14.1: Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse der Vorbereitungsfragen V14.1 und V14.2. Berücksichtigen Sie dabei, daß im Programm *"bas"* die Amplitude des Sendesignals nur ± 1V beträgt und nicht ± 2V, wie für die Vorbereitungsfragen vorausgesetzt wurde. Wählen Sie mit dem Menüpunkt *"Freie Wahl"* die Systemparameter deshalb wie folgt:

- zufällige Quellensymbolfolge,
- binäre bipolare NRZ–Rechtecksendeimpulse (normierte Impulsdauer $T_s/T = 1$),
- idealer Kanalfrequenzgang ($H_\mathrm{K}(f) = 1$),
- weißes Rauschen mit der normierten Bandbreite $B_\mathrm{n} \cdot T = 6$ und
- der normierten Rauschleistungsdichte $N_0/T = 0.1$,
- Gauß–Entzerrer mit der normierten Grenzfrequenz $f_\mathrm{E} \cdot T = 0.4$,
- optimale Entscheiderschwelle $E = 0$ und optimaler Detektionszeitpunkt $T_\mathrm{D} = 0$.

a) Betrachten und beschreiben Sie alle Zeitsignalverläufe, das Augendiagramm des Detektionssignals (sowohl mit als auch ohne Störungen) und die Leistungsdichtespektren der Nutz– und Störsignale. Wählen Sie hier die Anzahl der zu berücksichtigenden Nachläufer (gleich Anzahl v der Vorläufer) zu $n = 1$.

b) Vergleichen Sie die Zahlenwerte der in der nachfolgenden Tabelle angegebenen Größen mit Ihren Ergebnissen der Vorbereitungsfragen V14.1 und V14.2.

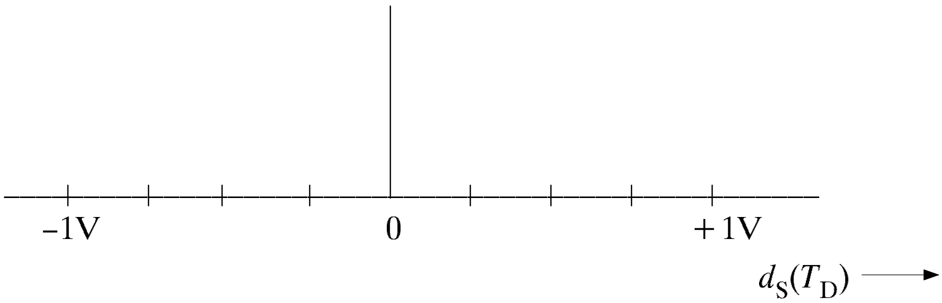
	$\ddot{o}(T_\mathrm{D})$	σ_d	p_B	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_\mathrm{U})$
berechnet			——		
umgerechnet auf ± 1V			——		
simuliert					

Anmerkung: Die gewünschten Zahlenwerte werden im Programm *"bas"* angezeigt, wenn Sie nur ein Augendiagramm darstellen lassen.

c) Wiederholen Sie Versuch b) nun für $n = v = 2$. Warum ergibt sich ein fast gleiches Ergebnis wie unter Punkt b)?

d) Um welchen Faktor ist die mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_B kleiner als die ungünstigste Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_U?

e) Skizzieren Sie die WDF der Detektionsnutzabtastwerte in nachfolgendes Diagramm. Welche Amplitudenwerte treten auf?
Hinweis: Betrachten Sie hierzu im Augendiagramm (ohne Störungen) die Zahl der Augenlinien und deren zugehörige Amplitudenwerte zum Detektionszeitpunkt.



Mögliche Werte	Wahrscheinlichkeiten

f) Berechnen Sie aus den eben ermittelten Wahrscheinlichkeiten und der Streuung σ_d des Detektionsstörsignals eine etwas bessere Näherung für die mittlere Bitfehler–wahrscheinlichkeit p_{B}, als es die ungünstigste Fehlerwahrscheinlichkeit p_{U} ist.

g) Die Schwelle liege nun nicht mehr optimal, sondern bei $E = 0.1$. Tragen Sie die geänderte Schwelle in das Diagramm zu Punkt e) ein und berechnen Sie p_{B} erneut.

h) Ändern Sie die Schwelle im Programm und überprüfen Sie Ihren berechneten Wert.

D14.2: Bezüglich des Senders gelten weiterhin die Voraussetzungen von D14.1, d.h. es wird ein Binärsystem mit NRZ–Rechteckimpulsen betrachtet. Der Kanalfrequenzgang sei nun aber nicht mehr ideal, sondern ein Koaxialkabel, so daß gilt:

$$H_K(f) = \exp\left(-a \cdot \sqrt{\frac{f}{f_B/2}}\right) \cdot \exp\left(-j \cdot a \cdot \sqrt{\frac{f}{f_B/2}}\right) , \tag{14.21}$$

$$h_K(t) = \frac{a/2}{\pi \cdot \sqrt{2 \cdot f_B \cdot t^3}} \cdot \exp\left(-\frac{a^2}{2\pi \cdot f_B \cdot t}\right) \quad \text{für } t \geq 0 . \tag{14.22}$$

$|H_K(f)|$ ist stark monoton fallend, was auf den Skineffekt zurückzuführen ist. Die Konstante a ist die Dämpfung bei der Frequenz $f_B/2$, wobei die Bitfrequenz f_B den gleichen Zahlenwert wie die Bitrate R_B besitzt, aber mit der Einheit "Hz" anstelle von "bit/s". Da am Ausgang des Kanals das Auge bereits geschlossen ist, ist ein Tiefpaß gemäß (14.15) als Empfangsfilter ungeeignet. Vielmehr muß das Empfangsfilter $H_E(f)$ den Kanalfrequenzgang in einem sehr weiten Frequenzbereich entzerren (was z.B. durch den inversen Frequenzgang zu $H_K(f)$ möglich ist), bevor bei höheren Frequenzen wegen der notwendigen Rauschleistungsbegrenzung ein Abfall von $H_E(f)$ erfolgen muß (vgl. Abschnitt 14.3).

Bei einem Kanal mit (stark) frequenzabhängiger Dämpfung ist es zweckmäßig, zur Berechnung der Nutzsignale anstelle von $H_E(f)$ den Frequenzgang $H_I(f) = H_K(f) \cdot H_E(f)$ zu benutzen, der entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 14.3 als Impulsformer–Frequenzgang bezeichnet wird. Für das Weitere betrachten wir einen gaußförmigen Impulsformer mit der Grenzfrequenz f_I:

$$H_I(f) = H_K(f) \cdot H_E(f) = e^{-\pi\left(\frac{f}{2f_I}\right)^2} . \tag{14.23}$$

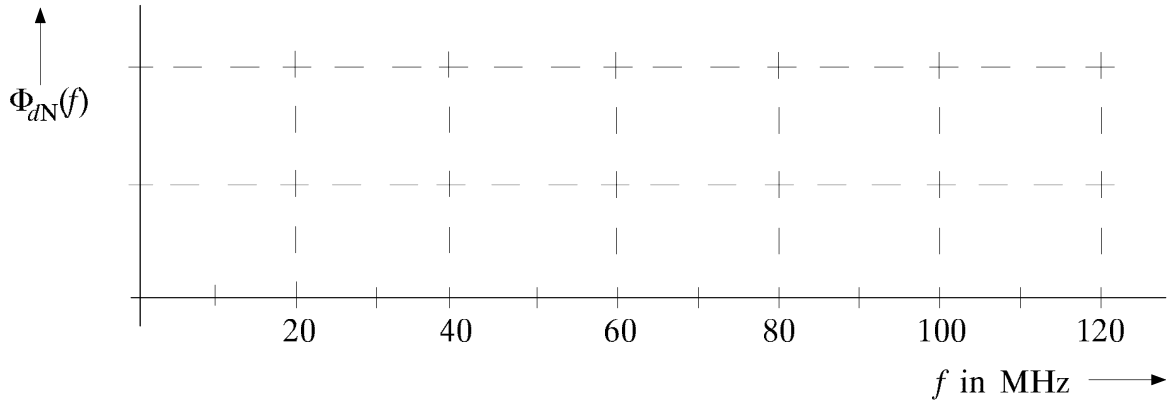
a) Ermitteln Sie mit dem Programm *"bas"* die Fehlerwahrscheinlichkeit dieses Systems. Ändern Sie vorher gegenüber D14.1 folgende Parameter des Übertragungssystems:

– Kanal: Koaxialkabel mit der Dämpfung $a = 60$ dB bzw. 6.9 Neper,
– Empfangsfilter: gaußförmiger Impulsformer mit der Grenzfrequenz $f_I \cdot T = 0.4$,
– Detektor: Schwellenwert und Detektionszeitpunkt optimal.

	$\ddot{o}(T_D)$	σ_d	p_B	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$
$H_K(f) = 1$					
Koaxialkabel ($a = 60$dB)					

Worauf sind hier die unzureichende Werte hinsichtlich Fehlerwahrscheinlichkeit bzw. Störabstand zurückzuführen?

b) Betrachten Sie den Rauschanteil $d_{\mathrm{N}}(t)$ des Detektionssignals, so werden Sie erkennen, daß dieses Signal sehr viele Frequenzanteile bei etwa 65 MHz besitzt. Wie können Sie sich diesen Sachverhalt erklären? Betrachten Sie zur Beantwortung dieser Frage auch das Leistungsdichtespektrum (LDS) $\Phi_{d\mathrm{N}}(f)$ und skizzieren Sie dieses in nachfolgendes Diagramm. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\Phi_{d\mathrm{N}}(f)$ und dem Entzerrerfrequenzgang $H_{\mathrm{E}}(f)$. Überprüfen Sie rechnerisch die Zahlenwerte für $\Phi_{d\mathrm{N}}(f = 0)$ und $\Phi_{d\mathrm{N}}(f = 65\ \mathrm{MHz})$.



c) Für die Teilaufgabe a) betrug die normierte Rauschleistungsdichte des Störsignals $N_0/T = 0.1$. Dies ist offensichtlich für den hier betrachteten koaxialen Übertragungskanal zu hoch. Überlegen Sie sich anhand der Ergebnisse der Teilaufgabe a), wie groß die normierte Rauschleistungsdichte N_0/T am Empfängereingang maximal sein darf, damit die (ungünstigste) Fehlerwahrscheinlichkeit p_{U} nicht größer als 10^{-4} wird (aus der Tabelle im Anhang B folgt daraus: $10 \cdot \lg(\varrho_{\mathrm{U}}) \geq 11.35$ dB). Welcher Zusammenhang besteht allgemein zwischen und σ_n, N_0 und ϱ_{U}? Wie groß ist σ_n in diesem Fall?

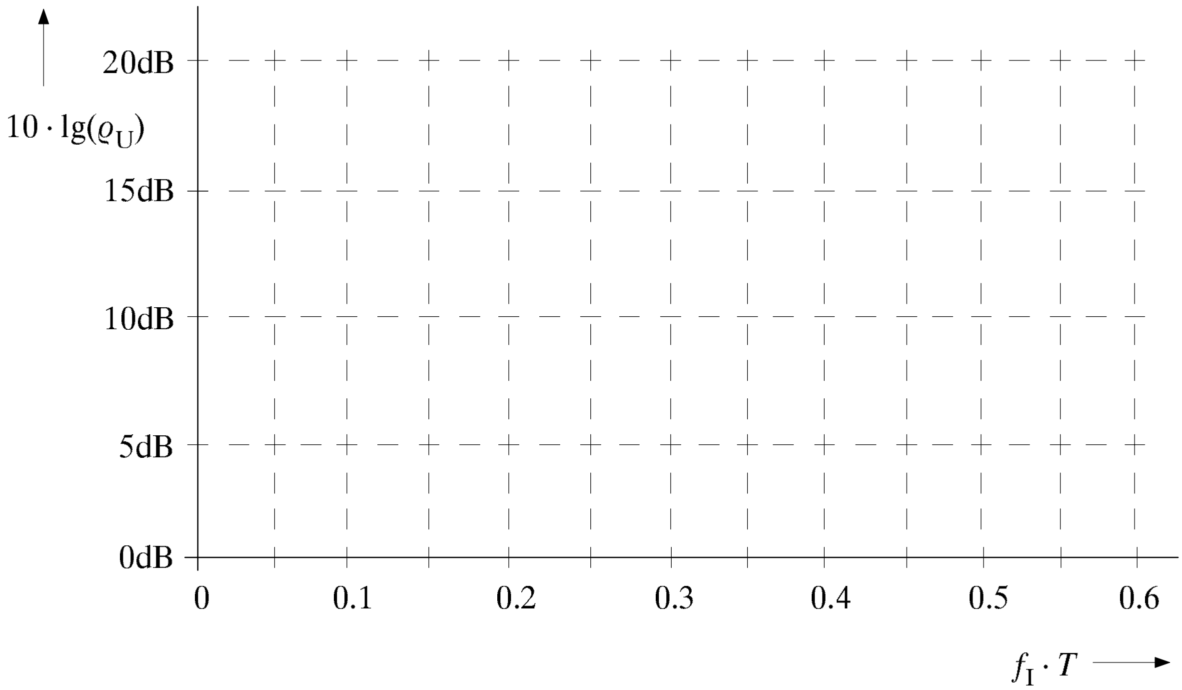
d) Überprüfen Sie mit dem Programm *"bas"*, ob der von Ihnen in c) ermittelte Wert für N_0/T den Anforderungen entspricht. Versuchen Sie gegebenenfalls, den maximal zulässigen Wert von N_0/T durch "Ausprobieren" zu finden.

e) Bestimmen Sie nun die charakteristischen Kenngrößen für verschiedene Impulsformergrenzfrequenzen f_I. Die Anzahl der betrachteten Vor– und Nachläufer sei weiterhin $n = v = 2$. Gehen Sie hier vom *Standardsystem A* aus, mit dem folgende Systemparameter eingestellt werden:

- zufällige Quellensymbolfolge,
- binäre bipolare NRZ–Rechtecksendeimpulse (normierte Impulsdauer $T_s/T = 1$),
- Koaxialkabel mit der Kabeldämpfung $a = 60$ dB,
- weißes Rauschen mit der normierten Bandbreite $B_\mathrm{n} \cdot T = 6$ und
- der normierten Rauschleistungsdichte $N_0/T = 2 \cdot 10^{-7}$ (V^2),
- Gauß–Impulsformer mit der normierten Grenzfrequenz $f_\mathrm{I} \cdot T = 0.4$,
- optimale Entscheiderschwelle $E = 0$ und optimaler Detektionszeitpunkt $T_\mathrm{D} = 0$.

	$\ddot{o}(T_D)$	σ_d	p_B	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$
$f_I \cdot T = 0.25$					
$f_I \cdot T = 0.30$					
$f_I \cdot T = 0.35$					
$f_I \cdot T = 0.40$					
$f_I \cdot T = 0.45$					
$f_I \cdot T = 0.50$					

f) Skizzieren Sie den Störabstand $10 \cdot \lg(\varrho_U)$ in Abhängigkeit der normierten Grenzfrequenz $f_I \cdot T$ und diskutieren Sie den Kurvenverlauf. Ermitteln Sie die optimalen Impulsformergrenzfrequenz auf 5 MHz genau.



14.6 Übungsaufgabe

Ü14.1: Mit dieser Übungsaufgabe sollen Sie die programmtechnische Berechnung des Augendiagramms und der Augenöffnung kennenlernen.

a) Schreiben Sie ein Programm *"basaug(n, gd, oef, fld)"*, das für ein binäres bipolares Sendesignal das Augendiagramm (ohne Störungen) berechnet und schließlich die vertikale Augenöffnung $oef = ö(T_\mathrm{D})$ ermittelt.

Der Parameter n gibt die Anzahl der zu berücksichtigenden Nachläufer an. Sie können davon ausgehen, daß n nicht größer als 2 ist. Da nur symmetrische Detektionsimpulse betrachtet werden und $T_\mathrm{D} = 0$ vorauszusetzen ist, gilt weiterhin $v = n$.

Die Übergabe der Detektionsgrundimpuls–Abtastwerte an das Unterprogramm erfolgt über das Feld "*gd*[289]" (Indizierung: 0 bis 288); das Element "*gd*[144]" kennzeichnet somit den mittleren Abtastwert und damit das Impulsmaximum. Bei dieser Vorbelegung entsprechen der Bitdauer T im Programm genau 36 Abtastwerte. Stellen Sie das Auge von $-T$ bis $+T$ dar, so daß Sie für das Detektionssignal (eventuell) ein internes Feld "*d*[73]" definieren müssen.

Die Berechnung der 2^{n+v+1} (= 32 für $n = v = 2$) Augenlinien beruht auf (14.4), wobei die Laufvariable ν alle Werte von $-n$ bis $+n$ annimmt. Für die Amplitudenkoeffizienten a_ν muß ebenfalls ein internes Feld der Länge 5 vereinbart werden. Mit dem zweidimensionalen Feld "*fld*[73] [32]" werden schließlich die berechneten Augenlinien ans Hauptprogramm zurückgeben.

Die Berechnung der Augenöffnung könnte prinzipiell nach Gl. (14.10) erfolgen. In diesem Programm soll jedoch $oef = ö(T_\mathrm{D})$ dadurch bestimmt werden, indem man von allen 2^{n+v+1} Augenlinien die beiden innersten ermittelt. Ist das Auge geschlossen ($ö(T_\mathrm{D}) < 0$), so setzen Sie $oef = 0$.

C:
```
#include <math.h>
void basaug(n, gd, oef, fld)
   long n;
   double *oef
   float gd [289],fld [73] [32];
```

F77:
```
subroutine basaug(n, gd, oef, fld)
integer n
oef
real gd(0:288),fld(0:72,0:31)
```

b) Testen Sie Ihr Unterprogramm *"basaug"* nach dem Übersetzen und Einbinden in das Hauptprogramm *"bas"* (mit dem Aufruf *"mkbas"* bzw. *"mkbas –f"*) durch Wahl von "Standardsystem A" und Menüpunkt "Test des eigenen Programms". Stimmt der Wert für die Augenöffnung $\ddot{o}(T_D)$ mit dem im Programm *"bas"* berechneten Wert überein?

15 Codierte und mehrstufige Übertragung

Inhalt: Im folgenden werden die Besonderheiten der mehrstufigen und/oder codierten Digitalsignalübertragung angesprochen, wozu das bisherige Blockschaltbild um Coder und Decoder erweitert werden muß. Nach einigen grundlegenden Definitionen werden verschiedene Leitungscodes behandelt, wobei zwischen blockweiser und symbolweiser Codierung zu unterscheiden ist. Abschließend wird auf die Berechnung der mittleren und der ungünstigsten Fehlerwahrscheinlichkeit bei Mehrstufensystemen eingegangen.

15.1 Prinzip der codierten Übertragung

Im letzten Kapitel wurde das Sendesignal $s(t)$ ebenso wie das Quellensignal $q(t)$ stets als binär und redundanzfrei vorausgesetzt. Nun werden einige Aspekte der codierten und mehrstufigen Übertragung anhand des Modells von Bild 15.1 diskutiert.

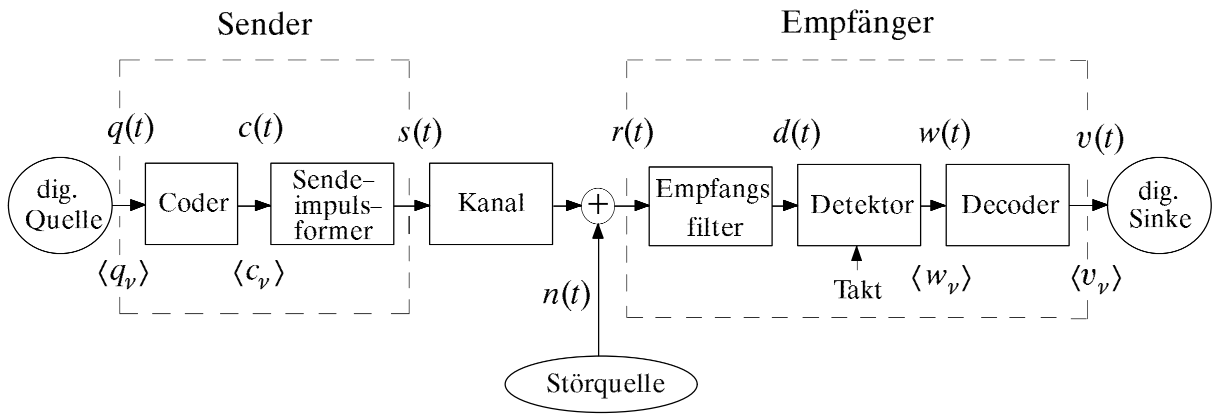


Bild 15.1: Blockschaltbild eines digitalen Basisbandübertragungssystems inklusive Codier– und Decodiereinrichtungen ($\langle q_\nu \rangle \to \langle c_\nu \rangle$ bzw. $\langle w_\nu \rangle \to \langle v_\nu \rangle$).

Das Quellensignal $q(t)$ wird weiterhin als binär und redundanzfrei angenommen. Mit der Quellensymboldauer T_q beträgt dessen Bitrate somit $R_q = 1/T_q$. Im Unterschied zu Bild 14.1 beinhaltet das Blockschaltbild von Bild 15.1 nun zusätzlich eine Codier– und eine Decodiereinrichtung. Erstere erzeugt aus der Quellensymbolfolge $\langle q_\nu \rangle$ gemäß der jeweiligen Codiervorschrift die Codesymbolfolge $\langle c_\nu \rangle$. Das zugehörige Codersignal $c(t)$ sowie das Sendesignal $s(t)$ nach eventueller Sendeimpulsformung seien M–stufig und besitzen jeweils die Symboldauer T. Auch die Symbolfolge $\langle w_\nu \rangle$ nach dem Detektor ist M–stufig. Der Decoder hat nun die Aufgabe, daraus die binäre Sinkensymbolfolge $\langle v_\nu \rangle$ zu generieren. Bei fehlerfreier Übertragung gilt stets $\langle w_\nu \rangle = \langle c_\nu \rangle$ und $\langle v_\nu \rangle = \langle q_\nu \rangle$.

Unter *Codierung* soll allgemein die Manipulation der in einem Nachrichtensignal enthaltenen Redundanz verstanden werden. Man unterscheidet je nach Zielrichtung zwischen Quellen–, Kanal– und Leitungscodierung.

Aufgabe der *Quellencodierung* ist im wesentlichen eine Redundanzreduktion zur Datenkomprimierung, wie sie beispielsweise in der Bildcodierung Anwendung findet. Durch Ausnutzung statistischer Bindungen zwischen einzelnen Punkten eines Bildes bzw.

zwischen den Helligkeitswerten eines Punktes zu verschiedenen Zeiten (bei Bewegtbild-sequenzen) können Verfahren entwickelt werden, die zu einer merklichen Verminderung der Datenmenge bei nahezu gleichbleibender Bildqualität führen. Ein einfaches Beispiel hierfür ist die differentielle Pulscodemodulation (DPCM).

Bei der *Kanalcodierung* wird demgegenüber dadurch eine merkliche Verbesserung des Übertragungsverhaltens erzielt, daß eine am Sender zusätzlich hinzugefügte Redundanz empfangsseitig zur Fehlererkennung oder –korrektur herangezogen wird. Solche Codes sind besonders bei stark gestörten Kanälen von großer Wichtigkeit. Die bekanntesten Vertreter von Codes zur Datensicherung sind *Blockcodes* und *Faltungscodes*. Ihre Beschreibung hat zu einer eigenen Disziplin innerhalb der Nachrichtentechnik geführt, nämlich der Codierungstheorie, die sich in der Vorgehensweise und den mathematischen Hilfsmitteln von anderen nachrichtentechnischen Grundlagenfächern unterscheidet.

Auf Quellen– und Kanalcodierung kann in diesem Praktikum aus Zeitgründen nicht detailliert eingegangen werden. Vielmehr beschränken wir uns im folgenden auf den eher nachrichtentechnischen Aspekt, durch eine geeignete Codierung der Quellensymbole das Sendesignal an die spektralen Eigenschaften des Übertragungsmediums und der Empfangseinrichtungen anzupassen (”*Leitungscodierung*” oder ”*Übertragungscodierung*”).

15.2 AKF und LDS von Digitalsignalen

Ein ungestörtes Digitalsignal $s(t)$ kann in folgender Weise dargestellt werden:

$$s(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot g_s(t-\nu \cdot T) \ . \tag{15.1}$$

Hierbei kennzeichnet der Grundimpuls $g_s(t)$ den Zeitverlauf eines Einzelimpulses, der z.B. rechteck– oder gaußförmig sein kann (vgl. Bild 15.2). Die einzelnen Impulse folgen im Abstand T (*Symboldauer*) aufeinander.

Die statistischen Eigenschaften des Digitalsignals werden in (15.1) durch die dimensionslosen Amplitudenkoeffizienten a_ν beschrieben. Für das Folgende wird festgelegt, daß die möglichen Amplitudenkoeffizienten a_μ (mit $\mu = 1, \ldots , M$) äquidistant seien.

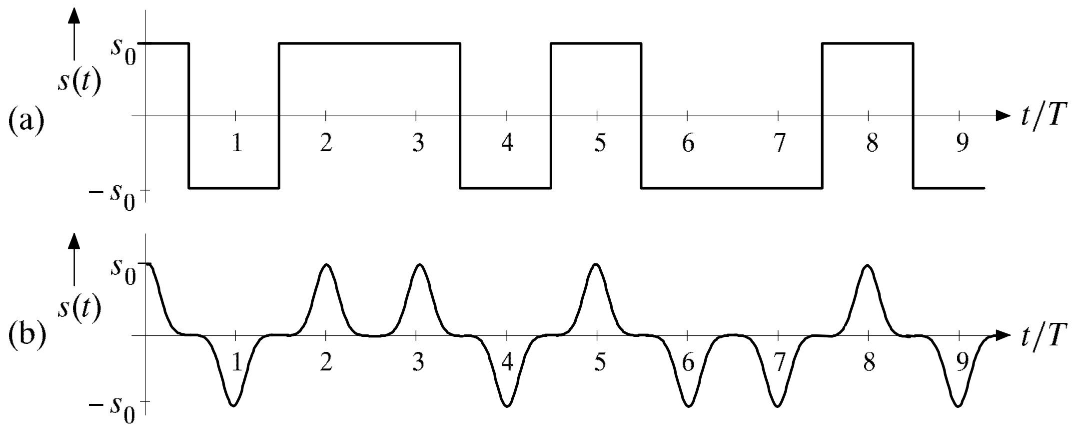


Bild 15.2: Beispiele eines bipolaren Binärsignals mit NRZ–Rechteckimpulsen (a) bzw. Gaußimpulsen (b).

Die unterschiedlichen Indizes dienen zur Unterscheidung der Vorratsmenge $\{a_\mu\}$ von der zeitlichen Folge $\langle a_\nu \rangle$. Bei unipolaren Signalen ($0 \leq a_\mu \leq 1$) gilt somit

$$a_\mu = \frac{\mu - 1}{M - 1} \ . \tag{15.2}$$

Bei bipolaren Signalen ($-1 \leq a_\mu \leq 1$) ist dagegen

$$a_\mu = \frac{2\mu - M - 1}{M - 1} \ . \tag{15.3}$$

Im Sonderfall $M = 2$ (*Binärsignal*) ist dementsprechend $a_\mu \in \{0,1\}$ bzw. $a_\mu \in \{-1, +1\}$.

Aus Bild 15.2 ist zu ersehen, daß ein Digitalsignal im allgemeinen nicht stationär ist. Besonders deutlich wird dies bei den schmalen Gaußimpulsen von Bild 15.2(b). Die Bedingung der Stationarität (vgl. Abschnitt 9.1) ist somit hier nicht erfüllt; z.B. ist zu den Zeitpunkten $\nu \cdot T$ der quadratische Mittelwert $m_2 = s_0^2$, während dazwischen $m_2 \approx 0$ gilt.

Man bezeichnet einen solchen Zufallsprozeß, dessen Momente $m_k(t) = m_k(t+T)$ sich periodisch wiederholen, als *zyklostationär* (vgl. [24]). Viele der für ergodische Prozesse gültigen Regeln kann man mit Einschränkungen auch auf zyklostationäre Prozesse anwenden. Beispielsweise gilt mit (9.6) für die AKF des Digitalsignals gemäß (15.1):

$$\varphi_s(\tau) = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{2T_0} \cdot \int_{-T_0}^{+T_0} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot a_\kappa \cdot g_s(t - \nu \cdot T) \cdot g_s(t + \tau - \kappa \cdot T)\, \mathrm{d}t \ . \tag{15.4}$$

Da die Grenzwert–, Integral– und Summenbildung vertauscht werden darf, kann mit den Substitutionen $N = T_0/T$, $\lambda = \kappa - \nu$ und $t - \nu \cdot T \rightarrow t$ hierfür auch geschrieben werden:

$$\varphi_s(\tau) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \cdot \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{\nu=-N}^{+N} a_\nu \cdot a_{\nu+\lambda} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g_s(t) \cdot g_s(t + \tau - \lambda \cdot T)\, \mathrm{d}t \ . \tag{15.5}$$

Nun werden zur Abkürzung folgende Größen eingeführt:

- Die *diskrete Autokorrelationsfunktion der Amplitudenkoeffizienten* liefert eine Aussage über die linearen statistischen Bindungen der Amplitudenkoeffizienten a_ν und $a_{\nu+\lambda}$:

$$\varphi_a(\lambda) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{\nu=-N}^{+N} a_\nu \cdot a_{\nu+\lambda} \ . \tag{15.6}$$

- Die *Energie–AKF des Grundimpulses* ist ähnlich definiert wie die allgemeine AKF nach Definition (9.6). Es ist jedoch berücksichtigt, daß $g_s(t)$ energiebegrenzt ist, so daß auf die Division durch T_0 und den Grenzübergang $T_0 \rightarrow \infty$ verzichtet werden kann:

$$\varphi_{gs}^{\mathrm{E}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_s(t) \cdot g_s(t + \tau)\, \mathrm{d}t \ . \tag{15.7}$$

Mit diesen beiden Größen kann man für die AKF von (15.5) auch schreiben:

$$\varphi_s(\tau) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \cdot \varphi_a(\lambda) \cdot \varphi_{gs}^{\mathrm{E}}(\tau - \lambda \cdot T) \ . \tag{15.8}$$

15.3 Redundanzfreie Mehrstufensignale

Die Gleichung (15.8) macht deutlich, daß die AKF $\varphi_s(\tau)$ durch zwei Größen bestimmt wird, nämlich durch den Grundimpuls, dessen Einfluß durch seine Energie–AKF gemäß (15.7) beschrieben wird, sowie durch die statistische Abhängigkeit der gesendeten Symbole, die durch die diskrete AKF $\varphi_a(\lambda)$ der Amplitudenkoeffizienten gekennzeichnet ist.

Der AKF–Wert $\varphi_a(0) = \mathrm{E}[a_\nu^2]$ gibt den quadratischen Mittelwert der Koeffizienten an und ist unabhängig von den statistischen Bindungen. Er kann mit (4.18) aus den M möglichen Amplitudenkoeffizienten a_μ und deren Auftrittswahrscheinlichkeiten p_μ berechnet werden. Sind diese alle gleich ($p_\mu = 1/M$), so erhält man mit (15.2) bzw. (15.3):

$$\varphi_a(0) = \frac{1}{M} \cdot \sum_{\mu=1}^{M} a_\mu^2 = \begin{cases} \dfrac{2M-1}{6 \cdot (M-1)} & \text{für unipolare Signale ,} \\[2ex] \dfrac{M+1}{3 \cdot (M-1)} & \text{für bipolare Signale .} \end{cases} \tag{15.9}$$

Dagegen werden die AKF–Werte mit $\lambda \neq 0$ von den statistischen Bindungen zwischen den einzelnen Amplitudenkoeffizienten beeinflußt. Sind die Amplitudenkoeffizienten a_ν statistisch voneinander unabhängig, so gilt für $\lambda \neq 0$:

$$\varphi_a(\lambda) = \mathrm{E}[a_\nu \cdot a_{\nu+\lambda}] = \mathrm{E}[a_\nu] \cdot \mathrm{E}[a_{\nu+\lambda}] = m_1^2 \ . \tag{15.10}$$

Sind weiterhin die möglichen Ampitudenkoeffizienten gleichwahrscheinlich, so ergibt sich der lineare Mittelwert zu $m_1 = ½$ (für unipolare Signale) bzw. zu $m_1 = 0$ (für bipolare Signale). In der Übertragungstechnik bezeichnet man ein Digitalsignal mit den Eigenschaften "gleichwahrscheinlich" und "statistisch unabhängig" als *redundanzfrei*.

Mit den Gleichungen (15.8), (15.9) und (15.10) erhält man somit für die Autokorrelationsfunktion (AKF) und das Leistungsdichtespektrum (LDS) eines M–stufigen bipolaren redundanzfreien Digitalsignals:

$$\varphi_s(\tau) = \frac{M+1}{3 \cdot T \cdot (M-1)} \cdot \varphi_{gs}^{\mathrm{E}}(\tau) \ , \tag{15.11}$$

$$\Phi_s(f) = \frac{M+1}{3 \cdot T \cdot (M-1)} \cdot \Phi_{gs}^{\mathrm{E}}(f) \ . \tag{15.12}$$

Hierbei ist $\Phi_{gs}^{\mathrm{E}}(f)$ das *Energiespektrum* des zeit– und energiebegrenzten Grundimpulses, berechenbar als die Fouriertransformierte der Energie–AKF. Während $\varphi_{gs}^{\mathrm{E}}(\tau)$ die Einheit einer Energie (z.B. V^{2}s) aufweist, hat das Energiespektrum die Einheit V^{2}s/Hz.

Mit dem Amplitudenspektrum $G_s(f)$ •—∘ $g_s(t)$ gilt folgender Zusammenhang:

$$\Phi_{gs}^{\mathrm{E}}(f) = |G_s(f)|^2 \ . \tag{15.13}$$

In der Vorbereitungsfrage V15.1 sollen Sie für das Beispiel eines Rechteckimpulses die Beziehungen zwischen Grundimpuls $g_s(t)$, Amplitudenspektrum $G_s(f)$, Energie–AKF $\varphi_{gs}^{\mathrm{E}}(\tau)$ und Energiespektrum $\Phi_{gs}^{\mathrm{E}}(f)$ explizit angeben.

15.4 Redundante Digitalsignale

Zur Erläuterung des Begriffes *Redundanz* gehen wir von einer M–stufigen digitalen Nachrichtenquelle aus, die ein NRZ–Rechtecksignal entsprechend (15.1) abgibt. Die Folge $\langle a_\nu \rangle$ kennzeichnet die einzelnen Nachrichtensymbole. Vereinbarungsgemäß seien die Amplitudenkoeffizienten $a_\nu \in \{a_1, \dots, a_\mu, \dots, a_\mathrm{M}\}$. Ist das ν–te Folgenelement gleich a_μ, so kann dessen *Informationsgehalt* mit der Wahrscheinlichkeit $p_{\nu\mu} = p(a_\nu = a_\mu)$ wie folgt berechnet werden (vgl. [7]):

$$I_\nu = \mathrm{ld}\frac{1}{p_{\nu\mu}} \qquad \text{mit ld: Logarithmus zur Basis 2} \; . \tag{15.14}$$

Bei der numerischen Auswertung wird die Hinweiseinheit "bit" hinzugefügt.

Je kleiner die Wahrscheinlichkeit, desto größer ist also der Informationsgehalt eines Symbols. Durch Zeitmittelung über alle Elemente der (unendlich langen) Folge $\langle a_\nu \rangle$ erhält man die *Entropie* der digitalen Quelle (vereinfachend sei $\nu = 1, \dots, N$ gesetzt):

$$H_q = \overline{I_\nu} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} I_\nu \; . \tag{15.15}$$

Die Entropie entspricht also dem mittleren Informationsgehalt eines Symbols.

Sind die einzelnen Folgenelemente a_ν statistisch voneinander unabhängig, so sind die Wahrscheinlichkeiten $p_{\nu\mu} = p_\mu$ unabhängig von ν, und man erhält in diesem Sonderfall:

$$H_q = \sum_{\mu=1}^{M} p_\mu \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{p_\mu} \qquad \text{(Einheit: bit)} \; . \tag{15.16}$$

H_q wird maximal, wenn die M Symbolwahrscheinlichkeiten $p_\mu = 1/M$ alle gleich sind. Der Maximalwert der Entropie ist der *Nachrichtengehalt* der M–stufigen Quelle:

$$H_{q,\max} = \mathrm{ld}(M) \qquad \text{(Einheit: bit)} \; . \tag{15.17}$$

Dabei gilt stets die Relation $H_q \le H_{q,\max}$. Zur quantitativen Erfassung der statistischen Bindungen definiert man nun die *relative Redundanz*

$$r_q = \frac{H_{q,\max} - H_q}{H_{q,\max}} \qquad \text{mit } 0 \le r_q \le 1 \; . \tag{15.18}$$

Der Grenzwert $r_q = 0$ gilt für redundanzfreie Quellen bzw. Digitalsignale mit den Eigenschaften "statistisch unabhängig" und "gleichwahrscheinlich" (vgl. Abschnitt 15.3).

Redundanzfreie Digitalsignale sind in der Nachrichtentechnik eher die Ausnahme. Analysiert man beispielsweise einen zur Übertragung anstehenden deutschen Text auf Buchstaben– bzw. Zeichenebene, so ergibt sich aufgrund der unterschiedlichen Häufigkeiten der einzelnen Buchstaben (z.B. ist "e" deutlich häufiger als "u") und aufgrund von statistischen Bindungen (z.B. tritt nach "q" der Buchstabe "u" sehr viel öfter auf als "e") eine relative Redundanz von ca. 80%. Führt man diese Redundanzanalyse dagegen auf Bitebene unter Voraussetzung des ASCII–Zeichensatzes (mit 8 Bit/Zeichen) durch, so steigt die relative Redundanz weiter an.

Übertragen wir nun die Aussagen dieses Abschnitts auf das Modell von Bild 15.1. Die Quellensymbolfolge $\langle q_\nu \rangle$ wird hier als binär ($M_q = 2$) und redundanzfrei vorausgesetzt. Mit der Quellensymboldauer T_q erhält man somit für die zugehörige Bitrate $R_q = H_q/T_q$:

$$R_q = \frac{H_{q,\max}}{T_q} = \frac{\mathrm{ld}(M_q)}{T_q} = \frac{1}{T_q} \quad . \tag{15.19}$$

Häufig ist jedoch die Quellensymbolfolge $\langle q_\nu \rangle$ für die direkte Übertragung der Nachricht über den Kanal ungeeignet. Ist z.B. der Kanal ein Fernsprechkabel, so können darüber aufgrund der durch die Übertrager bedingten unteren Bandbegrenzung auf 300 Hz keine gleichsignalhaltigen Folgen mit ausreichend kleiner Fehlerwahrscheinlichkeit übertragen werden, also weder die lange "+1"–Folge noch die lange "–1"–Folge. Beim Sender müssen in diesem Fall vor der Übertragung besondere Maßnahmen getroffen werden, damit besonders ungünstige Folgen nach Möglichkeit gar nicht erst auftreten.

Diese Aufgabe übernimmt die Codiereinrichtung durch Zusetzen von Redundanz. Hat das Codersignal $c(t)$ – und damit auch das Sendesignal $s(t)$ – die Stufenzahl M_c und die Symboldauer T_c, so ergibt sich für die (äquivalente) Bitrate des codierten Signals:

$$R_c = \frac{\mathrm{ld}(M_c)}{T_c} \quad . \tag{15.20}$$

Es muß stets $R_c \geq R_q$ sein, wobei das Gleichheitszeichen nur bei redundanzfreien Codes gültig ist. Andernfalls erhält man für die relative Coderedundanz:

$$r_c = \frac{R_c - R_q}{R_c} \quad . \tag{15.21}$$

Hinweis: Mit Ausnahme dieses Abschnitts ist vereinfachend $M = M_c$ und $T = T_c$ gesetzt.

Blockweise Codierung

Man unterscheidet grundsätzlich zwischen symbolweiser und blockweiser Codierung. Bei *blockweiser Codierung* wird jeweils einem Block von m_q Quellensymbolen ein Block von m_c Codesymbolen zugeordnet. Bei den meisten Blockcodes unterscheiden sich die beiden Blocklängen m_q und m_c und dementsprechend auch die Symboldauern, wobei gilt: $m_q \cdot T_q = m_c \cdot T_c$. Die relative Redundanz eines Blockcodes beträgt somit allgemein:

$$r_c = \frac{R_c - R_q}{R_c} = 1 - \frac{T_c}{T_q} \cdot \frac{\mathrm{ld}(M_q)}{\mathrm{ld}(M_c)} \quad . \tag{15.22}$$

Je größer die Redundanz des verwendeten Codes ist, desto stärker sind die statistischen Bindungen innerhalb der Folge $\langle c_\nu \rangle$. Ein Beispiel für die Blockcodes ist der *4B3T–Code* ($m_q = 4$, $M_q = 2$, $m_c = 3$, $M_c = 3$), bei dem jeweils 4 Binärsymbole in 3 Ternärsymbole umcodiert werden; die Redundanz beträgt somit ca. 16 %. Wegen $T_c/T_q = 4/3 > 1$ ist das Sendesignal niederfrequenter als bei uncodierter Übertragung, was für viele Kanäle von Vorteil ist. Die Codierung der 16 möglichen Binärblöcke in die maximal 27 Ternärblöcke könnte prinzipiell nach einer festen Codetabelle erfolgen. Um die spektralen Eigenschaften weiter zu verbessern, werden bei manchen 4B3T–Codes jedoch zwei oder mehrere Codetabellen verwendet, deren Auswahl von den zuvor codierten Blöcken abhängt.

Redundanzfreie Codierung

Ein Sonderfall der blockweisen Codierung ist die (M_c–stufige) redundanzfreie Codierung, bei der jeweils ld(M_c) Binärsymbole entsprechend einer festgelegten Codetabelle durch ein M_c–wertiges Codesymbol ersetzt werden. Eine vollständige redundanzfreie Codierung ist allerdings nur möglich, wenn M_c eine Potenz zur Basis 2 ist.

Der Übergang auf ein mehrstufiges Sendesignal (bei gleichbleibender Bitrate) kann eine deutliche Verbesserung des Übertragungsverhaltens zur Folge haben, da hierbei die Symbolrate $1/T_c$ gegenüber der Binärübertragung um den Faktor $1/\mathrm{ld}(M_c)$ reduziert wird. Dies bewirkt u.a. ein schmaleres Leistungsdichtespektrums $\Phi_s(f)$, was bei vielen Kanälen von Vorteil ist, insbesondere dann, wenn die Kanaldämpfung mit der Frequenz ansteigt (vgl Versuch D15.4).

Symbolweise Codierung

Bei symbolweiser (*symbol–by–symbol*) Codierung wird mit jedem ankommenden Quellensymbol q_ν ein Codesymbol c_ν erzeugt, das außer vom aktuellen Symbol q_ν auch von den N_c vorangegangenen Symbolen abhängen kann; N_c ist dabei die Ordnung des Codes. Typisch für die symbolweise Codierung ist die Übereinstimmung von Coder– und Quellensymboldauer ($T_c = T_q$).

Eine wichtige Klasse von Leitungscodes sind die sogenannten *Pseudoternärcodes*, die aus einem redundanzfreien Binärsignal $q(t)$ ein redundantes Ternärsignal $c(t)$ erzeugen. Durch die Erhöhung der Stufenzahl von $M_q = 2$ auf $M_c = 3$ bei gleicher Symboldauer wird Redundanz hinzugefügt; die relative Coderedundanz ergibt sich zu $r_c \approx 37\%$ (vgl. V15.2).

Bild 15.3 zeigt das Blockschaltbild eines solchen Pseudoternärcoders, bestehend aus einem nichtlinearen Vorcodierer und dem linearen Codiernetzwerk. Zur Verdeutlichung dieser beiden Anteile sind das Verzögerungsglied ($N_c \cdot T_c$) und der Gewichtsfaktor k_c (je nach Code $+1$ oder -1) zweimal gezeichnet.

Der Vorcodierer gewinnt durch eine Modulo–2–Addition (Antivalenz) zwischen den Symbolen q_ν und $k_c \cdot b_{\nu-N_c}$ die binär vorcodierten Symbole $b_\nu \in \{-1, +1\}$, die wie die Quellensymbole q_ν statistisch voneinander unabhängig sind. Durch diese Vorcodierung wird verhindert, daß es nach einem Übertragungsfehler zu einer Fehlerfortpflanzung kommt. Außerdem gestattet sie eine einfachere Realisierung des Decoders.

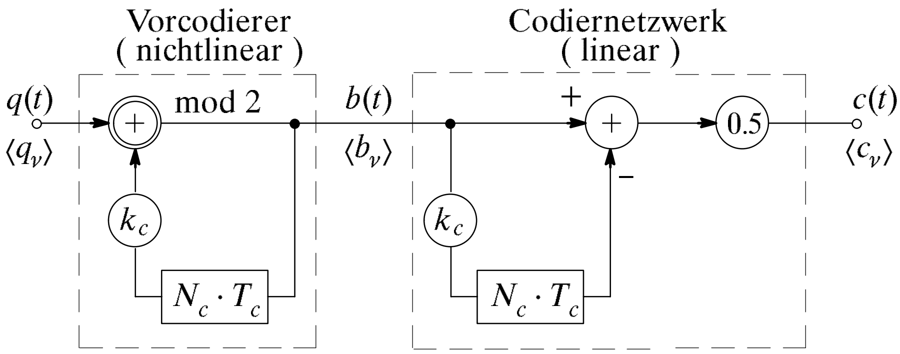


Bild 15.3: Erzeugung eines Pseudoternärcodes.

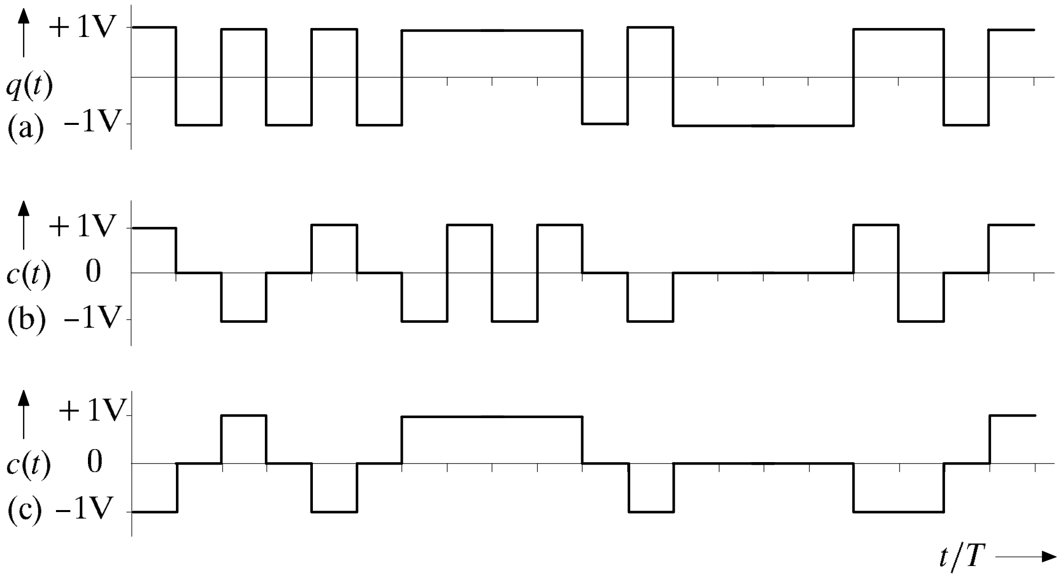


Bild 15.4: Quellensignal (a) und die Codersignale bei Pseudoternärcodierung mit dem AMI–Code (b) und dem Duobinärcode (c).

Die eigentliche Umcodierung von binär auf ternär bewirkt das lineare Codiernetzwerk durch die Verzögerung um $N_c \cdot T_c$ und eine analoge Subtraktion, so daß für das Ausgangssignal gilt:

$$c(t) = \frac{1}{2} \cdot \big(b(t) - k_c \cdot b(t - N_c \cdot T_c)\big) \ . \tag{15.23}$$

Da sowohl das vorcodierte Signal $b(t)$ als auch der Koeffizient k_c entweder $+1$ oder -1 ist, kann das codierte Signal $c(t)$ die (normierten) Werte $+1$, 0 und -1 annehmen.

Die einzelnen Pseudoternärcodes unterscheiden sich in den Parametern N_c und k_c. Der bekannteste Vertreter ist der *Bipolarcode 1. Ordnung* mit den Codeparametern $N_c = 1$ und $k_c = 1$, der auch unter der Bezeichnung *AMI–Code* (von: *Alternate Mark Inversion*) bekannt ist. Bild 15.4(b) zeigt das Signal $c(t)$, das sich durch AMI–Codierung des in Bild 15.4(a) dargestellten Binärsignals ergibt. Es ist zu erkennen, daß beim AMI–Code eine binäre "O" am Eingang stets zum Amplitudenkoeffizienten $a_\nu = 0$ führt. Das Binärsymbol "L" wird dagegen alternierend mit $a_\nu = +1$ und $a_\nu = -1$ dargestellt.

Betrachten wir nun das Leistungsdichtespektrum. Dazu setzen wir voraus, daß das Quellensignal $q(t)$ binär und redundanzfrei sei. Das Signal $b(t)$ ist dann ebenfalls redundanzfrei, das heißt, daß der nichtlineare Vorcodierer das Leistungsdichtespektrum nicht beeinflußt. Dieses wird ausschließlich durch das lineare Netzwerk mit dem Frequenzgang

$$H_C(f) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - k_c \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot N_c T_c}\right) \tag{15.24}$$

bestimmt. Daraus folgt unter Berücksichtigung von $k_c = \pm 1$ für das Leistungsdichtespektrum $\Phi_a(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\ \varphi_a(\lambda \cdot T_c)$ der Amplitudenkoeffizienten:

$$\Phi_a(f) = |H_C(f)|^2 = \frac{1}{2} \cdot \big(1 - k_c \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot N_c \cdot T_c)\big) \ . \tag{15.25}$$

Das LDS $\Phi_a(f)$, häufig auch als *normiertes Leistungsdichtespektrum* bezeichnet, liefert insbesondere Aussagen über die Gleichsignalfreiheit eines codierten Signals. Ein Code heißt dann *gleichsignalfrei*, wenn $\Phi_a(0) = 0$ ist. Dies bedeutet nicht nur, daß das Codersignal $c(t)$ keinen Gleichanteil enthält, was einer Diracfunktion $\delta(f)$ im LDS entsprechen würde, sondern auch, daß für jedes beliebige (jedoch zeitlich unendlich ausgedehnte) Mustersignal die Anzahl der positiven und negativen Amplitudenkoeffizienten gleich ist. Bei einem solchen Code ist auch dann eine Datenübertragung möglich, wenn durch das Übertragungsverhalten des Mediums bzw. der technischen Empfangseinrichtungen (z.B. kapazitive Kopplungen) eine Gleichsignalübertragung verhindert wird.

Beim AMI–Code ($N_c = 1, k_c = 1$) ergibt sich $\Phi_a(f) = \sin^2(\pi \cdot f \cdot T_c)$. Aus der Darstellung von Bild 15.5(a) ist ersichtlich, daß der AMI–Code ein gleichsignalfreier Code ist, was in der Vergangenheit seine Bedeutung für die digitale Übertragungstechnik ausmachte. Es ist allerdings anzumerken, daß beim AMI–Code der Vorteil der Gleichsignalfreiheit oft durch einen deutlichen Anstieg der Fehlerwahrscheinlichkeit erkauft werden muß.

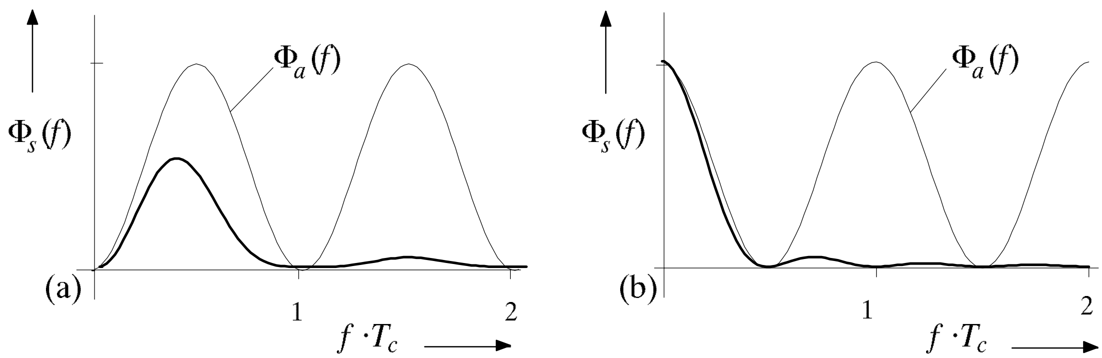


Bild 15.5: Leistungsdichtespektren des AMI–Codes (a) und des Duobinärcodes (b).

In Bild 15.5 ist weiterhin das LDS $\Phi_s(f)$ eingezeichnet. Zu diesem gelangt man durch Multiplikation von $\Phi_a(f)$ mit dem Energiespektrum $\Phi_{gs}^{E}(f)$ des Rechteckimpulses.

Ein weiterer Pseudoternärcode ist der sogenannte *Duobinärcode* ($N_c = 1, k_c = -1$), dessen Codiervorschrift aus Bild 15.4(c) hervorgeht. Dieser ist nicht gleichsignalfrei, d.h. es gibt im codierten Signal $c(t)$ im Gegensatz zum AMI–Code auch beliebig lange Plus– bzw. Minusfolgen. Dementsprechend ist hier $\Phi_a(0) \neq 0$.

Dagegen tritt die hinsichtlich Impulsinterferenzen (vgl. Versuch D15.3) oft störende alternierende Symbolfolge "... +1, –1, +1, –1, +1, ..." nicht auf, was sich im normierten Leistungsdichtespektrum durch $\Phi_a(1/(2 \cdot T_c)) = 0$ auswirkt.

Der Vollständigkeit halber sei noch der *Bipolarcode 2. Ordnung* erwähnt, bei dem bis zu zwei Symbole gleicher Polarität ("+1" bzw. "–1") aufeinanderfolgen können. Da auch hier die Anzahl gleichartiger Symbole begrenzt ist, ist dieser Code ebenso wie der AMI–Code gleichsignalfrei. Im Versuch D15.2 werden die Eigenschaften des Bipolarcodes 2. Ordnung noch eingehend untersucht.

Im folgenden wird die Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit unter Berücksichtigung von Coder und Decoder beschrieben. Zur Vereinfachung der Gleichungen wird hierbei wieder $T_c = T$ und $M_c = M$ gesetzt.

15.5 Fehlerwahrscheinlichkeit bei Mehrstufensystemen

Bei codierter und/oder mehrstufiger Übertragung unterscheidet man zwischen der Symbolfehlerwahrscheinlichkeit und der Bitfehlerwahrscheinlichkeit. Die erstere bezieht sich auf die codierten und/oder mehrstufigen Folgen $\langle c_\nu \rangle$ und $\langle w_\nu \rangle$:

$$p_{\mathrm{S}} = \mathrm{E}[p(w_\nu \neq c_\nu)] = \overline{p(w_\nu \neq c_\nu)} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=1}^{N} p(w_\nu \neq c_\nu) \; . \tag{15.26}$$

Die links angegebene Berechnungsmöglichkeit als Erwartungswert E[...] entspricht einer Scharmittelung, während die überstreichende Linie den Zeitmittelwert kennzeichnet.

Im Gegensatz dazu beschreibt die Bitfehlerwahrscheinlichkeit die Verfälschungen bezüglich der binären Folgen $\langle q_\nu \rangle$ und $\langle v_\nu \rangle$, also hinsichtlich Quellen– und Sinkensignal:

$$p_{\mathrm{B}} = \mathrm{E}[p(v_\nu \neq q_\nu)] = \overline{p(v_\nu \neq q_\nu)} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=1}^{N} p(v_\nu \neq q_\nu) \; . \tag{15.27}$$

Nur bei redundanzfreien Binärsystemen gilt $p_{\mathrm{B}} = p_{\mathrm{S}}$. In allen anderen Fällen muß zur Berechnung der Bitfehlerwahrscheinlichkeit auch die Zuordnung zwischen Quellen– und Codesymbolen berücksichtigt werden, was im folgenden am Beispiel eines redundanzfreien Quaternärsystems ($M = 4$) dargestellt werden soll.

Der hier betrachtete Coder faßt je zwei aufeinanderfolgende binäre Quellensymbole $q_{\nu-1}$ und q_ν zu einem Quaternärsymbol c_ν zusammen, so daß das rechteckförmige Sendesignal $s(t)$ vier verschiedene Amplitudenwerte annehmen kann.

Ist das binäre Quellensignal $q(t)$ redundanzfrei, so gilt dies auch für die Signale $c(t)$ und $s(t)$. Die Symboldauer des Sendesignals ist hier jedoch doppelt so groß als bei der Binärübertragung ($T = 2 \cdot T_q$), und somit ist die Symbolrate $1/T$ auch nur halb so groß.

Die Detektion eines vierstufigen Digitalsignals $d(t)$ erfordert einen Schwellenwertentscheider mit $M - 1 = 3$ Entscheiderschwellen. Dadurch wird der gesamte Wertebereich des Detektionssignals $d(t)$ in Teilbereiche unterteilt, die den vier möglichen Amplitudenstufen des Signals $w(t)$ zugeordnet werden.

Zunächst sei vorausgesetzt, daß das Gesamtspektrum $G_d(f) = G_s(f) \cdot H_{\mathrm{K}}(f) \cdot H_{\mathrm{E}}(f)$ eine $\cos^2$–Charakteristik aufweist, so daß der Detektionsgrundimpuls $g_d(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G_d(f)$ äquidistante Nulldurchgänge im Symbolabstand T besitzt (vgl. Abschnitt 16.1). Verwendet man die Abkürzung $g_0 = g_d(0)$, so kann das Detektionsnutzsignal $d_{\mathrm{S}}(t)$ zu den Detektionszeitpunkten nur vier verschiedene Werte annehmen, nämlich $\pm g_0$ und $\pm g_0/3$.

Bild 15.6(a) zeigt das Augendiagramm (ohne Störungen) dieses quaternären Nyquist–Systems. Die Abmessungen der $M - 1 = 3$ Augenöffnungen sind sowohl in vertikaler als auch in horizontaler Richtung identisch, auch wenn die Augenform unterschiedlich ist.

Weiter ist aus diesem Bild ersichtlich, daß die optimalen Schwellenwerte in der Mitte zwischen den möglichen Detektionsnutzabtastwerten liegen. Beim quaternären Nyquist–System ergeben sich somit die Werte 0 bzw. $\pm 2/3 \cdot g_0$. Das mittlere Auge ist symmetrisch zur Entscheiderschwelle E_2, während die beiden äußeren Augen unsymmetrisch zu ihren jeweiligen Schwellenwerten E_1 bzw. E_3 sind.

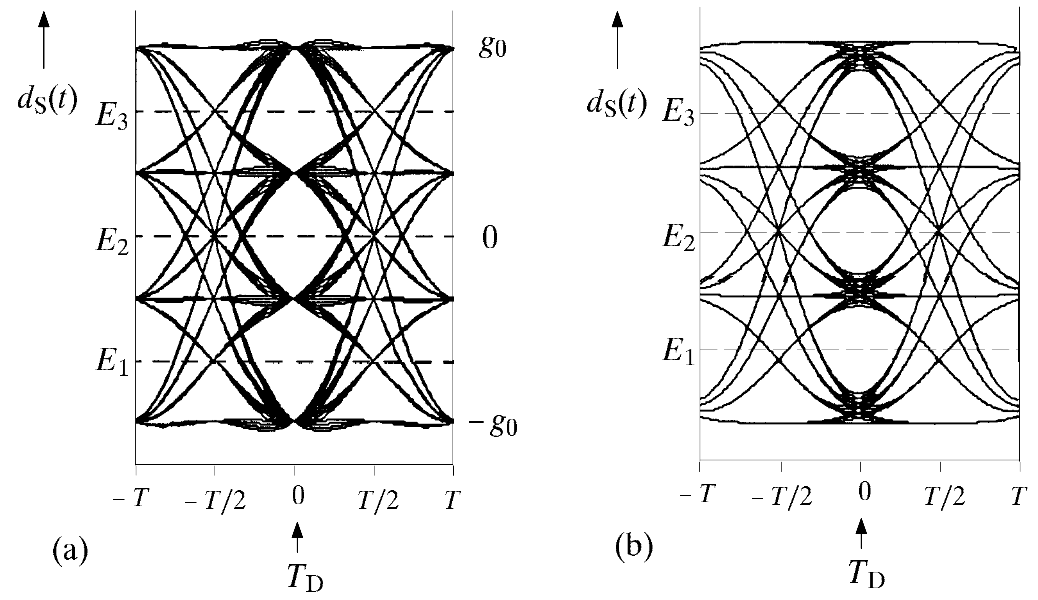


Bild 15.6: Augendiagramme des Detektionsnutzsignals $d_S(t)$ für ein redundanzfreies Quaternärsystem ohne (a) bzw. mit Impulsinterferenzen (b).

Die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit gemäß (15.26) kann aus dem Augendiagramm und dem Störeffektivwert des Detektionsstörsignals $d_N(t)$ ermittelt werden. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß die beiden äußeren Symbole im Gegensatz zu den inneren nur in jeweils eine Richtung verfälscht werden können. Somit erhält man mit dem konstanten Abstand $g_0/3$ zwischen Nutzabtastwert und Entscheiderschwelle sowie der Streuung (Effektivwert) σ_d des Detektionsstörsignals:

$$p_S = \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot Q\left(\frac{g_0/3}{\sigma_d}\right) + 2 \cdot 2 \cdot Q\left(\frac{g_0/3}{\sigma_d}\right)\right) = \frac{3}{2} \cdot Q\left(\frac{g_0/3}{\sigma_d}\right) . \qquad (15.28)$$

Dagegen ergibt sich für das entsprechende Binärsystem: $p_S = Q(g_0/\sigma_d)$. Der Faktor ⅓ im Argument der Q–Funktion berücksichtigt die prinzipielle Verkleinerung der vertikalen Augenöffnung durch die quaternäre Entscheidung, während die Multiplikation mit $3/2$ aufgrund der größeren Fehlerwahrscheinlichkeit der inneren Symbole erforderlich ist.

Da der Störeffektivwert σ_d bei mehrstufiger Übertragung deutlich niedriger sein kann als bei Binärübertragung, darf aus (15.28) aber nicht geschlossen werden, daß die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit beim Quaternärsystem stets größer als beim Binärsystem ist.

Zur Berechnung der Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_B muß nun noch die Zuordnung zwischen Quellen– und Codesymbolen berücksichtigt werden. Zunächst betrachten wir die *Dualcodierung*. Bild 15.7(a) zeigt die entsprechende Zuordnung zwischen dem Quellensymbolpaar $(q_{\nu-1}, q_\nu)$ und dem quaternären Codesymbol $c_\nu \in \{-1, -1/3, +1/3, +1\}$. Empfangsseitig wird die entsprechende Zuordnung angenommen.

Das Modell von Bild 15.7 berücksichtigt auch die unterschiedlichen Verfälschungswahrscheinlichkeiten der Quaternärsymbole, wobei für $p = Q(g_0/(3 \cdot \sigma_d))$ zu setzen ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß zwei oder drei Entscheiderschwellen überschritten werden, ist hierbei als vernachlässigbar klein vorausgesetzt.

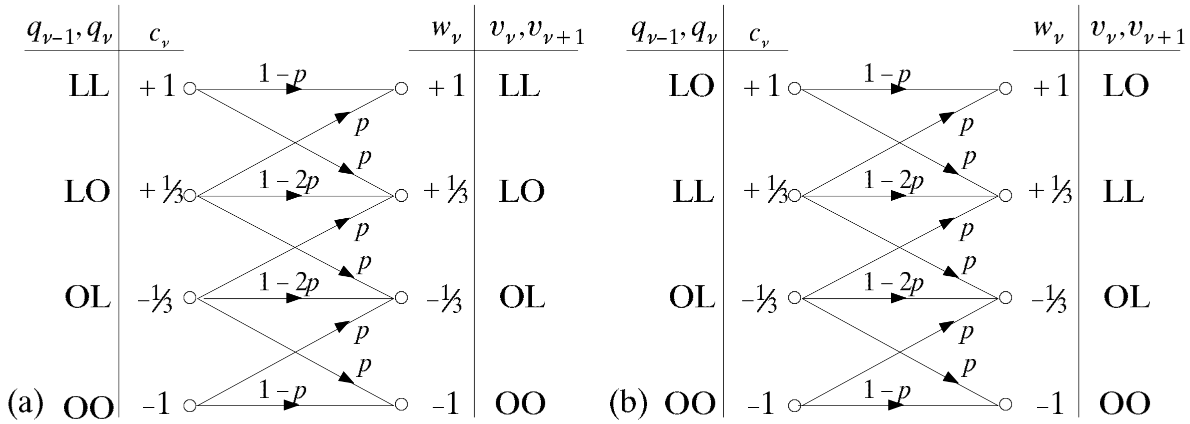


Bild 15.7: Modell für ein quaternäres Übertragungssystem (ohne Impulsinterferenzen) bei Dualcodierung (a) bzw. Gray–Codierung (b).

Es ist zu erkennen, daß bei Dualcodierung ein Symbolfehler ($w_\nu \neq c_\nu$) ein oder zwei Bitfehler ($v_\nu \neq q_{\nu-1}$) zur Folge hat. Die unterschiedlichen Indizes sollen deutlich machen, daß durch Coder und Decoder aus Kausalitätsgründen eine Verzögerung um eine Bitdauer in Kauf genommen werden muß.

Von den sechs Verfälschungsmöglichkeiten auf Quaternärsymbolebene führen vier zu jeweils einem und nur die beiden inneren ($-⅓ \leftrightarrows ⅓$) zu zwei Bitfehlern. Daraus folgt für die Fehlerwahrscheinlichkeit: $p_\mathrm{B} = 1/4 \cdot \bigl(4 \cdot p \,+\, 2 \cdot 2 \cdot p\bigr)/2 \,=\, p$. Der Faktor 2 im Nenner berücksichtigt, daß ein Quaternärsymbol durch zwei Binärsymbole dargestellt wird.

Bei der *Gray–Codierung* von Bild 15.7(b) ist die Zuordnung zwischen den Binär– und den Quaternärsymbolen so gewählt, daß jeder Symbolfehler genau einen Bitfehler zur Folge hat. Damit ergibt sich für diese Zuordnung $p_\mathrm{B} = ½ \cdot p_\mathrm{S} = ¾ \cdot p$.

Bei redundanzfreier Codierung unterscheiden sich p_S und p_B maximal um den Faktor $\mathrm{ld}(M)$. Bei Berücksichtigung von Fehlerkorrektur ergeben sich etwas größere Unterschiede, wobei der Zusammenhang nur in Sonderfällen analytisch angebbar ist. Im allgemeinen müssen hier numerische Ergebnisse durch Simulation gewonnen werden.

Auch bei den Mehrstufensystemen kann als obere Schranke für die mittlere Symbolfehlerwahrscheinlichkeit p_S die Näherung p_U gemäß (14.9) herangezogen werden. Bei einem Nyquist–System oder bei Vernachlässigung vorhandener Impulsinterferenzen ist für die vertikale Augenöffnung folgender Wert einzusetzen:

$$\ddot{o}(T_\mathrm{D}) \;=\; \frac{2 \cdot g_d(T_\mathrm{D})}{M-1} \; . \tag{15.29}$$

Diese ist demnach um den Faktor M–1 kleiner als bei Binärübertragung. Unter Berücksichtigung von Impulsinterferenzen (Grundimpuls mit v Vor– und n Nachläufern) ergibt sich ein Augendiagramm wie in Bild 15.6(b) und man erhält analog zu (14.10):

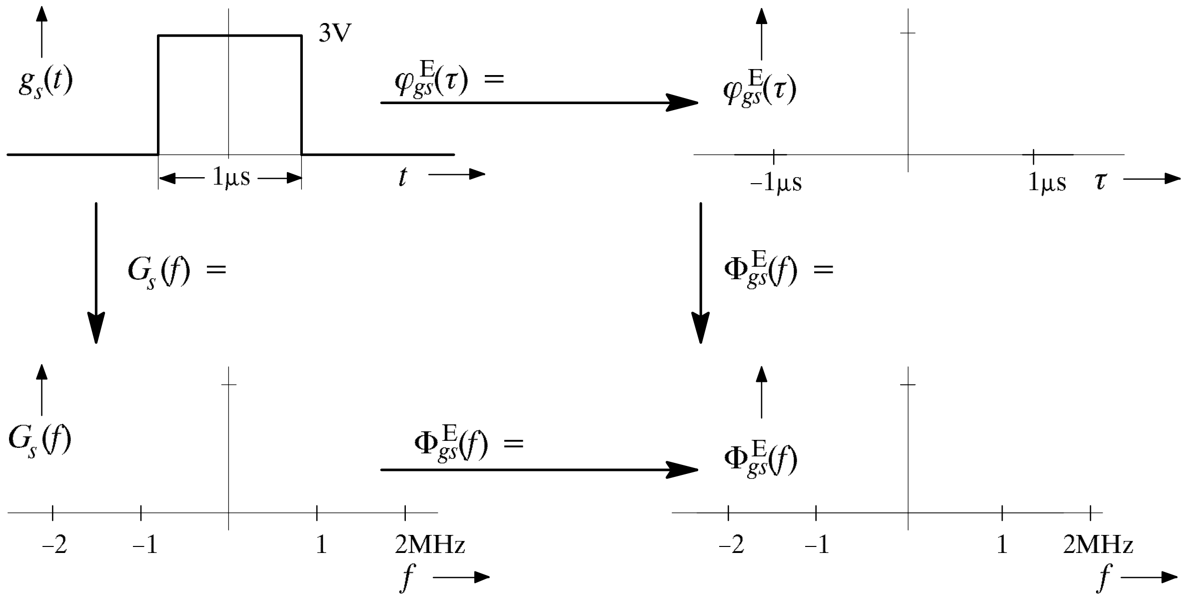
$$\ddot{o}(T_\mathrm{D}) \;=\; 2 \cdot \Bigl[\frac{g_d(T_\mathrm{D})}{M-1} - \sum_{\nu=1}^{+n} |g_d(T_\mathrm{D} + \nu \cdot T)| - \sum_{\nu=1}^{+v} |g_d(T_\mathrm{D} - \nu \cdot T)|\Bigr] \; . \tag{15.30}$$

Für einen redundanten Code ist die Berechnung der Augenöffnung schwieriger. Hier ist zu berücksichtigen, welche Symbolfolgen im codierten Signal überhaupt möglich sind.

15.6 Vorbereitungsfragen

V15.1: Gegeben sei ein rechteckförmiger Grundimpuls $g_s(t)$ mit der Amplitude $s_0 = 3\text{V}$ und der Dauer $T = 1\mu\text{s}$.

a) Vervollständigen Sie die nachfolgende Skizze, die den Zusammenhang zwischen Grundimpuls, Amplitudenspektrum, Energie–AKF und Energiespektrum aufzeigen soll. Beschriften Sie insbesondere auch die Ordinaten.



b) Wie lautet die Autokorrelationsfunktion $\varphi_s(\tau)$ und das Leistungsdichtespektrum $\Phi_s(f)$ eines redundanzfreien bipolaren Binärsignals $s(t)$ mit obigem Grundimpuls? Wie groß ist dessen Leistung P_S (auf 1Ω bezogen)?

c) Wie lauten obige Funktionen bei einem redundanzfreien bipolaren Quaternärsignal mit gleicher Symboldauer T? Wie groß ist hier die Leistung P_S?

d) Interpretieren Sie die Ergebnisse von b) und c). Wie groß sind die jeweiligen Bitraten? Was ändert sich, wenn der Vergleich der Leistungsdichtespektren von Binär– und Quaternärsystem unter der Voraussetzung gleicher Bitraten basiert?

V15.2: Betrachten Sie nun die in Abschnitt 15.4 beschriebenen Pseudoternärcodes.

a) Berechnen Sie die relative Redundanz der Pseudoternärcodes.

b) Gegeben sei eine Binärfolge $\langle q_\nu \rangle$ entsprechend der nachfolgenden Tabelle (bipolare Darstellung). Codieren Sie diese gemäß dem Duobinärcode. Vorbelegung: $b_0 = -1$.

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_ν	+1	–1	+1	+1	–1	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1
b_ν												
c_ν												

c) Codieren Sie die gleiche Binärfolge gemäß dem Bipolarcode 1. Ordnung (AMI–Code). Stimmt die Codefolge $\langle q_\nu \rangle$ mit der AMI–Codiervorschrift überein?

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_ν	+1	–1	+1	+1	–1	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1
b_ν												
c_ν												

d) Wie groß sind bei beiden Codes die drei Auftrittswahrscheinlichkeiten?

$p(c_\nu = +1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$p(c_\nu = 0) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$p(c_\nu = -1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

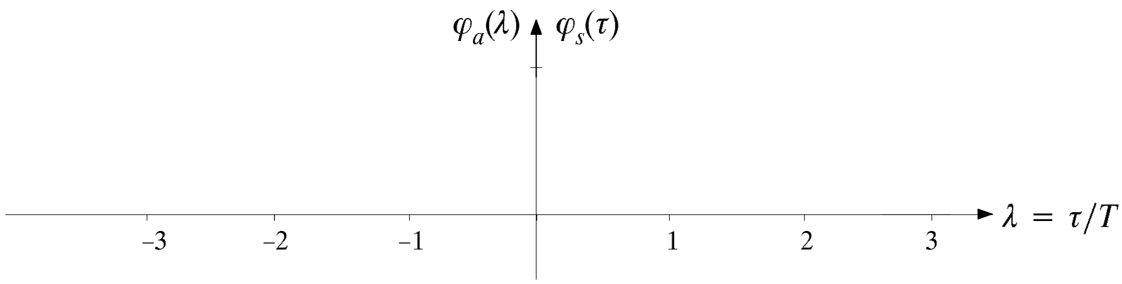
e) Nun soll für den AMI–Code die diskrete AKF $\varphi_a(\lambda)$ der Amplitudenkoeffizienten ermittelt werden. Bestimmen Sie zunächst den AKF–Wert $\varphi_a(0)$.

f) Wie groß sind die diskreten AKF–Werte $\varphi_a(\lambda)$ für $\lambda > 1$?

g) Berechnen Sie den AKF–Wert $\varphi_a(1)$ des AMI–Codes mittels nachfolgender Tabelle.

c_ν	$c_{\nu+1}$	$c_\nu \cdot c_{\nu+1}$	$p(c_\nu \cap c_{\nu+1}) =$ $p(c_\nu) \cdot p(c_{\nu+1} \mid c_\nu)$
0	0		
0	+1		
0	−1		
+1	0		
+1	+1		
+1	−1		
−1	0		
−1	+1		
−1	−1		

h) Skizzieren Sie $\varphi_a(\lambda)$ und $\varphi_s(\tau)$ in das nachfolgende Diagramm.



V15.3: Gegeben sei ein redundanzfreies Quaternärsystem, das ansonsten identisch mit dem Basisbandsystem gemäß V14.1 ist, nämlich

- zufällige Quellensymbolfolge mit der Bitrate $R_q = 100$ Mbit/s,
- rechteckförmiger Sendegrundimpuls mit der Amplitude $s_0 = 2$V,
- AWGN–Kanal mit der Rauschleistungsdichte $N_0 = 10^{-9}$ V^2/Hz
- gaußförmiges Empfangsfilter mit der Grenzfrequenz $f_{\mathrm{E}} = 40$ MHz,
- optimaler Detektionszeitpunkt T_{D} und optimale Entscheiderschwellen E_1 ... E_3.

a) Wie groß ist die Sendeimpulsdauer $T = T_c$?

b) Berechnen Sie die Grundimpulswerte $g_d(0)$, $g_d(\pm 10\,\text{ns})$ und $g_d(\pm 20\,\text{ns})$. Wie erklärt sich der gegenüber V14.1 unterschiedliche Verlauf?

c) Wie groß ist die vertikale Augenöffnung $\ddot{o}(T_{\mathrm{D}})$? Vernachlässigen Sie für diese Berechnung ab ± 30ns alle Vor– und Nachläufer des Detektionsgrundimpulses $g_d(t)$.

d) Berechnen Sie die ungünstigste Fehlerwahrscheinlichkeit p_{U}. Begründen Sie, warum der Störeffektivwert gegenüber der Aufgabe V14.1 nicht verändert wird. Wie groß ist der Störabstandsverlust gegenüber dem Binärsystem?

15.7 Versuchsdurchführung

Die Versuche D15.1 und D15.2 können mit dem Programm *"cod"*, die danach folgenden Aufgaben mit dem Programm *"bas"* durchgeführt werden.

D15.1: Bei Wahl des Menüpunktes 1 wird die Funktionsweise der Pseudoternärcodes verdeutlicht, mit Menüpunkt 2 deren AKF und LDS angezeigt. Die Voreinstellung der Quellensymbolfolge geschieht bei *"wählen"* entsprechend V15.2. Setzen Sie $N = 50\,000$.

a) Kontrollieren Sie die Ergebnisse der Vorbereitungsfrage V15.2(b) und (c).

Duobinärcode:

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_ν	+1	–1	+1	+1	–1	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1
c_ν (berechnet)												
c_ν (Programm)												

AMI–Code:

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_ν	+1	–1	+1	+1	–1	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1
c_ν (berechnet)												
c_ν (Programm)												

b) Betrachten Sie nun AKF und LDS (Menüpunkt 2) von redundanzfreiem Binärcode, Duobinärcode und AMI–Code und vervollständigen Sie die nachfolgende Tabelle anhand der theoretischen Werte.

Codierung	Ordnung	$\varphi_a(0)$	$\varphi_a(\pm 1)$	$\varphi_a(\pm 2)$	gleichsignalfrei
binär bipolar redundanzfrei					
Duobinärcode					
AMI–Code					

c) Bestimmen Sie jeweils das LDS $\Phi_a(f)$ durch Fouriertransformation der diskreten AKF $\varphi_a(\lambda \cdot T)$ und vergleichen Sie die Ergebnisse mit Bild 15.5.

d) Welche der nachfolgenden Codesymbolfolgen $\langle c_\nu \rangle$ sind beim AMI–Code möglich? Geben Sie – wenn möglich – auch die dazugehörige Quellensymbolfolge $\langle q_\nu \rangle$ an. *Hinweis:* Im Programm ist implizit $b_0 = -1$ vorausgesetzt.

lange "+1"–Folge: ..... Quellensymbolfolge: ....

lange "−1"–Folge: ..... Quellensymbolfolge: ....

lange "0"–Folge: ..... Quellensymbolfolge: ....

alternierende Folge: ..... Quellensymbolfolge: ....

e) Welche der nachfolgenden Codesymbolfolgen $\langle c_\nu \rangle$ sind beim Duobinärcode möglich? Geben Sie – wenn möglich – wieder die dazugehörige Quellensymbolfolge $\langle q_\nu \rangle$ an.

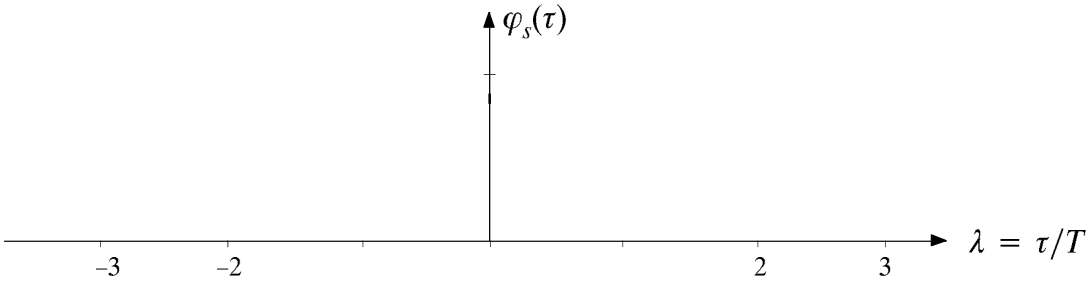
lange "+1"–Folge: ..... Quellensymbolfolge: ....

lange "−1"–Folge: ..... Quellensymbolfolge: ....

lange "0"–Folge: ..... Quellensymbolfolge: ....

alternierende Folge: ..... Quellensymbolfolge: ....

f) Wie lautet die AFK $\varphi_s(\tau)$ und das LDS $\Phi_s(f)$ des duobinärcodierten Sendesignals, wenn als Sendegrundimpuls $g_s(t)$ ein rechteckförmiger Impuls der Breite $T = 1\mu$s und der Amplitude $s_0 = 1$V verwendet wird? Skizzieren Sie $\varphi_s(\tau)$ und vergleichen Sie das hier berechnete LDS $\Phi_s(f)$ mit Bild 15.5(b).



D15.2: Betrachten Sie nun im Programm *"cod"* den Bipolarcode 2. Ordnung.

a) Wählen Sie wieder die gleiche Binärfolge $\langle q_\nu \rangle$ wie in D15.1(a) und (b). Codieren Sie diese entsprechend dem Bipolarcode 2. Ordnung. Vorbelegung: $b_{-1} = b_0 = -1$.

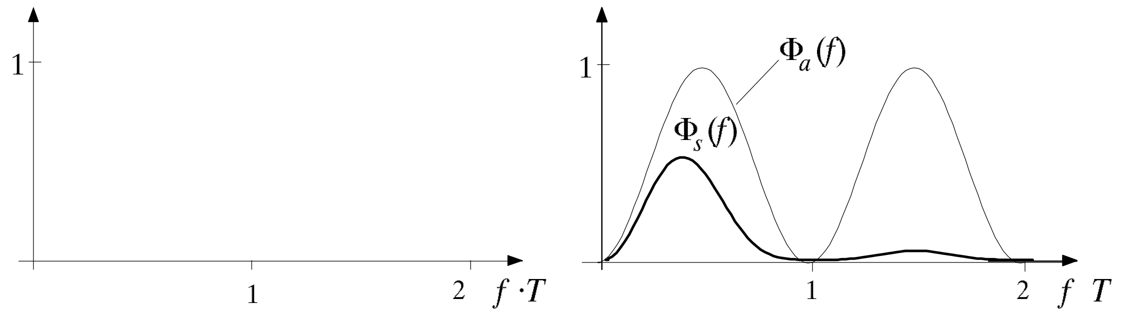
ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_ν	+1	–1	+1	+1	–1	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1
b_ν												
c_ν												

b) Betrachten Sie nun die AKF des Bipolarcodes zweiter Ordnung im Vergleich zum AMI–Code (Bipolarcode erster Ordnung). Vervollständigen Sie die nachfolgende Tabelle anhand der theoretischen Werte.

Codierung	$\varphi_a(0)$	$\varphi_a(\pm 1)$	$\varphi_a(\pm 2)$	$\varphi_a(\pm 3)$
AMI–Code				
Bipolarcode 2. Ordnung				

c) Skizzieren Sie die Leistungsdichtespektren $\Phi_a(f)$ und $\Phi_s(f)$ in das linke Diagramm. Rechts sind zum Vergleich die Kurvenverläufe des AMI–Codes eingezeichnet.

Bipolarcode 2. Ordnung AMI–Code (Bipolarcode 1. Ordnung)



d) Welche Codersymbolfolge $\langle c_\nu \rangle$ ist beim Bipolarcode zweiter Ordnung im Gegensatz zum AMI–Code nicht möglich? Begründung.

D15.3: Diese und die nächste Aufgabe sollen mit dem Programm *"bas"* durchgeführt werden. Wählen Sie hierbei ausgehend vom *Standardsystem A* folgende Einstellungen:

- zufällige Quellensymbolfolge,
- AMI–Code bzw. Duobinärcode,
- bipolare Rechtecksendeimpulse (Amplitude 1 V, normierte Impulsdauer $T_s/T = 1$),
- koaxialer Übertragungskanal mit charakteristischer Dämpfung $a_K = 60$ dB bzw. 6.9 N,
- weißes Rauschen mit der normierten Rauschleistungsdichte $N_0/T = 2 \cdot 10^{-7}$,
- gaußförmiger Impulsformer mit der normierten Grenzfrequenz $f_I \cdot T = 0.4$,
- optimale Entscheiderschwellen und optimaler Detektionszeitpunkt $T_D = 0$.

a) Betrachten Sie für den AMI–Code und den Duobinärcode das Augendiagramm des ungestörten Detektionssignals (jeweils ein Vor– und Nachläufer). Bestimmen Sie die ungünstigsten Symbolfolgen, die zu den oberen und unteren Begrenzungslinien des oberen Auges führen. Berücksichtigen Sie die jeweilige Codiervorschrift.

Pseudoternärcode	ungünstigste Symbolfolge(n) für das obere Auge	
	obere Begrenzungslinie	untere Begrenzungslinie
AMI–Code		
Duobinärcode		

b) Berechnen Sie für beide Codes die Augenöffnung $ö(T_D = 0)$ in Abhängigkeit der Grundimpulswerte $g_0 = g_d(0) = 0.684\,\mathrm{V}$ und $g_1 = g_d(\pm T) = 0.156\,\mathrm{V}$. Welche ungünstige Eigenschaft des AMI–Codes ist für die kleinere Augenöffnung verantwortlich? Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit dem Programm "*bas*".
Hinweis: Da durch die Pseudoternärcodierung die Symboldauer T gegenüber dem Binärsystem nicht verändert wird, kann man auch bei diesem System vom Grundimpuls $g_d(t)$ nach Bild 14.4 (in V14.1) ausgehen. Bei redundanten Codes ist allerdings Gl. (14.10) nun nicht mehr anwendbar. Statt dessen muß man hier aus der oberen und der unteren Begrenzungslinie des Auges die *ungünstigsten Symbolfolgen* ermitteln (vgl. Punkt a). Daraus kann man mit Kenntnis von $g_d(t)$ die Augenöffnung berechnen.

AMI–Code: $ö(T_D = 0) =$

Duobinärcode: $ö(T_D = 0) =$

c) Berechnen Sie aus den Ergebnissen von (a) und (b) für beide Codes die jeweiligen optimalen Schwellenwerte E_1 und E_2. Überprüfen Sie anschließend Ihre Ergebnissse mit dem Programm "*bas*".

AMI–Code: $E_2 =$

$E_1 =$

Duobinärcode: $E_2 =$

$E_1 =$

d) Bestimmen Sie nun für den AMI–Code die charakteristischen Kenngrößen (Augenöffnung, Störeffektivwert, mittlere und ungünstigste Bitfehlerwahrscheinlichkeit, Störabstand) bei drei verschiedenen Impulsformergrenzfrequenzen f_I. Die Anzahl der betrachteten Vor– und Nachläufer sei wie im Versuch D14.2(e) wieder $n = v = 2$. Wie groß ist hier die minimale Grenzfrequenzen $f_{\mathrm{I,min}}$, bei der das Auge gerade offen ist. *Hinweis:* Sie können die Ergebnisse mit den Kurvenverläufen von Bild 15.8 (siehe Versuch D15.4) vergleichen. Bei der Aufgabe D15.4d wird auch eine Interpretation der gewonnenen Ergebnisse gefordert.

	$ö(T_\mathrm{D})$	σ_d	p_B	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_\mathrm{U})$
$f_\mathrm{I} \cdot T = 0.35$					
$f_\mathrm{I} \cdot T = 0.40$					
$f_\mathrm{I} \cdot T = 0.45$					

$f_{\mathrm{I,min}} \cdot T =$

e) Bestimmen Sie die charakteristischen Kenngrößen auch für den Duobinärcode. Wie groß ist hier die minimale Grenzfrequenzen $f_{\mathrm{I,min}}$, bei der das Auge gerade offen ist.

	$ö(T_\mathrm{D})$	σ_d	p_B	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_\mathrm{U})$
$f_\mathrm{I} \cdot T = 0.25$					
$f_\mathrm{I} \cdot T = 0.30$					
$f_\mathrm{I} \cdot T = 0.35$					

$f_{\mathrm{I,min}} \cdot T =$

D15.4: Betrachten Sie nun das redundandanzfreie Quaternärsystem (d.h. $M = 4$). Alle anderen Systemparameter seien wie in D14.2 und D15.3 gewählt (*Standardsystem A*).

a) Betrachten und beschreiben Sie alle Zeitsignalverläufe und das Augendiagramm des Detektionssignals (sowohl mit als auch ohne Störungen). Wählen Sie hier die Anzahl der zu berücksichtigenden Nachläufer (gleich Anzahl der Vorläufer) zu $n = v = 2$.

b) Welche Bedingung müssen die Vor– und Nachläufer des Detektionsgrundimpulses $g_d(t)$ allgemein erfüllen, damit das Auge vertikal gerade noch geöffnet ist? Wie lautet die Bedingung, wenn jeweils nur ein Vor– und Nachläufer ($g_{-1} = g_1$) berücksichtigt werden muß und der Hauptwert g_0 beträgt?

c) Bestimmen Sie die Systemkenngrößen (Augenöffnung, Störeffektivwert, mittlere und ungünstigste Bitfehlerwahrscheinlichkeit, Störabstand) des Quaternärsystems für verschiedene Impulsformergrenzfrequenzen f_I. Die Anzahl der betrachteten Vor– und Nachläufer betrage wie im Versuch D14.2(e) $n = v = 2$. Wie groß ist hier die minimale Grenzfrequenzen $f_{\mathrm{I,min}}$, bei der das Auge gerade noch offen ist. *Hinweis:* Sie können die Werte mit der entsprechenden Kurve von Bild 15.8 vergleichen.

	$ö(T_\mathrm{D})$	σ_d	p_B	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_\mathrm{U})$
$f_\mathrm{I} \cdot T = 0.25$					
$f_\mathrm{I} \cdot T = 0.30$					
$f_\mathrm{I} \cdot T = 0.35$					
$f_\mathrm{I} \cdot T = 0.40$					

$f_{\mathrm{I,min}} \cdot T =$

Abschließend soll nun ein Vergleich zwischen dem redundanzfreien Binärsystem, dem Quaternärsystem und zweier redundanter Ternärsysteme (repräsentiert durch den 4B3T– und den AMI–Code) bezüglich des Übertragungsverhaltens angestellt werden. Dazu sind die Ergebnisse der Versuche D14.2(e), D15.3(d) und D15.4(c) in Bild 15.8 vergleichend gegenübergestellt. Diese sollen nun von Ihnen interpretiert werden.

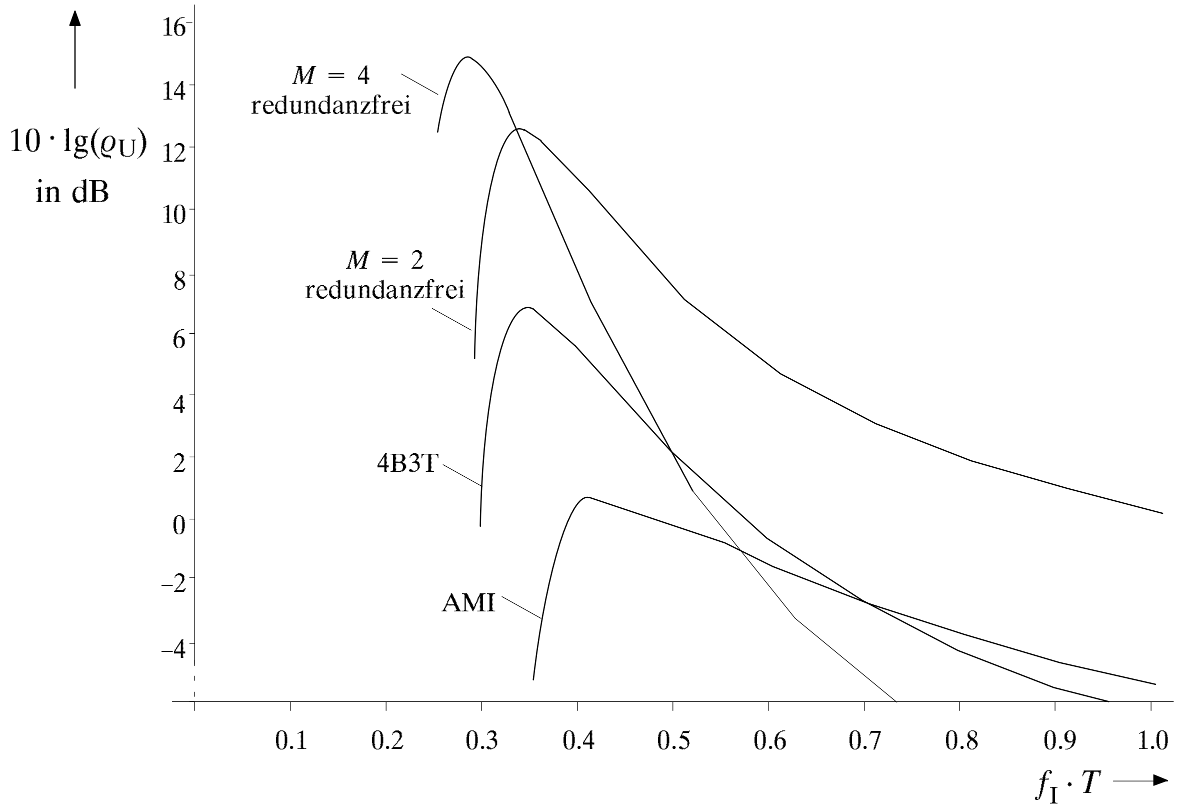


Bild 15.8: Ungünstigster Signalstörabstand $10 \cdot \lg(\varrho_\mathrm{U})$ für verschiedene Übertragungscodes, abhängig von der normierten Impulsformergrenzfrequenz $f_\mathrm{I} \cdot T$.

d) Diskutieren Sie den prinzipiellen Verlauf der dargestellten Kurven.

e) Welcher Störabstandsgewinn kann durch das (optimale) Quaternärsystem gegenüber dem Binärsystem erzielt werden? Worauf ist dieser im wesentlichen zurückzuführen?

f) Vergleichen Sie das Binär– und das Quaternärsystem hinsichtlich des erreichbaren SN–Verhältnisses bei kleinerer Kabeldämpfung (a_K = 40 dB). Hierfür ergeben sich folgende optimale Grenzfrequenzen: $f_{I,opt} \cdot T \approx 0.40$ ($M = 2$), $f_{I,opt} \cdot T \approx 0.32$ ($M = 4$).

g) Warum ist der AMI–Code bei den gegebenen Voraussetzungen (a_K = 60 dB) sehr viel schlechter als die redundanzfreien Codes? Welcher Störabstandsverlust ergibt sich?

h) Unter welchen Voraussetzungen hinsichtlich des Grundimpulses würde der AMI–Code deutlich bessere Ergebnisse liefern?

i) Wählen Sie nun den 4B3T–Code und $f_I \cdot T = 0.4$. Betrachten und beschreiben Sie die Zeitsignalverläufe und das Augendiagramm.

15.8 Übungsaufgabe

Ü15.1: Diese Übungsaufgabe behandelt die Erzeugung eines Pseudoternärcodes gemäß Bild 15.3. Schreiben Sie eine C– bzw. Fortran–Funktion ”*codnue(nue, kenn, qnue)*”, die pro Aufruf (Zählvariable ”*nue*” $= 1, 2, \ ...$) ein Codesymbol ”*codnue*” liefert. Die Variable ”*kenn*” bezeichnet dabei das jeweilige Codiernetzwerk, das durch das Programmenü ausgewählt wird, und kann die Zahlenwerte 1 (AMI–Code), 2 (Duobinärcode) oder 3 (Bipolarcode 2. Ordnung) annehmen. Mit der Float–Variablen ”*qnue*” wird schließlich der Funktion bei jedem Aufruf ein bipolares Binärsymbol (± 1) übergeben.

Die Anfangsbelegung der Variablen b_ν und $b_{\nu-1}$ mit ”–1” muß beim ersten Aufruf in einem Feld der Länge 2 vorgenommen werden. Beachten Sie, daß vor dem Verlassen der Funktion dieses Feld mit den neuen Werten von b_ν und $b_{\nu-1}$ belegt werden muß.

Verwenden Sie zum Übersetzen und Binden die Prozeduren ”*mkcod*” für die C– bzw. ”*mkcod –f*” für die FORTRAN–Version. Testen Sie Ihre Funktion mit Hilfe des Hauptprogramms ”*cod*” (Menüpunkt 3) für die drei möglichen Pseudoternärcoder.

```
C:
double codnue(nue,kenn,qnue)
  long nue,kenn;
  float qnue;
```

```
F77:
real function codnue(nue,kenn,qnue)
  integer nue,kenn
  real qnue
```

16 Nyquist–Systeme

Inhalt: Im folgenden wird das Prinzip der Nyquist–Entzerrung behandelt. Dazu werden zunächst die von Nyquist aufgestellten Kriterien im Zeit– und Frequenzbereich erläutert. Abschließend wird der optimale Nyquist–Entzerrer besprochen und auf die sogenannten "Wurzel–Nyquist–Systeme" ausführlicher eingegangen.

16.1 Prinzip der Nyquist-Entzerrung

Erfolgt die Detektion mit einem Schwellenwertentscheider, so ist es im Hinblick auf eine möglichst geringe Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_B am günstigsten, durch geeignete Dimensionierung des Entzerrerfrequenzgangs $H_\mathrm{E}(f)$ die Impulsinterferenzen vollständig zu beseitigen. Diese Art der Impulsformung bezeichnet man oft als *Nyquist–Entzerrung*.

Unter der Voraussetzung $T_\mathrm{D} = 0$ lautet die entsprechende Bedingung im Zeitbereich:

$$g_d(\nu \cdot T) = 0 \qquad \text{für} \quad \nu = \pm 1, \pm 2 \text{ usw.} \tag{16.1}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit beschränken wir uns auf redundanzfreie binäre bipolare Signale. Zu den Zeitpunkten $\nu \cdot T$ ist somit das Nutzsignal $d_\mathrm{S}(\nu \cdot T) = \pm g_0$, wobei die Abkürzung $g_0 = g_d(0)$ verwendet ist. Aufgrund der äquidistanten Nulldurchgänge von $g_d(t)$ ist die vertikale Augenöffnung gemäß (14.10) maximal: $\ddot{o}(T_\mathrm{D}) = 2 \cdot g_0$. Mit (14.9) folgt daraus für die mittlere und die ungünstigste Bitfehlerwahrscheinlichkeit:

$$p_\mathrm{B} = p_\mathrm{U} = \mathrm{Q}\left(\frac{g_0}{\sigma_d}\right) . \tag{16.2}$$

Hierbei sind wieder Gaußsche Störungen und der Schwellenwert $E = 0$ vorausgesetzt.

Ist das Sendesignal rechteckförmig und der Kanal $H_\mathrm{K}(f)$ frequenzunabhängig, so läßt sich ein möglicher Nyquist–Entzerrer intuitiv angeben (vgl. Abschnitt 13.3):

$$H_\mathrm{E}(f) = \mathrm{si}\,(\pi \cdot f \cdot T) . \tag{16.3}$$

Die dazugehörige Impulsantwort $h_\mathrm{E}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, H_\mathrm{E}(f)$ ist damit wie der Sendegrundimpuls $g_s(t)$ ein Rechteck der Dauer T, so daß der Detektionsgrundimpuls $g_d(t) = g_s(t) * h_\mathrm{E}(t)$ dreieckförmig verläuft und für Zeiten $|t| \geq T/2$ identisch 0 ist. Die Symboldetektion wird somit durch die Ausläufer der Nachbarimpulse nicht beeinträchtigt (vgl. Bild 13.6).

Ein Vergleich mit Kapitel 11 zeigt, daß in diesem Sonderfall der Frequenzgang $H_\mathrm{E}(f)$ von (16.3) gleichzeitig das Matched–Filter darstellt. Somit werden durch diesen Nyquist–Entzerrer nicht nur Impulsinterferenzen vermieden, sondern gleichzeitig die Störungen am Entscheider minimiert.

Das Detektions–Signalstörleistungsverhältnis kann mit den in den Kapiteln 13 und 14 angegebenen Gleichungen berechnet werden. Man erhält mit der Energie $E_\mathrm{B} = s_0^2 \cdot T$ des Sendegrundimpulses und der Leistungsdichte N_0 des weißen Rauschens:

$$\varrho_\mathrm{U} = \frac{2 \cdot E_\mathrm{B}}{N_0} . \tag{16.4}$$

Mit keinem anderen Filter wird dieser Maximalwert sonst noch erreicht.

16.2 Nyquist-Kriterien

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall, gekennzeichnet durch den Sendegrundimpuls $g_s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ G_s(f)$ und den Kanalfrequenzgang $H_\mathrm{K}(f)$. Formuliert man die Bedingung (16.1) im Frequenzbereich für das Spektrum $G_d(f) = G_s(f) \cdot H_\mathrm{K}(f) \cdot H_\mathrm{E}(f)$, so erhält man:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_d\left(f - \frac{k}{T}\right) = \text{const.} \; . \qquad (16.5)$$

Diese Bedingung wurde von Nyquist im Jahre 1928 angegeben und wird häufig als das *1. Nyquist–Kriterium* bezeichnet. Dieses besagt, daß äquidistante Nulldurchgänge des Grundimpulses $g_d(t)$ im Symbolabstand T nur dann möglich sind, wenn die periodische Fortsetzung $\mathrm{P}\{G_d(f)\}$ des dazugehörigen Spektrums $G_d(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\ g_d(t)$ mit der Periode $f_\mathrm{P} = 1/T$ einen konstanten Wert ergibt (vgl. Abschnitt 7.2).

Daneben wurde von Nyquist ein zweites Kriterium dafür angegeben, daß der Grundimpuls $g_d(t)$ Nulldurchgänge zu den Zeitpunkten $\pm 1.5T$, $\pm 2.5T$, $\pm 3.5T$ usw. besitzt. Dadurch werden die Nulldurchgänge des Detektionssignals nicht aus ihren Sollagen verschoben, so daß die horizontale Augenöffnung maximal gleich der Symboldauer T wird. In diesem Fall treten die Nulldurchgänge des Detektionsnutzsignals $d_\mathrm{S}(t)$ in äquidistanten Abständen auf; dies erleichtert z.B. die Taktwiedergewinnung mittels einer PLL.

Das 2. Nyquist–Kriterium kann im Frequenzbereich z.B. wie folgt formuliert werden:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{G_d\left(f - \frac{k}{T}\right)}{\cos(\pi \cdot f \cdot T - k \cdot \pi)} = \text{const.} \; . \qquad (16.6)$$

Hier ist die periodische Fortsetzung der Funktion $G_d(f)/\cos(\pi \cdot f \cdot T)$ mit der Frequenzperiode $f_\mathrm{P} = 1/T$ stets eine Konstante.

Bild 16.1 verdeutlicht die beiden Nyquist–Kriterien anhand von Augendiagrammen mit maximal möglicher vertikaler (links) bzw. horizontaler Augenöffnung (rechts). Bild 16.3 zeigt ein Augendiagramm, bei dem beide Nyquist–Kriterien erfüllt sind.

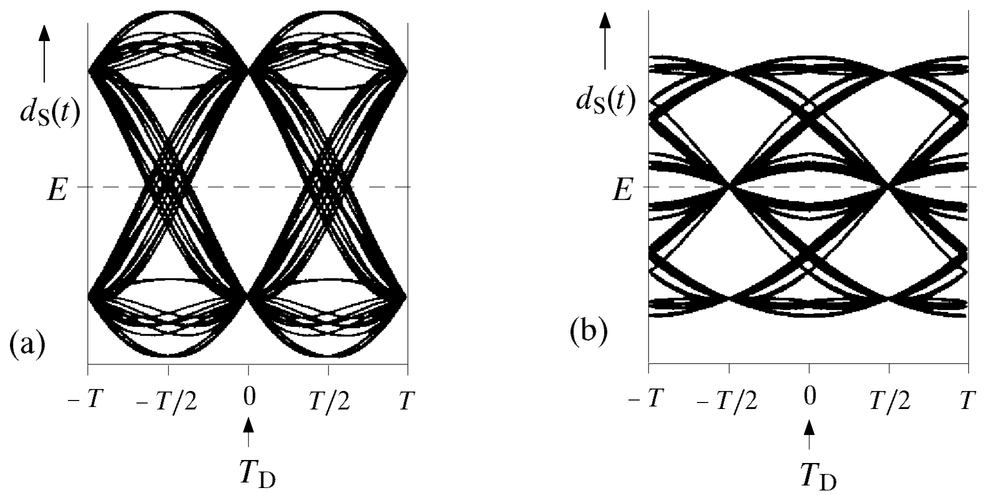


Bild 16.1: Ungestörte Augendiagramme zur Veranschaulichung des ersten (a) und des zweiten (b) Nyquist–Kriteriums.

Besondere Bedeutung für die Digitalsignalübertragung besitzen Nyquist–Spektren, die auf den Frequenzbereich $-1/T \leq f \leq 1/T$ beschränkt und zusammenhängend sind. Durch diese Beschränkung überlappen sich bei der periodischen Fortsetzung lediglich benachbarte Frequenzbereiche, so daß die beiden Nyquist–Kriterien für reelle Funktionen mit der *Nyquist–Frequenz* $f_N = 1/(2T)$ folgendermaßen vereinfacht werden können:

$$G_d(f_N - f) + G_d(f_N + f) = G_d(0) = \text{const.}\,, \tag{16.7}$$

$$\frac{G_d(f_N - f)}{\cos(\pi \cdot T \cdot (f_N - f))} + \frac{G_d(f_N + f)}{\cos(\pi \cdot T \cdot (f_N + f))} = G_d(0) = \text{const.}\,. \tag{16.8}$$

In diesen Gleichungen ist für f ein Wert zwischen $-1/(2T)$ und $+1/(2T)$ einzusetzen.

Ein reelles Nyquist–Spektrum nach dem 1. Kriterium ist demnach stets punktsymmetrisch um die Nyquist–Frequenz f_N, die gleich der halben Symbolrate ist. Im allgemeinen kann ein Nyquist–Spektrum auch einen Imaginärteil besitzen. Dieser muß dann achsensymmetrisch um die beiden Frequenzen $f = \pm f_N$ sein.

Bild 16.2 zeigt drei mögliche Spektren $G_d(f)$ mit oben genannten Eigenschaften, wobei die Symmetriepunkte bei $\pm f_N$ hervorgehoben sind.

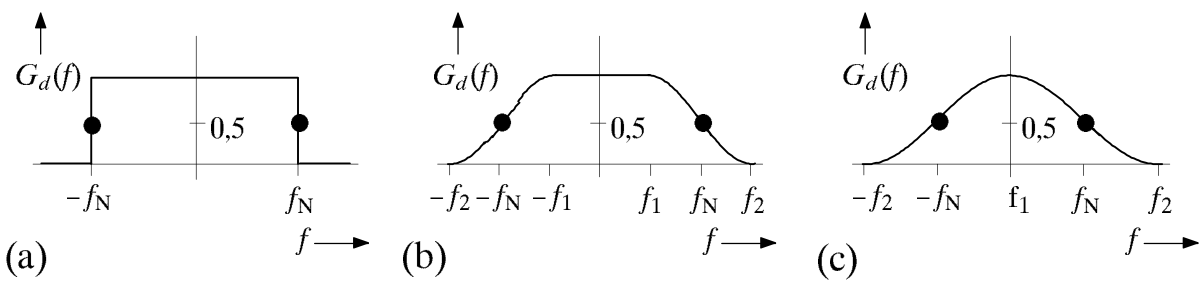


Bild 16.2: Nyquist–Spektren mit Cosinus–Rolloff–Charakteristik und Rolloff–Faktor $r = 0$ (a), $r = 0.5$ (b), $r = 1$ (c).

Alle diese Spektren kann man durch einen *Cosinus–Rolloff–Tiefpaß* gemeinsam beschreiben, wobei mit den in Bild 16.2(b) eingezeichneten Frequenzen f_1 und f_2 gilt:

$$G_d(f) = \begin{cases} g_0 \cdot T & \text{für} \quad |f| \leq f_1\,, \\ g_0 \cdot T \cdot \cos^2\left(\frac{|f| - f_1}{f_2 - f_1} \cdot \frac{\pi}{2}\right) & \text{für} \quad f_1 \leq |f| \leq f_2\,, \\ 0 & \text{für} \quad |f| \geq f_2\,. \end{cases} \tag{16.9}$$

Eine impulsinterferenzfreie Detektion ist nur dann gegeben, wenn $(f_1 + f_2)/2 = f_N$ ist. Bei zu kleiner ”Grenzfrequenz” ist das Auge geschlossen. Eine zu große ”Grenzfrequenz” führt ebenfalls zu Impulsinterferenzen, wenn auch mit geringeren Auswirkungen.

Zur Beschreibung der Flankensteilheit wird häufig der *Rolloff–Faktor*

$$r = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1} \qquad (r = 0 \ldots 1) \tag{16.10}$$

verwendet. Für $r = 0$ ($f_1 = f_2 = f_N$) ergibt sich aus der allgemeinen Darstellung (16.9) das rechteckförmige Spektrum (*Küpfmüller–Tiefpaß*), während mit $r = 1$ ($f_1 = 0, f_2 = 2 \cdot f_N$) das Detektionsgrundimpulsspektrum $G_d(f)$ $\cos^2$–förmig verläuft.

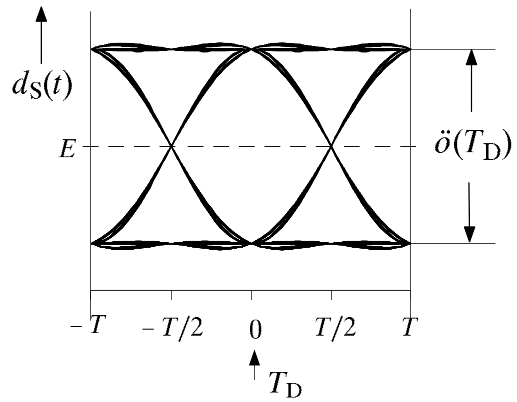


Bild 16.3: Ungestörtes Augendiagramm beim $\cos^2$–Spektrum von Bild 16.2(c).

Für den Detektionsgrundimpuls gilt in Abhängigkeit des Rolloff–Faktors r:

$$g_d(t) = g_0 \cdot \frac{\cos(\pi \cdot r \cdot t/T)}{1-(2 \cdot r \cdot t/T)^2} \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot \frac{t}{T}) \ . \tag{16.11}$$

Dem rechteckförmigen Spektrum von Bild 16.2(a) entspricht ein si–förmiger Impuls, der nur sehr langsam, nämlich asymptotisch mit $1/t$, abklingt und bei dem die horizontale Augenöffnung gegen Null geht. Da in diesem Fall das Auge zu einem unendlich schmalen Spalt entartet, ist in der Regel keine zufriedenstellende Detektion möglich. Ein zeitlich schwankender Takt (*Jitter*) führt deshalb immer zu Fehlentscheidungen.

Mit zunehmendem Rolloff–Faktor r (flacherer Flankenabfall) werden die Überschwinger auch außerhalb der Detektionszeitpunkte $\nu \cdot T$ geringer, so daß sich für die horizontale Augenöffnung meist ebenfalls ein ausreichend großer Wert ergibt. Beim $\cos^2$–Spektrum ($r = 1$) klingt $g_d(t)$ asymptotisch mit $1/t^3$ ab. Aus (16.11) erhält man in diesem Sonderfall nach einigen Umformungen für den Detektionsgrundimpuls:

$$g_d(t) = g_0 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot [\mathrm{si}\,(\pi \cdot (\frac{t}{T} + \frac{1}{2})) + \mathrm{si}\,(\pi \cdot (\frac{t}{T} - \frac{1}{2}))] \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot \frac{t}{T}) \ . \tag{16.12}$$

Der Detektionsgrundimpuls gemäß (16.12) besitzt Nulldurchgänge bei allen Vielfachen der Symboldauer T und zusätzlich bei $\pm 1.5T$, $\pm 2.5T$, $\pm 3.5T$ usw.. Somit erfüllt dieser Impuls sowohl das erste als auch das zweite Nyquist–Kriterium, was auch anhand der entsprechenden Bedingungen (16.7) und (16.8) im Spektralbereich gezeigt werden kann.

In Bild 16.3 ist das zum Grundimpuls von (16.12) gehörige ungestörte Augendiagramm dargestellt. Es ist zu erkennen, daß dieses sowohl vertikal als auch horizontal zu 100 % geöffnet ist, und daß Impulsinterferenzen auch außerhalb des Zeitnullpunktes von untergeordneter Bedeutung sind.

Die Grenzfrequenz des Spektrums $G_d(f)$ entsprechend (16.9) und Bild 16.2(b) ist durch das 1. Nyquist–Kriterium festgelegt. Dagegen ist der Rolloff–Faktor r ein optimierbarer Parameter, da dieser die Fehlerwahrscheinlichkeit über den Störeffektivwert σ_d beeinflußt (vgl. (16.2)). Wegen (14.6) und der Beziehung $G_d(f) = G_s(f) \cdot H_K(f) \cdot H_E(f)$ gilt:

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_E(f)|^2 \, df = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|G_d(f)|^2}{|G_s(f)|^2 |H_K(f)|^2} \, df \ . \tag{16.13}$$

16.3 Wurzel-Nyquist-Systeme

Bisher wurden nur die Empfängerparameter optimiert. Nun soll eine gemeinsame Optimierung von Sender und Empfänger erfolgen, wobei das Blockschaltbild gemäß Bild 16.4 zugrunde gelegt wird. Hierzu ist folgendes anzumerken:

- Die Sendeimpulsform wird durch den Senderfrequenzgang $H_S(f)$ charakterisiert; dieser sei gleich dem (geeignet normierten) Sendeimpulsspektrum: $H_S(f) = G_s(f)/s_0 \cdot T$.
- Diese Maßnahme ist nur dann erlaubt, wenn die Digitale Quelle gemäß Bild 14.1 durch eine äquivalente Dirac–Quelle ersetzt wird, für dessen Ausgangssignal gilt:

$$q_\delta(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot s_0 \cdot T \cdot \delta(t - \nu \cdot T) \; . \tag{16.14}$$

  Die beiden Sendesignale $s(t)$ von Bild 14.1 und 16.4 sind somit identisch (vgl. V16.2).
- Der Tiefpaß–Kanal sei auf die Bandbreite B_K ideal bandbegrenzt ($f_N \le B_K \le 2f_N$).
- Das System sei impulsinterferenzfrei, also ein Nyquist–System. Somit gilt

$$H_S(f) \cdot H_K(f) \cdot H_E(f) \overset{!}{=} H_N(f) \; , \tag{16.15}$$

  wobei $H_N(f)$ einen Nyquist–Frequenzgang bezeichnet. Das heißt: Die dazugehörige Impulsantwort $h_N(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, H_N(f)$ weist äquidistante Nulldurchgänge im Abstand T auf. Mögliche Nyquist–Frequenzgänge sind formgleich zu den Verläufen in Bild 16.2.

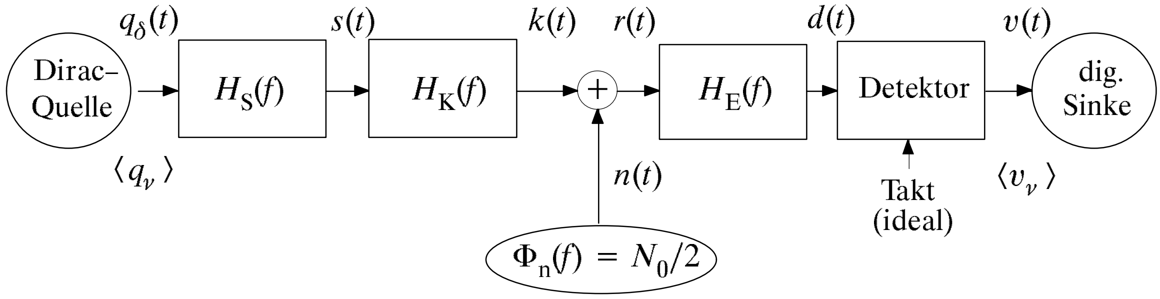


Bild 16.4: Äquivalentes Blockschaltbild eines Basisbandübertragungssystems mit einer Dirac–Quelle und dem Senderfrequenzgang $H_S(f)$.

Das optimale System für den Sonderfall eines AWGN–Kanals ohne Bandbegrenzung ($B_K \to \infty$) wurde bereits in Abschnitt 13.3 behandelt. Hier gilt $H_S(f) = H_E(f) = \mathrm{si}(\pi \cdot f \cdot T)$. Da die beiden Frequenzfunktionen bis ins Unendliche reichen, ist diese Konfiguration bei endlicher Kanalbandbreite B_K nicht mehr optimal. Vielmehr gilt in diesem Fall:

$$H_{S,opt}(f) = H_{E,opt}(f) = \sqrt{H_N(f)} \; . \tag{16.16}$$

Hierbei sei $H_N(f)$ ein Nyquist–Frequenzgang, z.B. entsprechend Bild 16.2 mit Cosinus–Rolloff–Charakteristik oder auch trapezförmig. Der Rolloff–Faktor ist dabei durch die Kanalbandbreite, bezogen auf die Nyquist–Frequenz $f_N = 1/(2T)$, wie folgt begrenzt:

$$r < \frac{B_K}{f_N} - 1 \; . \tag{16.17}$$

Je größer die Kanalbandbreite ist, um so größer kann man den Rolloff–Faktor wählen.

Mit Sender und Entzerrer gemäß (16.16) ist die gesamte Übertragungsstrecke ein Nyquist–System. Der Kanalfrequenzgang $H_K(f)$ hat keinen Einfluß, solange der Rolloff–Faktor die Bedingung (16.17) erfüllt. Der Detektionsgrundimpuls besitzt äquidistante Nulldurchgänge, die Impulsamplitude beträgt s_0. Somit ist die halbe vertikale Augenöffnung ebenfalls gleich s_0.

Betrachten wir nun die Störleistung vor dem Entscheider. Diese ist

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_E(f)|^2 \, df = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} H_N(f) \, df = \frac{N_0}{2T} \; . \tag{16.18}$$

Hierbei ist berücksichtigt, daß das Integral über den Nyquist–Frequenzgang $H_N(f)$ gleich $2 \cdot f_N = 1/T$ ist, und zwar unabhängig vom Rolloff–Faktor r (vgl. Bild 16.2).

Mit diesen Ergebnissen erhält man das gleiche Ergebnis wie bei rechteckförmigem Sendesignal und ebensolcher Impulsantwort $h_E(t)$, z.B. durch einen Integrator:

$$p_B = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot s_0^2 \cdot T}{N_0}}\right) . \tag{16.19}$$

Im Unterschied zu obiger Konfiguration weist nun das Sendesignal Impulsinterferenzen auf: Der Sendegrundimpuls $g_s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; s_0 \cdot T \cdot H_S(f)$ hat hier keine äquidistanten Nulldurchgänge, und der Maximalwert s_{max} des Sendesignals $s(t)$ ist hier stets größer als s_0. Erst zusammen mit dem Empfangsfilter $H_E(f)$ ergeben sich die Nyquist–Eigenschaften des Gesamtsystems. Oder anders ausgedrückt: Die Faltung der beiden Impulsantworten $h_S(t)$ und $h_E(t)$, die beide keine äquidistanten Nulldurchgänge besitzen, führen zur Zeitfunktion $h_N(t)$ mit Nyquist–Eigenschaften.

Die Leistung P_S des Sendesignals kann man mit den Gleichungen (15.12) und (15.13) berechnen. Dies führt zum Ergebnis

$$P_S = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_s(f)|^2 \, df = s_0^2 \cdot T \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_S(f)|^2 \, df \; . \tag{16.20}$$

Mit (16.16) folgt in ähnlicher Weise wie bei (16.18) für die mittlere Energie pro Bit:

$$E_B = P_S \cdot T = s_0^2 \cdot T^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} H_N(f) \, df = s_0^2 \cdot T \; . \tag{16.21}$$

Eingesetzt in (16.19) erhält man wie bei der Konfiguaration Rechteckimpuls/Integrator für die mittlere (und gleichzeitig für die ungünstigste) Bitfehlerwahrscheinlichkeit:

$$p_B = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right) . \tag{16.22}$$

Anzumerken bleibt, daß die Wurzel–Nyquist–Konfiguration dann zu einem schlechten Ergebnis führt, wenn als Nebenbedingung der Optimierung nicht die mittlere Sendeleistung, sondern der Maximalwert des Sendesignals konstant gehalten wird.

16.4 Vorbereitungsfragen

V16.1: Für das Folgende wird vorausgesetzt, daß das Spektrum $G_d(f)$ des Grundimpulses einen $\cos^2$–Verlauf entsprechend Bild 16.2(c) aufweist. Der Maximalwert soll mit $G_d(0)$ bezeichnet werden, die Grenzfrequenz sei allgemein $f_G = f_2/2$.

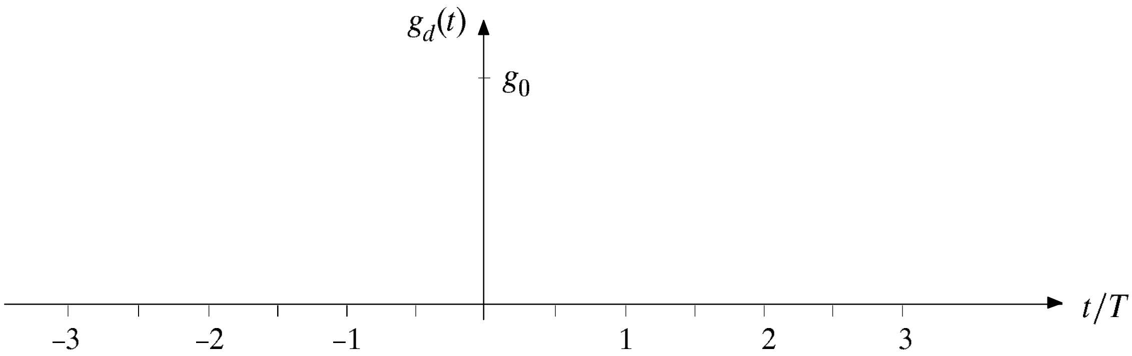
a) Geben Sie $G_d(f)$ formelmäßig an.

b) Zeigen Sie an diesem Beispiel, daß eine impulsinterferenzfreie Detektion prinzipiell nicht möglich ist, wenn f_G kleiner als die Nyquistfrequenz $f_N = 1/(2T)$ ist.

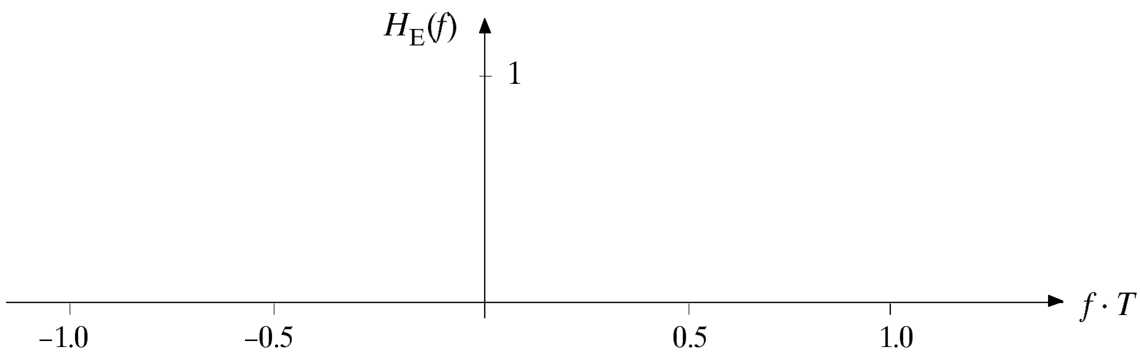
c) Für das Folgende gelte stets: $f_G = f_N$. Zeigen Sie rechnerisch, daß das $\cos^2$–förmige Spektrum auch das 2. Nyquistkriterium gemäß (16.8) erfüllt.
Hinweis: Es gilt $\cos^2(x) = (1 + \cos(2x))/2$.

d) Berechnen Sie den Detektionsgrundimpuls $g_d(t)$. Zeigen Sie im Zeitbereich, daß hier beide Nyquist–Kriterien erfüllt sind. Zu welchen Zeitpunkten besitzt $g_d(t)$ Nulldurchgänge? Welcher Zusammenhang besteht zwischen $G_d(0)$ und $g_0 = g_d(0)$?

e) Skizzieren Sie den Detektionsgrundimpuls $g_d(t)$. Wie groß ist $g_d(t)$ zum Zeitpunkt $t = T/2$? *Hinweis:* Benutzen Sie hierfür die Regel von l'Hospital.



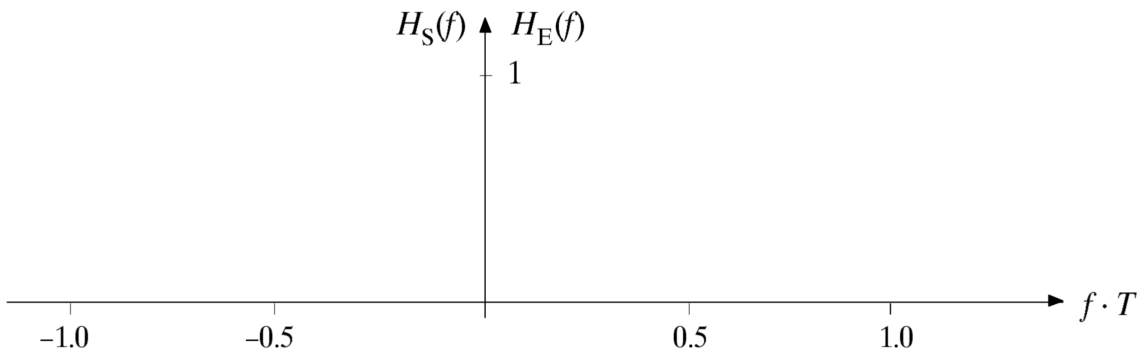
f) Zeichnen Sie den Entzerrer–Frequenzgang $H_E(f)$ qualitativ, wenn rechteckförmige Sendeimpulse mit der Amplitude g_0 und ein idealer Kanal mit dem Frequenzgang $H_K(f) = 1$ verwendet werden. Geben Sie $H_E(f)$ auch formelmäßig an.



V16.2: Betrachten Sie nun das Wurzel–Nyquist–System gemäß Bild 16.4, wobei $H_N(f)$ wie in V16.1 durch einen $\cos^2$–Tiefpaß entsprechend Bild 16.2(c) vorgegeben sei.

a) Zeigen Sie an diesem Beispiel, daß sich für die beiden Blockschaltbilder nach Bild 14.1 und 16.4 jeweils das gleiche Sendesignal $s(t)$ ergibt.

b) Bestimmen und skizzieren Sie den optimalen Sender– und Entzerrer–Frequenzgang.



c) Zeigen Sie, daß für den Sendegrundimpuls $g_s(t)$ gilt:

$$g_s(t) = \frac{4 \cdot s_0}{\pi} \cdot \frac{\cos(2\pi \cdot t/T)}{1 - 16 \cdot (t/T)^2} \quad . \tag{16.23}$$

Anmerkung: Wenn Sie dazu keine Lust mehr haben, kann ich's gut verstehen.

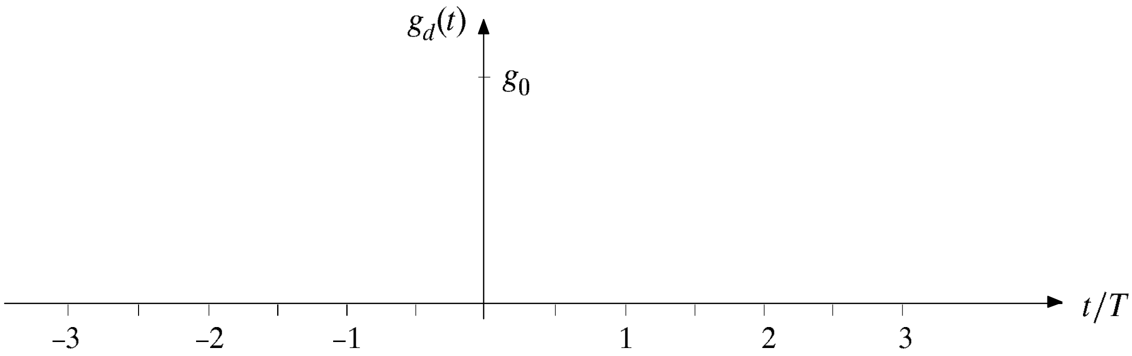
d) Berechnen Sie die Grundimpulswerte $g_s(0), g_s(\pm T), g_s(\pm 2T)$ und $g_s(\pm 3T)$. Skizzieren Sie den Detektionsgrundimpuls $g_d(t)$.

$$g_s(0) =$$

$$g_s(\pm T) =$$

$$g_s(\pm 2T) =$$

$$g_s(\pm 3T) =$$



e) Begründen Sie, daß am Sender Impulsinterferenzen auftreten. Welche Auswirkungen haben diese bezüglich der mittleren und der maximalen Sendeleistung?

16.5 Versuchsdurchführung

Die Aufgaben D16.1 bis D16.3 können mit dem Programm *"nyq"* durchgeführt werden, die Aufgabe D16.4 mit dem Programm *"bas"*.

D16.1: Unter dem Menüpunkt 1 können die Spektren und zugehörigen Zeitfunktionen sowie das binäre und quaternäre Augendiagramm eines Trapez– und eines Cosinus–Rolloff–Tiefpasses betrachtet werden. Sie haben sowohl bezüglich der Grenzfrequenz f_G als auch des Rolloff–Faktors r freie Wahl. Gehen Sie davon aus, daß $H_N(0) = 1$ ist. Dies entspricht für das Spektrum des Detektionsgrundimpulses: $G_d(0) = s_0 \cdot T$.

a) Betrachten Sie in diesem ersten Versuch stets das rechteckförmige Spektrum (z.B. einzustellen als Trapez–Tiefpaß mit Rolloff–Faktor $r = 0$) mit dem einzigen Parameter f_G. Welchen Verlauf hat hier der Detektionsgrundimpuls $g_d(t)$?

b) Wählen Sie zunächst die (normierte) Grenzfrequenz $f_G \cdot T = 0.5$. Interpretieren Sie das Ergebnis. Besteht hinsichtlich der horizontalen Augenöffnung (des Binärsystems) eine Diskrepanz zwischen Theorie und Simulation?

c) Wählen Sie nun für das rechte Fenster die Grenzfrequenz $f_G \cdot T = 0.4$. Interpretieren und verallgemeinern Sie die Ergebnisse.

d) Wählen Sie die Grenzfrequenz $f_G \cdot T = 0.6$. Interpretation.

e) Vergleichen Sie nun die normierten Grenzfrequenzen $f_G \cdot T = 0.5$ bzw. $f_G \cdot T = 1.0$ hinsichtlich vertikaler und horizontaler Augenöffnung. Ist eine Nyquist–Entzerrung mit $f_G \cdot T = 1.0$ sinnvoll, wenn der Sendeimpuls rechteckförmig ist?

f) Betrachten Sie für $f_G \cdot T = 0.5$ auch das quaternäre Augendiagramme. Was ist zu erkennen?

D16.2: Vergleichen Sie nun den Trapez– und den Cosinus–Rolloff–Tiefpaß hinsichtlich Abklingverhalten, Überschwinger, vertikaler und horizontaler Augenöffnung (des Binärsystems), und zwar jeweils mit der Nyquist–Grenzfrequenz $f_G \cdot T = 0.5$.

a) Zunächst sei der Rolloff–Faktor für beide Tiefpässe gleich $r = 0.5$. Interpretieren Sie die Simulationsergebnisse.

b) Ändern Sie nun den Rolloff–Faktor des Cosinus–Rolloff–Tiefpasses in der Weise, daß beide Tiefpässe eine gleiche Flankensteilheit aufweisen. Welcher Tiefpaß hat nun das bessere Abklingverhalten, meßbar durch eine größere horizontale Augenöffnung?

c) Wählen Sie nun den Rolloff–Faktor für beide Tiefpässe gleich $r = 1$. Interpretieren Sie die Simulationsergebnisse.

D16.3: In dieser Aufgabe geht es wie in V16.2 um das sogenannte Wurzel–Nyquist–System gemäß Bild 16.4, wobei für $H_N(f)$ wiederum ein cos²–Tiefpaß vorausgesetzt wird.

a) Betrachten Sie den Sendegrundimpuls $g_s(t)$, der formgleich mit der Impulsantwort $h_E(t)$ des Empfangsfilters ist. Überprüfen Sie die in V16.2(d) berechneten Grundimpulswerte $g_0 = g_s(0)$, $g_1 = g_s(\pm T)$, $g_2 = g_s(\pm 2T)$ und $g_3 = g_s(\pm 3T)$.

b) Betrachten Sie das Augendiagramm des Sendesignals $s(t)$ und notieren Sie den Minimalwert (des Betrages) $s_{min} =$ Min $|s(t = 0)|$; dieser ist gleich der halben vertikalen Augenöffnung zum Zeitnullpunkt. Überprüfen Sie anschließend s_{min} mit dem Ergebnis aus a), wobei Sie berücksichtigen sollten, daß im Programm *"nyq"* zur Augenberechnung jeweils $v = n = 3$ Vor– und Nachläufer herangezogen werden. Welche Symbolfolgen führen zu den inneren Augenlinien?

c) Wie groß ist der Maximalwert $s_{max} =$ Max $|s(t = 0)|$, wieder unter der Voraussetzung $v = n = 3$? Welcher Zusammenhang besteht zwischen s_{max} und s_{min}?

d) Die Ergebnisse von b) und c) stimmen aufgrund der Einschränkung $v = n = 3$ nicht mit den tatsächlichen Werten von s_{max} und s_{min} überein. Wie groß sind diese?

e) Der Gesamtfrequenzgang eines Übertragungssystems habe eine Cosinus–Rolloff–Charakteristik mit Rolloff–Faktor r, der sich aus Wurzel–Nyquist–Frequenzgängen für Sender und Empfänger zusammensetzt. Gibt es unter der Voraussetzung von weißem Rauschen einen optimalen Wert von r, der die Bitfehlerwahrscheinlichkeit minimiert, wenn die mittlere Energie pro Bit als konstant vorgegeben wird?

f) Ermitteln Sie die in der nachfolgenden Tabelle angegeben Kenngrößen des Wurzel–Nyquist–Systems für verschiedene Rolloff–Faktoren, wieder unter der Voraussetzung, daß der Gesamtfrequenzgang eine Cosinus–Rolloff–Charakteristik aufweist. Es gilt weiterhin: $v = n = 3$. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

	$B_{\text{K,min}}/f_{\text{N}}$	$g_s(0)/s_0$	Min $\lvert s(t = 0)\rvert$	Max $\lvert s(t)\rvert$ (bei t_{max}/T)
$r = 1$				
$r = 0.75$				
$r = 0.50$				
$r = 0.25$				
$r = 0$				

D16.4: Betrachten Sie nun ein binäres Nyquistsystem mit folgenden Randbedingungen (Programm *"bas"*, *"Standardsystem B"*):

- zufällige Quellensymbolfolge,
- binäre bipolare NRZ–Rechtecksendeimpulse (normierte Impulsdauer $T_s/T = 1$),
- Koaxialkabel mit der Dämpfung $a = 60$ dB (6.9 Neper),
- weißes Rauschen mit der normierten Rauschleistungsdichte $N_0/T = 2 \cdot 10^{-7}$ ($B_n \cdot T = 6$),
- Nyquistentzerrer mit dem Rolloff–Faktor $r = 1$,
- optimale Entscheiderschwelle $E = 0$ und optimaler Detektionszeitpunkt $T_\mathrm{D} = 0$.

a) Betrachten Sie das Detektionssignal, den Grundimpuls und die Augendiagramme mit bzw. ohne Störungen. Welcher Zusammenhang gilt hier zwischen mittlerer und ungünstigster Fehlerwahrscheinlichkeit? Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich im Vergleich zum optimierten System mit gaußförmigem Impulsformer (vgl. D14.2e)?

	$\ddot{o}(T_\mathrm{D})$	σ_d	p_B	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_\mathrm{U})$
Gauß ($f_\mathrm{I} \cdot T = 0.35$)					
Nyquist ($r = 1$)					

b) Warum ist dieses System schlechter als das optimale System von D14.2 (gaußförmiger Impulsformer)? Betrachten Sie dazu auch das LDS $\Phi_{d\mathrm{N}}(f)$ des Detektionsstörsignals.

c) Zeigen Sie, daß durch einen geringeren Rolloff–Faktor eine deutliche Verbesserung des Signalstörabstandes erzielt werden kann. Untersuchen Sie dazu die in nachfolgender Tabelle angegeben r–Werte. Interpretieren Sie diese Ergebnisse. Worauf ist die Verbesserung zurückzuführen?

Nyquist	$\ddot{o}(T_\mathrm{D})$	σ_d	p_B	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_\mathrm{U})$
$r = 1$					
$r = 0.5$					
$r = 0.25$					
$r = 0$					

d) Vergleichen Sie das (bezüglich r optimierte) Nyquist–System und das optimale System mit gaußförmigem Impulsformer (Versuch D14.2) hinsichtlich Störabstand und mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit.

16.6 Übungsaufgabe

Ü16.1: Schreiben Sie ein Unterprogramm *"nyqcrt(fG, r, spektrum, signal)"*, welches einen Wurzel–Nyquist–Frequenzgang $H_N(f)$ mit Cosinus–Rolloff–Charakteristik und die dazugehörige Zeitfunktion $h_N(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ H_N(f)$ berechnet (siehe Abschnitt 16.3). Eingabeparameter sind die Grenzfrequenz *"fG"* und der Rolloff–Faktor *"r"* des Geamtfrequenzgangs $H_N(f)^2$. Der Rolloff–Faktor $r = 0$ (d.h. das Rechteckspektrum) sei ausgeschlossen.

Die Übergabe von $H_N(f)$ und $h_N(t)$ an das Hauptprogramm erfolgt mit Hilfe der beiden Felder *"spektrum"* und *"signal"*, jeweils mit der Dimension $N = 1024$. Beachten Sie, daß sowohl im Frequenz– als auch im Zeitbereich der jeweilige Nullpunkt ($f = 0$ bzw. $t = 0$) dem mittleren Feldelement (mit dem Index 512) zuzuweisen ist. Der Abstand zweier Abtastwerte im Frequenzbereich beträgt $f_A = 1/32$.

Zur Berechnung des Zeitsignals kann die schon aus den Übungen zu Kapitel 7 bekannte Fast–Fouriertransformation benutzt werden: *"void fft ((long)*0*, N, Re, Im, TA)"*. Alle Parameter und das Programm selbst müssen intern deklariert werden. Der erste Parameter kennzeichnet die Transformationsrichtung vom Frequenz– in den Zeitbereich, die Long–Variable N ist gleich 1024 zu setzen. Die beiden reellen Felder *"Re"* und *"Im"* nehmen den Real– und Imaginärteil des Spektrums bzw. des Zeitsignals auf, während $T_A = 1/(N \cdot f_A)$ den Abstand zweier Abtastwerte im Zeitbereich angibt.

Für den Aufruf des FFT–Unterprogramms muß das Feld vorher so umsortiert werden, daß der Frequenzgang in der Grundfolge von 0 bis $N - 1$ vorliegt (siehe Abschnitt 7.1). Dem ersten Feldelement ist also das vormals mittlere Feldelement zuzuordnen. Nach der FFT muß in der gleichen Weise rücksortiert werden.

Zum Übersetzen und Einbinden in das Programm *"nyq"* verwenden Sie bitte die Prozedur *"mknyq* [–*f*]". Testen Sie anschließend Ihr Unterprogramm für verschiedene Grenzfrequenzen und Rolloff–Faktoren.

<u>Programmheader:</u>

```
C:   include <math.h>
     void nyqcrt(fG,r,spektrum,signal)
       double fG,r;
       float spektrum[ ],signal[ ];

F77: subroutine nyqcrt(fG,r,spektrum,signal)
       real fG,r,spektrum(0:1023),signal(0:1023)
```

17 Zusammenfassung und Ausblick

In Bild 17.1 ist nochmals das Blockschaltbild eines digitalen Übertragungssystems inklusive Codier– und Decodiereinrichtungen dargestellt, das z.B. der Simulation eines Basisbandsystems zugrunde gelegt werden könnte. Abschließend soll nun an einigen Beispielen der Bezug zwischen der Modellierung und Dimensionierung der einzelnen Funktionseinheiten sowie den in den Kapiteln 1 bis 16 dargelegten Grundlagen der Systemsimulation hergestellt werden.

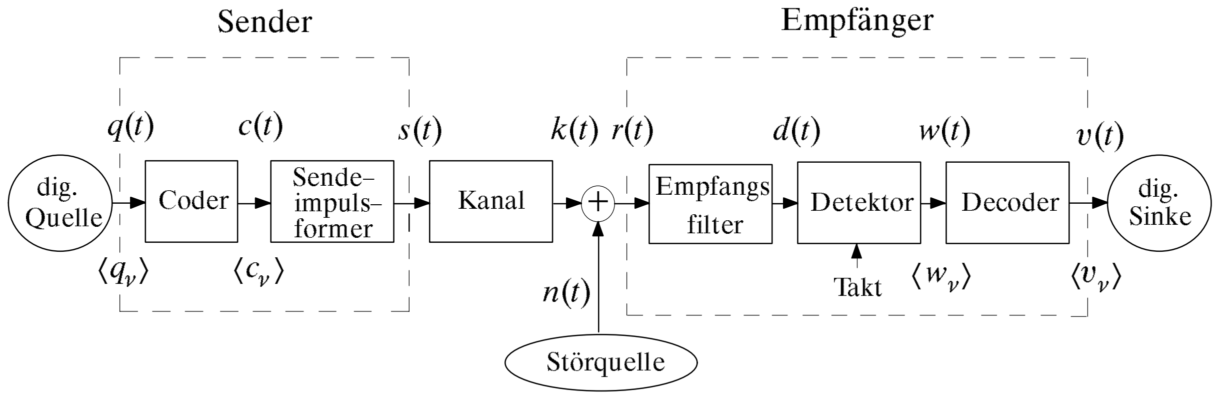


Bild 17.1: Blockschaltbild eines digitalen Basisbandübertragungssystems.

- Das Quellensignal $q(t)$ von Bild 17.1 sei ebenso wie das Sinkensignal $v(t)$ binär, also ein Digitalsignal. In Kapitel 12 wird am Beispiel der *Pulscodemodulation* gezeigt, wie aus einem analogen Nachrichtensignal durch Abtastung, Quantisierung und PCM–Codierung die binäre Quellensymbolfolge $\langle q_\nu \rangle$ erzeugt wird, und wie beim Empfänger durch Decodierung und Tiefpaßfilterung aus der Sinkensymbolfolge $\langle v_\nu \rangle$ das analoge Sinkensignal wiederhergestellt werden kann.
- Die Simulation einer redundanzfreien digitalen Quelle kann als *diskrete Zufallsgröße* (Kapitel 1) oder mit Hilfe von *PN–Generatoren* (Kapitel 2) erfolgen. Der zweite Weg hat den Vorteil, daß die Quellensymbolfolge reproduzierbar ist, was die Fehlersuche erleichtert.
- Statistische Bindungen innerhalb des Quellensignals können z.B. durch sogenannte *Markovketten* (Kapitel 3) eingebracht werden. In den meisten Fällen begnügt man sich mit Markovprozessen erster Ordnung.
- Zur quantitativen Erfassung solcher statistischer Bindungen eignen sich insbesondere die *Autokorrelationsfunktion* (AKF) und das *Leistungsdichtespektrum* (LDS), die in Kapitel 9 beschrieben sind. Zur Vorbereitung der Kreuzkorrelationsfunktionen (KKF) werden in Kapitel 5 die Eigenschaften *zweidimensionaler Zufallsgrößen* behandelt.
- Zur Berücksichtigung eventueller Codier– und Decodiereinrichtungen kann auf die Erläuterungen im Kapitel 15 zurückgegriffen werden. Einschränkend ist allerdings anzumerken, daß hier unter Codierung in erster Linie die spektrale Anpassung des Sendesignals an den Übertragungskanal (*Leitungscodierung*) verstanden wird. Fehlererkennung und Fehlerkorrektur werden dagegen nur am Rande erwähnt.

- Der Zusammenhang zwischen dem Zeitsignal und der Spektralfunktion eines *linearen zeitinvarianten Systems* wird in Kapitel 6 eingehend behandelt. Mit diesem Kapitel wird auch das systemtheoretische Handwerkszeug zur Beschreibung linearer Verzerrungen aufgrund eines nicht idealen Kanalfrequenzgangs $H_K(f)$ bereitgestellt.
- Die in Kapitel 7 eingehend beschriebene *Diskrete Fouriertransformation* (DFT) ist ein bei numerischen Berechnungen häufig eingesetztes Hilfsmittel, insbesondere der als *Fast–Fouriertransformation* (FFT) bekannte schnellere Algorithmus. Eine blockweise Berechnung des Kanalausgangssignals im Frequenzbereich mittels FFT kann unter Umständen von Vorteil sein. Zu beachten sind allerdings die Übergänge zwischen den einzelnen FFT–Blöcken.
- Anzumerken ist, daß der zu sorglose Umgang mit der FFT eine der häufigsten Fehlerursachen darstellt, insbesondere bei zeitlich unbegrenzten Signalen. Ein Hilfsmittel der *Spektralanalyse* sind die in Kapitel 8 beschriebenen *Fensterfunktionen*.
- Bei einer Echtzeitsimulation muß die Berechnung des Kanalausgangssignals $k(t)$ stets im Zeitbereich, d.h. als Faltungsintegral zwischen dem Sendesignal $s(t)$ und der Kanalimpulsantwort $h_K(t)$ erfolgen. Die erforderliche Rechenzeit kann jedoch entscheidend verringert werden, wenn es gelingt, den Kanalfrequenzgang durch ein rekursives Filter niedriger Ordnung zu approximieren (vgl. Kapitel 10).
- Ein wesentlicher Bestandteil einer jeden Systemsimulation ist die Modellierung der auftretenden Störungen als *kontinuierliche Zufallsgrößen* (vgl. Kapitel 4). *Gaußverteilte Störungen* können nach der Additionsmethode, dem Box–Muller–Verfahren oder durch Tabulated Inversion generiert werden. Dagegen erzeugt man Störungen mit davon abweichender Amplitudenverteilung meist durch nichtlineare Transformation.
- Voraussetzung für die Anwendung all dieser Algorithmen ist die Bereitstellung eines *Pseudozufallsgenerators* für unabhängige, gleichverteilte Größen. Programmtechnisch erhält man eine solche Gleichverteilung mit guten statistischen Eigenschaften (auch hinsichtlich der statistischen Bindungen) z.B. mit Hilfe eines *Linear Congruential Generators* (Abschnitt 4.3).
- *Farbige Störungen* kann man entsprechend Kapitel 10 aus einem Zufallssignal mit statistisch unabhängigen Abtastwerten durch ein *Digital–Filter* mit FIR oder IIR–Struktur erzeugen, wobei die Bestimmung der Filterkoeffizienten für ein zu modellierendes Leistungsdichtespektrum ein nicht zu unterschätzendes Problem darstellt.
- Das wichtige Beurteilungskriterium eines jeden digitalen Übertragungssystems ist die *Bitfehlerwahrscheinlichkeit* (Apriori–Kenngröße) bzw. die *Bitfehlerquote* (Aposteriori–Kenngröße). In Kapitel 13 werden diese Größen für ein einfaches Digitalsystem mit Schwellenwertentscheider berechnet.
- Der Empfänger stellt eine wichtige Einheit des gesamten Digitalsystemes dar, dessen Dimensionierung die Bitfehlerwahrscheinlichkeit in starkem Maße beeinflußt. Auf die Besonderheiten der linearen Signalentzerrung wird insbesondere in den Kapiteln 11 (*Optimale Filter*) und 16 (*Nyquist–Systeme*) eingegangen.
- Im Mittelpunkt von Kapitel 14 steht der Einfluß der *Impulsinterferenzen*, der anhand des Augendiagramms in einfacher Weise abgeschätzt werden kann.

Sie sehen aus dieser kurzen Zusammenstellung, daß Sie sich in diesem Praktikum doch einiges Wissen über die Systemsimulation aneignen konnten (oder hätten können). Trotzdem mußten einige wichtige Aspekte ausgeklammert werden.

- Nicht behandelt wurden hier die *trägermodulierten Digitalsysteme* wie Amplitude Shift Keying (ASK), Frequency Shift Keying (FSK) und Phase Shift Keying (PSK), die insbesondere für die Funkübertragung von großer Wichtigkeit sind. Eine Alternative zur vollständigen Simulation dieser Systeme bietet das *äquivalente Basisbandmodell*, bei dem auf die Modellierung von Modulator und Demodulator verzichtet wird, und sich somit ein Ersatzschaltbild entsprechend den Kapiteln 13 ... 16 ergibt.
- Wichtige Erkenntnisse über die trägermodulierten Digitalsysteme ASK, FSK und PSK lassen sich bereits anhand der entsprechenden *analogen Modulationsverfahren* AM, FM und PM gewinnen. Insbesondere gibt es zwischen den bei AM und ASK bzw. PSK eingesetzten Demodulatoren (kohärenter Synchron–, inkohärenter Hüllkurvendemodulator) praktisch keine Unterschiede.
- Durch intelligentere, aber auch aufwendigere *Empfängerstrategien* (Entscheidungsrückkoppelung, Korrelations– und Viterbi–Empfänger) können deutlich günstigere Ergebnisse erzielt werden als mit einem einfachen Schwellenwertentscheider gemäß Kapitel 13 und 14, insbesondere dann, wenn Impulsinterferenzen eine dominante Rolle spielen. Der wesentliche Vorteil gegenüber linearer Entzerrung liegt darin, daß die Kompensation der Amplituden– und Phasenverzerrungen nicht auf Kosten einer extensiven Rauschanhebung geht.
- Für bestimmte Anwendungen, z.B. Effizienzuntersuchungen von Codes, ist es vorteilhaft, den gesamten Kanaleinfluß (Verzerrungen und Störungen) durch ein Modell auf Bitfehlerebene zu erfassen (*Digitales Kanalmodell*). Als rechenzeitsparend erweist sich – falls keine Echtzeitanforderung vorliegt – die Fehlerabstandssimulation auf Basis des für statistisch unabhängige Fehler gültigen BSC–Modells. Zur Erfassung von Kanälen mit Bündelfehlercharakteristik eignen sich die auf Markovprozessen erster Ordnung basierenden Modelle von Gilbert–Elliott und McCullough.
- Ein wesentliches Merkmal der Mobilkommunikation, deren Bedeutung in den letzten Jahren in starkem Maße zugenommen hat, ist die *Zeitvarianz* des Kanals. Die für die Simulation, Optimierung und Dimensionierung zugrunde liegenden statistischen Kanalmodelle unterscheiden sich signifikant gegenüber den zeitinvarianten, deterministischen Beschreibungsformen. Zu nennen sind *frequenzselektives Fading* (Echos) und *nichtfrequenzselektives Fading* (Rayleigh–, Rice– und Lognormal–Fading).
- Nicht betrachtet wurden auch die Bandspreizverfahren (*Spread Spectrum Systems*). Diese sind zum einen für eine niederratige Digitalsignalübertragung gut geeignet, da sie resistent gegen verschiedenartige Störungen sind. Der wichtigere Grund für deren heutige Bedeutung ist jedoch die Möglichkeit, damit ein sehr effektives Mehrfachzugriffsverfahren realisieren zu können: *CDMA – Code Division Multiple Access*. Das amerikanische Mobilfunksystem *IS–95* basiert darauf im Gegensatz zum europäischen *GSM* (Kombination FDMA/TDMA). Das für 2002 geplante weltweite Kommunikationssystem *UTMS* (*Universal Telephone Mobile System*) baut ebenfalls auf CDMA auf.

– Wesentliche Eigenschaften über digitale Übertragungssysteme lassen sich aus der von Shannon begründeten *Informationstheorie* ableiten, wobei die dabei anzuwendende Methodik sich deutlich von der hier dargelegten Vorgehensweise unterscheidet. Auf diese Weise gewinnt man mannigfaltige Einsichten über Möglichkeiten und Grenzen der Quellen– und Kanalcodierung.

Genau die sieben hier dargelegten Themengebiete sind Inhalt des Praktikums *Simulation digitaler Übertragungssysteme*, das von mir in jedem Wintersemester angeboten wird und folgende Versuche beinhaltet:

- Analoge Modulationsverfahren (AMV),
- Digitale Modulationsverfahren (DMV),
- Impulsinterferenzen & Entzerrung (I&E),
- Digitale Kanalmodelle und ihre Anwendungen auf Multimediadaten (DKM),
- Mobilfunkkanal (MFK),
- Bandspreizung und CDMA (B&C),
- Wertdiskrete Informationstheorie (WDI).

Ich würde mich sehr freuen, Sie auch zu dieser Lehrveranstaltung begrüßen zu können. Diejenigen von Ihnen, die von der C–Programmierung abgeschreckt würden, kann ich beruhigen: Programmiertechnische Übungen werden im Praktikum *Simulation digitaler Übertragungssysteme* nicht gefordert.

Der Autor dankt der Studentin bzw. dem Studenten, die/der bis zu den letzten Zeilen dieser Anleitung durchgehalten hat, für das entgegengebrachte Interesse. Für weitere Fragen stehe ich Ihnen – aber auch Ihren bereits vorher ausgestiegenen – Kommilitonen jederzeit gerne zur Verfügung.

Musterlösungen der Vorbereitungsfragen (4. Termin)

V9.1:

a) Komplexe Fourierreihendarstellung (siehe Kapitel 6.2):

$$p_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \cdot e^{j\cdot 2\pi \cdot n \cdot t/T_A} \quad \text{mit} \quad D_n = \frac{1}{T_A} \cdot \int_{-T_A/2}^{T_A/2} p_\delta(t) \cdot e^{-j\cdot 2\pi \cdot n \cdot t/T_A}\, dt .$$

Im Bereich $-\frac{T_A}{2} \leq t \leq \frac{T_A}{2}$ gilt: $p_\delta(t) = T_A \cdot \delta(t)$

$$\begin{aligned} t \neq 0 &: \delta(t) = 0 ; \\ t = 0 &: e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot n\cdot t/T_A} = 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad D_n = \frac{T_A}{T_A} \cdot \underbrace{\int_{-T_A/2}^{T_A/2} \delta(t)\, dt}_{\text{nach Def.} = 1} = 1 \quad \text{(für alle } n\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad p_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\cdot 2\pi \cdot n \cdot t/T_A} \qquad \text{q.e.d.}$$

b) Mit $f_0 = \frac{n}{T_A}$: $e^{j\cdot 2\pi\cdot n\cdot t/T_A} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \delta(f - \frac{n}{T_A}) \quad \Rightarrow \quad P_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T_A})$.

Die Fouriertransformierte eines Diracpulses im Zeitbereich (Abstand T_A, Gewicht T_A) ist ein Diracpuls im Frequenzbereich mit Abstand $1/T_A$ und Gewichten 1.

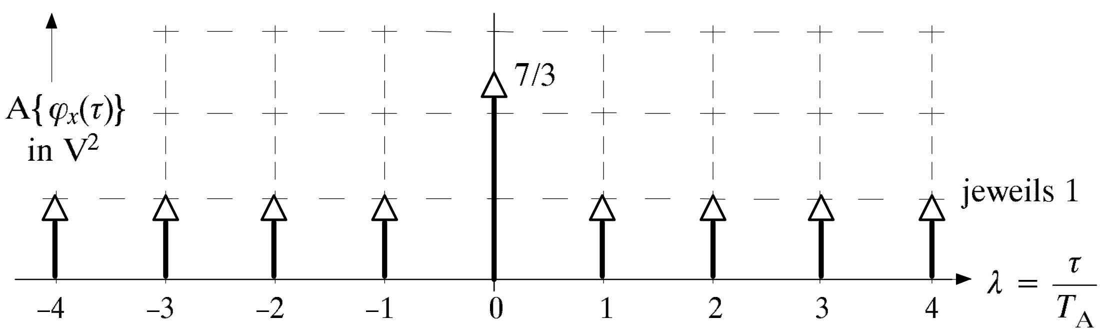
V9.2:

a) Nach Gl. (9.20) gilt: $\varphi_x(\lambda \cdot T_A) = \overline{x(\nu \cdot T_A) \cdot x((\nu + \lambda) \cdot T_A)} = \overline{x_\nu \cdot x_{\nu+\lambda}}$.

Für $\lambda = 0 : \varphi_x(0) = \overline{x_\nu^2} = m_2 = m_x^2 + \sigma_x^2$ (Gesamtleistung)

Für $\lambda \neq 0 : \varphi_x(\lambda \cdot T_A) = \overline{x_\nu \cdot x_{\nu+\lambda}} = \overline{x_\nu} \cdot \overline{x_{\nu+\lambda}} = m_x^2$ (Gleichleistung)

b) Aus V4.1: $m_x = 1\text{V}$, $\sigma_x = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{V}$, $m_2 = m_x^2 + \sigma_x^2 = \frac{7}{3}\text{V}^2$.



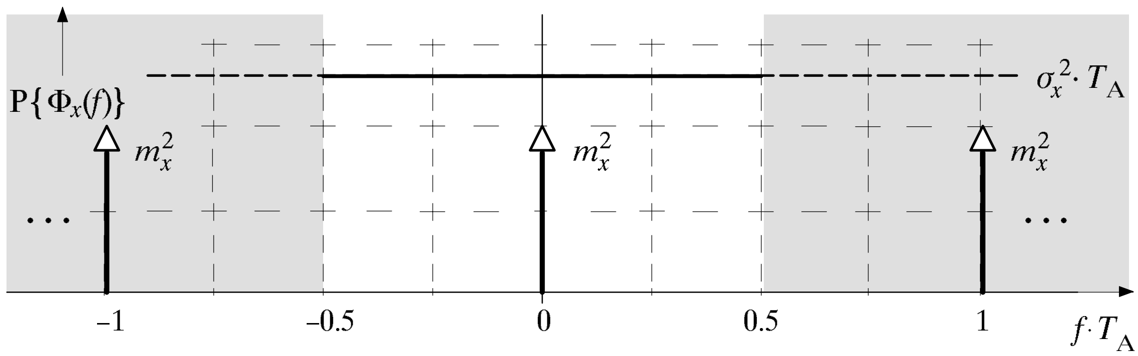
c) Überhaupt nicht. Für die AKF–Berechnung sind nur Mittelwert und Streuung relevant, nicht die WDF. Gleichverteilung und Gaußverteilung haben exakt die gleiche AKF, wenn diese Kenngrößen – wie hier – gleich sind.

d) Die zeitdiskrete AKF kann mit (9.19) wie folgt dargestellt werden:

$$A\{\varphi_x(\tau)\} = \sigma_x^2 \cdot T_A \cdot \delta(\tau) + m_x^2 \cdot T_A \cdot \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - \lambda \cdot T_A) \quad .$$

$$F\{A\{\varphi_x(\tau)\}\} = \sigma_x^2 \cdot T_A + m_x^2 \cdot \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{\lambda}{T_A}\right) \quad .$$

e) Es gilt $P\{\Phi_x(f)\} = F\{A\{\varphi_x(\tau)\}\}$.



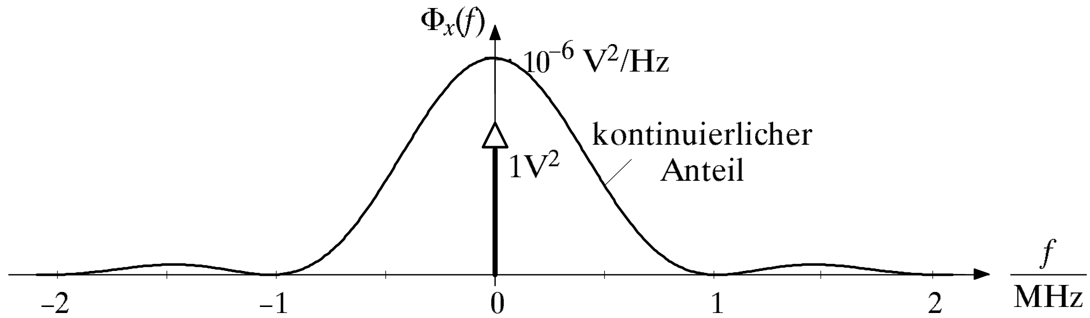
f) Durch Bandbegrenzung auf den Frequenzbereich $|f \cdot T_A| \le 0.5$.

g) Im relevanten Frequenzbereich gilt:

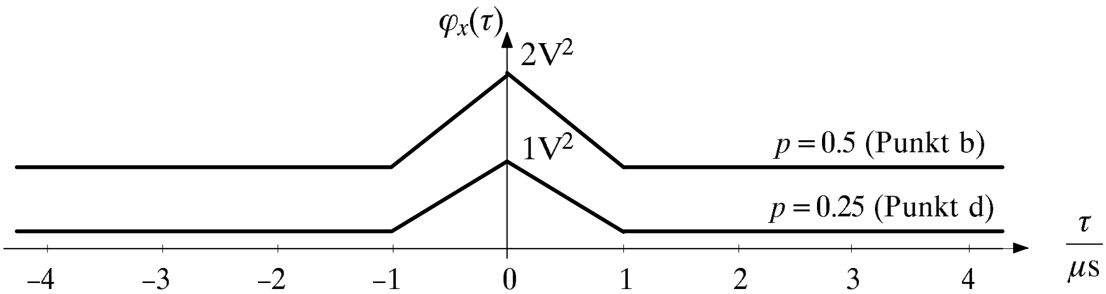
$$\Phi_x(f) = \sigma_x^2 \cdot T_A + m_x^2 \cdot \delta(f) = 1.33 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V^2/Hz} + 1\mathrm{V^2} \cdot \delta(f) \quad .$$

V9.3:

a)



b) Die AKF $\varphi_x(\tau)$ ist die Fouriertransformierte von $\Phi_x(f)$. Der diskrete LDS–Anteil bei $f = 0$ liefert einen konstanten AKF–Wert der Höhe $1\mathrm{V}^2$. Der kontinuierliche LDS–Anteil führt dagegen zu einem dreieckförmigen AKF–Anteil der Höhe $1\mathrm{V}^2$ und der (absoluten) Breite 2 µs. Damit ergibt sich der in nachfolgender Skizze mit $p = 0.5$ gekennzeichnete Verlauf.



c) Gleich– und Wechselleistung je 1V^2, Gesamtleistung $P_x = m_{2x} = 2\text{V}^2$.

d) Allgemein gilt: $m_1 = p \cdot 2\text{V}$, $P_x = p \cdot (2\text{V})^2$.

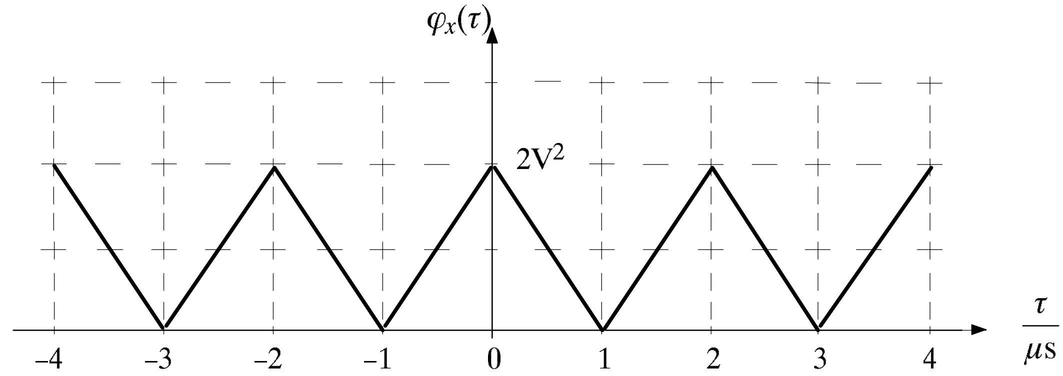
Mit $p = 0.25$: $m_1 = 0.5\text{V}$, $P_x = 1\text{V}^2$ (siehe Skizze zu Punkt b).

e) Für ein periodisches Signal mit der Periodendauer $T_0 = 2T$ gilt:

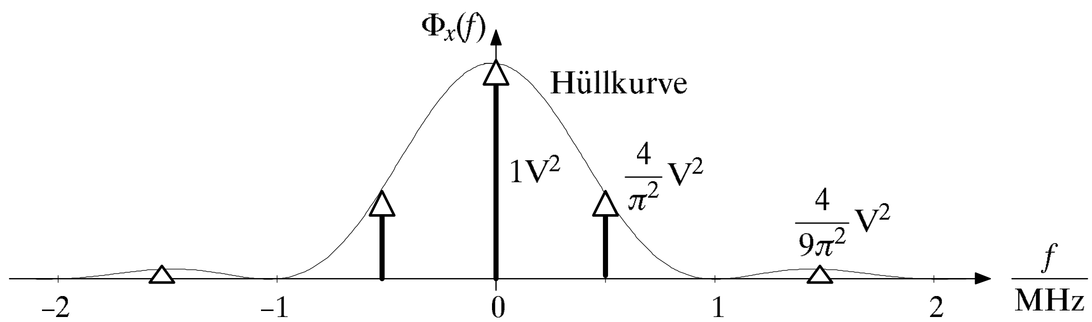
$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} x(t) \cdot x(t + \tau) \, \mathrm{d}t \, .$$

$\varphi_x(0) = 2\,\text{V}^2$ (Leistung) . Wegen Periodizität: $\varphi_x(2 \cdot T) = \varphi_x(4 \cdot T) = \ldots = \varphi_x(0)$,

$\varphi_x(T) = 0$. Wegen Periodizität: $\varphi_x(3 \cdot T) = \varphi_x(5 \cdot T) = \ldots = \varphi_x(T)$.



f) Da die AKF nun periodisch mit der Periodendauer 2 µs ist, besteht das LDS aus Diracfunktionen bei Vielfachen von 0.5 MHz. Die Imulsgewichte sind gleich den Koeffizienten der Fourierreihe. Es ergeben sich nur Anteile bei ungeraden Vielfachen von 500 kHz sowie ein Gleichanteil. Die Hüllkurve ist eine si^2–Funktion.



g) $\Phi_x(f)$ besteht aus Diracfunktionen bei ungeradzahligen Vielfachen von 500 kHz, wobei die Gewichte proportional zum si^2–Anteil des LDS des stochastischen Zufallssignals sind (vgl. Skizze bei Punkt a). Die Diracfunktion bei $f = 0$ tritt sowohl beim stochastischen als auch beim periodischen Rechtecksignal auf.

h) Das vorliegende Signal ist gegenüber dem vorher betrachteten Signal um die Zeitdifferenz $T/2$ verschoben. Da Phasenbeziehungen in der AKF verlorengehen, ergibt sich genau die gleiche AKF und somit auch das gleiche LDS.

V10.1:

a) Für den Effektivwert folgt aus $\varphi_x(0)$ gemäß (10.3): $\sigma_x = 0.1\,\text{V}$. Die Korrelationsdauer läßt sich aus dem flächengleichen Rechteck (über die AKF) bestimmen: $T_x = 0.33\ \mu\text{s}$.

b) Das LDS ist gleich der Fouriertransformierten der AKF. Mit der Tabelle im Anhang C:

$$\Phi_x(f) = \sigma_x^2 \cdot T_x \cdot \exp\big(-\pi \cdot (T_x \cdot f)^2\big)\ .$$

Die Breite des flächengleichen Rechtecks ergibt sich hier zu $1/T_x = 3$ MHz.

c) $$\Phi_y(f) = \Phi_x(f) \cdot |H(f)|^2 = \sigma_x^2 \cdot T_x \cdot \exp\big(-\pi \cdot (T_x \cdot f)^2\big) \cdot H_0^2 \cdot \exp\big(-2\pi \cdot (f/\Delta f)^2\big)$$
$$= H_0^2 \cdot \sigma_x^2 \cdot T_x \cdot \exp\Big(-\pi \cdot f^2 \cdot \big(T_x^2 + \frac{2}{\Delta f^2}\big)\Big)$$

Mit $T_y^2 = T_x^2 + \dfrac{2}{\Delta f^2}$: $\quad \Phi_y(f) = H_0^2 \cdot \sigma_x^2 \cdot T_x \cdot \exp\big(-\pi \cdot (T_y \cdot f)^2\big)\ .$

d) Die AKF ist gleich der Fourierrücktransformierten des in c) berechneten LDS:

$$\varphi_y(\tau) = H_0^2 \cdot \sigma_x^2 \cdot \frac{T_x}{T_y} \cdot \exp\Big(-\pi \cdot \big(\frac{\tau}{T_y}\big)^2\Big)\ .$$

e) Nach Bild 9.3 ist $T_y = 1\ \mu\text{s} = 3 \cdot T_x$. Mit dem Ergebnis aus c) folgt daraus:

$$\Delta f = \sqrt{\frac{2}{T_y^2 - T_x^2}} = \sqrt{\frac{2}{(3T_x)^2 - T_x^2}} = \frac{1}{2 \cdot T_x} = 1.5\ \text{MHz}\ .$$

f) $\sigma_y = \sqrt{\varphi_y(\tau = 0)} = H_0 \cdot \sigma_x \cdot \sqrt{T_x/T_y}. \quad \sigma_y = \sigma_x: \quad H_0 = \sqrt{T_y/T_x} = \sqrt{3}\,.$

g) Beide Mustersignale lassen bereits vermuten, daß die Prozesse mittelwertfrei sind und den gleichen Effektivwert aufweisen. Bei $H_0 = 1$ wäre der Effektivwert des Ausgangssignals (σ_y) aufgrund der Tiefpaßfilterung stets kleiner als σ_x. Die Bedingung $\sigma_y = \sigma_x$ läßt sich nur mit einer Verstärkung ($H_0 > 1$) erfüllen.

Aus Bild 9.3(b) ist weiter zu erkennen, daß die AKF–Werte um so langsamer abfallen, je stärker die inneren statistischen Bindungen sind; es gilt $T_x = 0.33\ \mu\text{s}$ und $T_y = 1\ \mu\text{s}$. Dagegen verhalten sich die Breiten der flächengleichen Rechtecke über die jeweiligen Leistungsdichtespektren hierzu reziprok.

h) $y(t)$ hat wie $x(t)$ eine Gaußsche WDF. Daraus folgt per Definition: $K_x = K_y = 3$.

V10.2:

a) Nichtrekursives Laufzeitfilter, da AKF für $|\lambda| \geq 3$ identisch 0 ist.

b) Aus gleichem Grund genügt $M = 2$.

c) Man erhält das folgende Gleichungssystem:

$$\lambda = 0: a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1.58\ ,\quad \lambda = 2: a_0 \cdot a_2 = -0.3\ .$$

Daraus folgt: $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_0 \cdot a_2 = 1.58 - 0.6 = 0.98 \ \Rightarrow\ u + w = 0.98$

$\lambda = 1: a_0 \cdot a_1 + a_1 \cdot a_2 = -0.49 \ \Rightarrow\ u \cdot w = (-0.49)^2.$

Positive Lösung: $u = w = 0.49$.

d) Durch Einsetzen in obige Gleichungen erhält man die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2:

A) $a_0 = 1.0$, $a_1 = -0.7$, $a_2 = -0.3$,
B) $a_0 = -1.0$, $a_1 = 0.7$, $a_2 = 0.3$,
C) $a_0 = 0.3$, $a_1 = 0.7$, $a_2 = -1.0$,
D) $a_0 = -0.3$, $a_1 = -0.7$, $a_2 = 1.0$.

e) $$h_{\rm A}(t) = 1.0 \cdot \delta(t) - 0.7 \cdot \delta(t - T_{\rm A}) - 0.3 \cdot \delta(t - 2T_{\rm A}) \ ,$$
$$h_{\rm B}(t) = -1.0 \cdot \delta(t) + 0.7 \cdot \delta(t - T_{\rm A}) + 0.3 \cdot \delta(t - 2T_{\rm A}) \ ,$$
$$h_{\rm C}(t) = 0.3 \cdot \delta(t) + 0.7 \cdot \delta(t - T_{\rm A}) - 1.0 \cdot \delta(t - 2T_{\rm A}) \ ,$$
$$h_{\rm D}(t) = -0.3 \cdot \delta(t) - 0.7 \cdot \delta(t - T_{\rm A}) + 1.0 \cdot \delta(t - 2T_{\rm A}) \ .$$
Das heißt: Eine Multiplikation mit –1 und eine Spiegelung ändert die AKF nicht.

f) Die hier vorgegebenen AKF–Werte unterscheiden sich von denjenigen nach a) nur durch die Konstante 1. Da die AKF ab $|\lambda| = 3$ konstant ist, genügt hierfür ebenfalls ein nichtrekursives Laufzeitfilter 2. Ordnung, dem zusätzlich am Ausgang ein Gleichanteil von 1 hinzugefügt wird. Somit lautet die Generierungsvorschrift:
$$y_\nu = a_0 \cdot x_\nu + a_1 \cdot x_{\nu-1} + a_2 \cdot x_{\nu-2} + 1 \ .$$

g) Die WDF $f_x(x)$ ist für alle 3 Eingangswerte ($x_\nu, x_{\nu-1}$ und $x_{\nu-2}$) rechteckförmig zwischen –1 und +1. Durch Multiplikation mit a_0, a_1 bzw. a_2 wird die Breite dieses Rechtecks verändert. Die Ausgangs–WDF $f_y(y)$ erhält man, wenn man die drei unterschiedlich breiten Rechtecke miteinander faltet und die Konstante 1 durch eine Verschiebung der WDF berücksichtigt.

h) Nach den Ergebnissen von V4.4(a) und (b) ergibt sich für eine rechteckförmige WDF die Kurtosis zu $K_x = 1.8$. Durch das lineare Filter wird die Ausgangsgröße gaußförmiger und die Kurtosis nähert sich mehr dem "Gaußwert" 3. Daraus folgt: $1.8 < K_y < 3$.

Musterlösungen der Versuchsdurchführung (4. Termin)

D9.1:

Mustersignal	statistische Bindungen	Form der AKF	Form des LDS
1	mittlere	langsam abklingend	mittelbreit
2	keine (stat. unabhängig)	diracförmig	konstant
3	geringe	schnell abklingend	breit
4	starke	sehr langsam abkling.	schmal

D9.2:

a) Die Fehler bei der numerischen Bestimmung von AKF und LDS sind erwartungsgemäß bei kleinen Werten von N am größten. Die Fehler bei der Berechnung der einzelnen (diskreten) AKF–Werte $\varphi_x(\lambda \cdot T_A)$ sind miteinander korreliert. Ist z.B. der Wert $\varphi_x(8 \cdot T_A)$ zu groß gegenüber dem exakten Wert, so sind mit großer Wahrscheinlichkeit auch $\varphi_x(7 \cdot T_A)$ und $\varphi_x(9 \cdot T_A)$ zu groß, da jeder ”Ausreißer” der Signalwerte benachbarte AKF–Werte in gleicher Richtung verfälscht. Dadurch ergibt sich für die ”Fehlerkurve” in Abhängigkeit von $\lambda = \tau / T_A$ in etwa ein wellenförmiger Verlauf.

b) Bei der LDS–Berechnung akkumulieren sich die Fehler der AKF und sind somit noch deutlicher. Mit wachsendem N werden die Effekte geringer: $N = 1000$: MQF = 0.029, $N = 5000$: MQF = 0.019, $N = 10000$: MQF = 0.011, $N = 50000$: MQF = 0.002.

c)

	$L = 5$	$L = 10$	$L = 20$	$L = 40$
MQF (bzgl. LDS)	0.0029	0.0021	0.0040	0.0123

Bezüglich des Parameters L gibt es ein Optimum, das vom LDS–Verlauf abhängt. Ist L zu klein, so bleiben relevante AKF–Werte unberücksichtigt. Bei zu großem Wert werden dagegen auch bedeutungslose Koeffizienten bewertet, die nur den Fehler vergrößern. Je kleiner die statistischen Bindungen sind, um so kleiner sollte L sein.

D9.3:

a) Es ist eine Bandbegrenzung auf $|f| \le 1/(2 \cdot T_A) = 100$ MHz zu erkennen. Die absolute Bandbreite beträgt somit $\Delta f = 200$ MHz. Daraus folgt $T_A = 1/\Delta f = 5$ ns.

b) Die Fourierrücktransformation des rechteckförmigen LDS führt zur AKF:

$$\varphi_x(\tau) = \sigma_x^2 \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot \tau / T_A) \quad \text{mit} \quad \sigma_x^2 = (2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{V}^2/\mathrm{Hz}) \cdot (200\,\mathrm{MHz}) = 4\mathrm{V}^2.$$

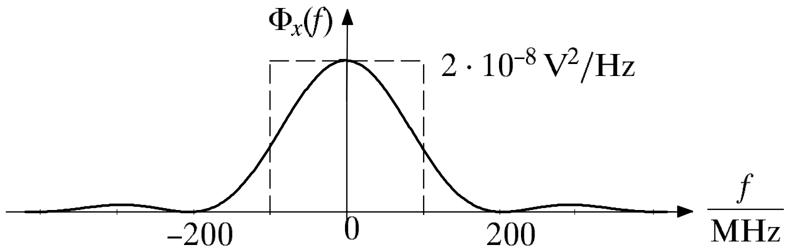
Hierbei ist berücksichtigt, daß die Autokorrelationsfunktion $\varphi_x(\tau)$ an der Stelle $\tau = 0$ gleich der Fläche über das Leistungsdichtespektrum $\Phi_x(f)$ ist.

c) Zwei Signalwerte, die um ganzzahlige Vielfache der Zeitdifferenz $\tau = 5$ ns auseinanderliegen, sind nicht miteinander korreliert; an diesen Stellen besitzt die AKF jeweils Nulldurchgänge. Die beiden Signalwerte $x(t)$ und $x(t + 1\mathrm{ns})$ sind demgegenüber ”stark positiv” korreliert. Das bedeutet: Ist $x(t)$ positiv und ”groß”, so ist mit einer großen Wahrscheinlichkeit auch der benachbarte Wert $x(t + 1\mathrm{ns})$ positiv und ”groß”. Dagegen sind die beiden Signalwerte $x(t)$ und $x(t + 7\mathrm{ns})$ negativ korreliert: Ist $x(t)$ positiv, so ist $x(t + 7\mathrm{ns})$ wahrscheinlich negativ.

d) Zu einer dreieckförmigen AKF $\varphi_x(\tau)$ gehört ein si^2–förmiges LDS $\Phi_x(f)$. Nach der Tabelle im Anhang C gilt:

$$\Phi_x(f) = \frac{4\mathrm{V}^2}{200\,\mathrm{MHz}} \cdot \mathrm{si}^2\left(\frac{\pi \cdot f}{200\,\mathrm{MHz}}\right) .$$

Die systemtheoretische Bandbreite beträgt somit wiederum $\Delta f = 200$ MHz.



e) Ein Gleichanteil (1V) bewirkt in der AKF zusätzlich einen konstanten Anteil mit $1\mathrm{V}^2$.

f) Im LDS ergibt der Gleichanteil (1V) eine Diracfunktion bei $f = 0$ mit Gewicht $1\mathrm{V}^2$.

D10.1:

a)

	$\varphi_y(0)$	$\varphi_y(T_A)$	$\varphi_y(2T_A)$	m_y	σ_y
berechnet	$0.7^2 + 0.3^2 = 0.580$	$0.7 \cdot 0.3 = 0.210$	0	0	$\sqrt{0.58} \approx 0.762$
simuliert	0.578	0.211	0.005	0.005	0.759

b) $\Phi_y(f) = T_A \cdot \varphi_y(0) + 2T_A \cdot \varphi_y(T_A) \cdot \cos(2\pi f T_A) = T_A \cdot \left(0.58 + 0.42 \cdot \cos(2\pi f T_A)\right)$

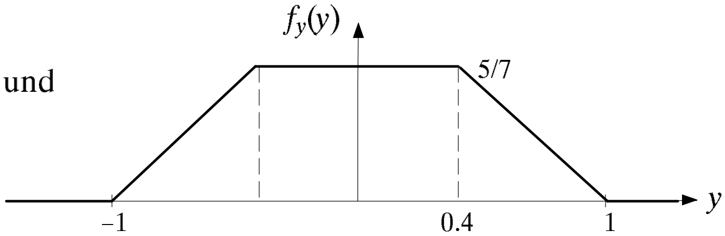
Das bedeutet:

Das LDS schwankt cosinusförmig zwischen 0.16 und 1, also um Mittelwert 0.58.

c) $y_\nu = 0.7 \cdot x_\nu + 0.3 \cdot x_{\nu-1}$

x_ν , $x_{\nu-1}$ sind gleichverteilt und statistisch unabhängig.

y_ν hat trapezförmige WDF.



d) 1. $a_0 = -0.7, a_1 = -0.3$; 2. $a_0 = -0.3, a_1 = -0.7$; 3. $a_0 = 0.3, a_1 = 0.7$.

e)

	$\varphi_y(0)$	$\varphi_y(T_A)$	$\varphi_y(2T_A)$	m_y	σ_y
$m_x = 0, \sigma_x = 1$	0.578	0.211	0.005	0.005	0.759
$m_x = 0.5, \sigma_x = 1$	0.828	0.461	0.255	0.505	0.759

Im LDS erkennt man eine Diracfunktion bei $f = 0$ mit Gewicht 0.25.

f) Die neuen Koeffizienten a_0' und a_1' müssen im gleichen Verhälnis zueinander stehen wie a_0 und a_1, aber wegen $\sigma_y = \sigma_x$ muß gelten : $a_0'^2 + a_1'^2 = 1$

$$\Longrightarrow \quad a_0' = \frac{0.7}{\sqrt{0.7^2 + 0.3^2}} = 0.919 \;, \quad a_1' = \frac{0.3}{\sqrt{0.7^2 + 0.3^2}} = 0.394 \;.$$

Allgemein gilt weiter: $m_y = m_x \cdot \sum_{\mu=0}^{M} a_\mu$,

$$\Longrightarrow \quad m_y = m_x \cdot (a_0' + a_1') = 0.5 \cdot (0.919 + 0.394) = 0.656 \;.$$

D10.2:

a) $M = 2, a_0 = 1, a_1 = -0.7, a_2 = -0.3$.

	$\varphi_y(0)$	$\varphi_y(T_A)$	$\varphi_y(2T_A)$	m_y	σ_y
berechnet (V10.2)	1.580	–0.490	–0.300	0.000	$\sqrt{1.58} \approx 1.257$
simuliert (D10.2)	1.556	–0.484	–0.289	0.000	1.247

b) Die anderen Koeffizientensätze liefern vergleichbare Ergebnisse hinsichtlich AKF und LDS, obwohl die Zeitsignale unterschiedlich sind.

c) $\Phi_y(f) = T_A \cdot (1.58 - 0.98 \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot T_A) - 0.60 \cdot \cos(2\pi \cdot 2 \cdot f \cdot T_A))$

d) Mit $\beta = 2\pi \cdot f \cdot T_A$:

$$H(f) = a_0 + a_1 \cdot \cos(\beta) - \mathrm{j} \cdot a_1 \cdot \sin(\beta) + a_2 \cdot \cos(2\beta) - \mathrm{j} \cdot a_2 \cdot \sin(2\beta)$$

$$H^*(f) = a_0 + a_1 \cdot \cos(\beta) + \mathrm{j} \cdot a_1 \cdot \sin(\beta) + a_2 \cdot \cos(2\beta) + \mathrm{j} \cdot a_2 \cdot \sin(2\beta)$$

$$|H(f)|^2 = a_0^2 + a_1^2 \cdot (\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)) + a_2^2 \cdot (\cos^2(2\beta) + \sin^2(2\beta)) +$$

$$2 \cdot a_0\, a_1 \cdot \cos(\beta) + 2 \cdot a_0\, a_2 \cdot \cos(2\beta) + 2a_1\, a_2 \cdot \underbrace{(\cos(\beta) \cdot \cos(2\beta) + \sin(\beta) \cdot \sin(2\beta))}_{= \cos(\beta)}$$

$$\Rightarrow \quad |H(f)|^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2 \cdot (a_0\, a_1 + a_1\, a_2) \cdot \cos(\beta) + 2 \cdot a_0\, a_2 \cdot \cos(2\beta) \,.$$

Ergebnis stimmt mit den angegebenen Gleichungen überein.

e) Da $H(0) = 0$ ist, wird der Gleichanteil im Eingangssignal völlig unterdrückt und man erhält das gleiche Ergebnis wie unter a). D.h.: $\Phi_y(f)$ beinhaltet keine Diracfunktion.

D10.3:

a)

LDS	si^2–förmig	si^4–förmig	prop. $\frac{1}{f^2+f_0^2}$	gaußförmig
AKF	dreieckförmig	gaußähnlich ($\Delta * \Delta$)	zweiseitig exponentiell	gaußförmig
Impulsantwort	rechteckförmig	dreieckförmig	einseitig exponentiell	gaußförmig

Aus dem gegebenen LDS erhält man durch Fourierrücktransformation die AKF. Diese ergibt sich entsprechend Gl. (10.2) aus der Faltung der Impulsantwort mit der gespiegelten Impulsantwort.

b) 1) $M = 1{:}\ f \cdot T_A = 0.5$; 2) $M = 3{:}\ f \cdot T_A = 0.25$; 3) $M = 9{:}\ f \cdot T_A = 0.1$;

c) Die Breite der Impulsantwort ist $M \cdot T_A$. Je breiter diese ist, desto schmaler und höher ist das LDS. Das bedeutet, daß die Streuung des Ausgangssignals konstant ist. Dies deshalb, weil die Filterkoeffizienten entsprechend (10.14) normiert sind. Die Form des LDS nähert sich immer mehr einer si^2–Funktion an.

D10.4:

a) Aus einem Koeffizientenvergleich mit der Reihendarstellung der Exponentialfunktion folgt: $b_1 = e^{-T_A/\tau_0}$, $a_0 = \sigma_y \cdot \sqrt{1-b_1^2}$.

b) $\tau_0/T_A = \dfrac{-1}{\ln 0.6} \approx 1.95$, $\sigma_y^2 = \dfrac{0.64}{1-0.36} = 1$.

	$\varphi_y(0)$	$\varphi_y(T_A)$	$\varphi_y(2T_A)$	$\varphi_y(3T_A)$	$\varphi_y(4T_A)$
theoretisch nach Gl. (10.24)	1.000	0.600	0.360	0.216	0.130
per Simulation (Menüpunkt 4)	0.997	0.602	0.364	0.217	0.124

c)

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
0.8000	0.4800	0.2880	0.1728	0.1037	0.0622	0.0373	0.0224	0.0134

Innerhalb der Simulationsgenauigkeit ergeben sich gleiche AKF–Werte wie bei b).

Musterlösungen der Übungsaufgaben (4. Termin)

Ü9.1: Die Größe des internen Feldes muß mindestens $L = N + k$ betragen; im vorliegenden Beispiel also 5040. Bei einem 32 Bit–Rechner benötigt jede Float–Variable vier Byte. Daraus ergibt sich ein Speicherbedarf von etwas mehr als 20 kByte.

```
void stpak1(N,akf)
  long N; float akf[];
{ int nue,k=40,lambda;
  float x[5040],stpzgr();
  for (lambda=0; lambda<=k; lambda++)        /* Vorbelegen der Feldelemente */
    akf[lambda]=0.;
  for (nue=0; nue<N+k; nue++)                /* Aufruf von k Zufallsgrößen  */
    x[nue]=stpzgr();
  for (nue=0;nue<N;nue++)                    /* Summierung nach Bild 9.6    */
  for(lambda=0; lambda<=k; lambda++)
    akf[lambda]=akf[lambda]+x[nue]*x[nue+lambda];
  for (lambda=0; lambda<=k; lambda++)        /* Normierung                  */
    akf[lambda]/=N;
}
```

Ü9.2:

ν	i	$H[0]$	$H[1]$	$H[2]$	$H[3]$	$H[4]$	$H[5]$	$H[6]$	$H[7]$	$H[8]$	$H[9]$	$H[10]$
48	**3**	x_{56}	x_{57}	x_{58}	x_{48}	x_{49}	x_{50}	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}	x_{55}

$$\varphi_x(0) = \varphi_x(0) + H[3]\cdot H[3] \qquad \varphi_x(9) = \varphi_x(9) + H[3]\cdot H[1]$$
$$\varphi_x(1) = \varphi_x(1) + H[3]\cdot H[4] \qquad \varphi_x(10) = \varphi_x(10) + H[3]\cdot H[2]$$
$$\varphi_x(2) = \varphi_x(2) + H[3]\cdot H[5]$$

```
void stpak2(N,akf)
  long N;
  float akf[ ];
{ int i,j,k=40,lambda,nue;
  float H[41],stpzgr();
  for (lambda=0; lambda<=k; lambda++)                      /* Vorbelegungen   */
    { akf[lambda]=0;
      H[lambda]=stpzgr();
    }
  i=0;
  for (nue=0; nue<N; nue++)                                /* Äußere Schleife */
  { j=0;
    for (lambda=0; lambda<=k; lambda++)                    /* Innere Schleife */
    { j=i+lambda;
      if (j > k)
       j=j-k-1;
       akf[lambda]=akf[lambda]+H[i]*H[j];
    }
    H[i]=stpzgr();
    i++;
    if (i>k) i=i-k-1;
  }
  for (lambda=0; lambda<=k; lambda++)                     /* Division durch N */
    akf[lambda]/=N;
}
```

Ü10.1:

```
#include <math.h>
double filabh(nue,M,mx,sigmax,a)
  long nue,M;
  double mx,sigmax;
  float a[ ];
{ int i; double gauss(),y;
  static double x[41];
  if (nue == 1)                               /* Vorbelegung des Feldes (nue=1) */
    { for (i=0; i<=M; i++)
      x[i]=gauss(mx,sigmax);
    }
  for (i=M; i>=1; i--)                  /* Verschiebung um eine Einheit (nue>1) */
    x[i]=x[i-1];
  x[0]=gauss(mx,sigmax);
  y=0.;                                                 /* Nichtrekursives Filter */
  for (i=0; i<=M; i++)
    y=y+a[i]*x[i];
  return(y);
}
```

Ü10.2:

```
#include <math.h>
double filrek(nue,mx,sigmax,a0,b1)
  long nue;
  double mx,sigmax,a0,b1;
{ static double yalt=0.;
  double gauss(),yneu;
  yneu=gauss(mx,sigmax)*a0+yalt*b1;
  yalt=yneu;
  return(yneu);
}
```

Musterlösungen der Vorbereitungsfragen (5. Termin)

V11.1:

a) Allgemein gilt für die Impulsantwort eines Matched–Filters: $h_{\mathrm{MF}}(t) = K \cdot g(T_{\mathrm{D}} - t)$. Aufgrund der Symmetrie bezüglich $t = 0$ und der Voraussetzung $T_{\mathrm{D}} = 0$ folgt daraus $h_{\mathrm{MF}}(t) = K \cdot g(t)$ und dementsprechend $H_{\mathrm{MF}}(f) = K \cdot G(f) = K \cdot g_0 \cdot T \cdot \mathrm{si}(\pi f T)$. Aus der angegebenen Normierungsbedingung ergibt sich weiterhin: $K = 1/(g_0 \cdot T)$.

b) Für das Detektions–Signalstörleistungsverhältnis gilt mit (11.12) und $E_g = g_0^2 \cdot T$:

$$\varrho_{d,\max}(T_{\mathrm{D}}) = \frac{2 \cdot E_g}{N_0} = \frac{2 \cdot g_0^2 \cdot T}{N_0} .$$

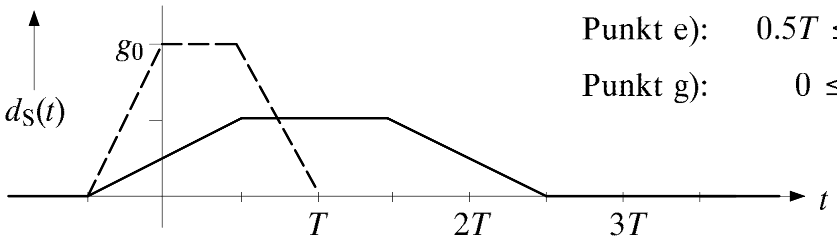
Allgemein kann man das Nutzsignal am Ausgang als das Faltungsprodukt von Impuls $g(t)$ und Impulsantwort $h_{\mathrm{MF}}(t)$ berechnen. Es ergibt sich ein dreieckförmiger Impuls zwischen $-T$ und T mit dem Maximum bei $t = 0$: $d_{\mathrm{S}}(0) = K \cdot E_g$. Mit $E_g = g_0^2 \cdot T$ und $K = 1/(g_0 \cdot T)$ folgt $d_{\mathrm{S}}(0) = g_0$. Für die Störleisung vor dem Detektor erhält man:

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{si}^2(\pi f T)\, \mathrm{d}f = \frac{N_0}{2T} .$$

c) Kausalität bedeutet: $h_{\mathrm{MF}}(t) = 0$ für $t < 0$. Die Impulsantwort von Punkt a) ist akausal. Durch eine Laufzeit von $T/2$ erreicht man Kausalität. Damit ist der Ausgangsimpuls gegenüber Punkt b) ebenfalls um $T/2$ verschoben. Der kleinstmögliche Wert von T_{D} ist somit ebenfalls $T/2$. Die Störung bleibt gegenüber Punkt b) unverändert, da die Laufzeit nur den Phasengang und nicht den Betrag des Filterfrequenzgangs verändert.

d) Integration des Empfangssignals $r(t)$ über die Zeitdauer T.

e)
g)



Punkt e): $0.5T \le T_{\mathrm{D,opt}} \le 1.5T$

Punkt g): $0 \le T_{\mathrm{D,opt}} \le 0.5T$

f) Das Filter hat die gleiche Form wie das Matched–Filter gemäß Punkt b) und c), ist aber nur halb so breit. Daraus folgt ein um ca. 3 dB kleineres S/N–Verhälnis:

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{si}^2(2\pi f T)\, \mathrm{d}f = \frac{N_0}{4T} \quad \Rightarrow \quad \varrho_d = \frac{(g_0/2)^2}{N_0/(4T)} = \frac{g_0^2 \cdot T}{N_0} = \frac{\varrho_{d,\max}}{2} .$$

h) Das Filter ist nun doppelt so breit wie erforderlich und damit die Störleistung auch doppelt so groß wie bei b). Daraus folgt wieder ein um 3 dB kleineres S/N–Verhälnis:

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{si}^2\!\left(\pi f \frac{T}{2}\right) \mathrm{d}f = \frac{N_0}{T} \quad \Rightarrow \quad \varrho_d = \frac{g_0^2}{N_0/T} = \frac{g_0^2 \cdot T}{N_0} = \frac{\varrho_{d,\max}}{2} .$$

V11.2:

a) Mit $E_g = g_0^2 \cdot T/\sqrt{2}$: $\varrho_{d,\mathrm{WR}} = \dfrac{2 \cdot E_g}{N_0} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot g_0^2 \cdot T}{N_0}$.

b) $$\Phi_n(f) = \frac{N_0}{2} \cdot |H_\mathrm{N}(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{(1 + \mathrm{j} \cdot f/f_0)(1 - \mathrm{j} \cdot f/f_0)} = \frac{N_0/2}{1 + (f/f_0)^2} .$$

Nach Anhang C beschreibt $H_\mathrm{N}(f)$ den Frequenzgang eines RC–Tiefpasses 1. Ordnung.

c) $$H_\mathrm{MF}(f) = K \cdot \frac{G^*(f)}{|H_\mathrm{N}(f)|^2} = K \cdot \frac{G^*(f)}{N_0/2} \cdot \Big(1 + (\frac{f}{f_0})^2\Big) .$$

Ohne den Klammerausdruck ergibt sich das Matched–Filter für weißes Rauschen. Zusätzlich werden nun noch diejenigen Frequenzanteile entsprechend dem Klammerausdruck angehoben, bei denen weniger starke Störungen vorliegen.

d) $$\varrho_d = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|G(f)|^2}{\Phi_n(f)} \,\mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|G(f)|^2}{N_0/2} \,\mathrm{d}f + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|G(f)|^2}{N_0/2} \cdot \frac{f^2}{f_0^2} \,\mathrm{d}f = \varrho_{d,\mathrm{WR}} + I_2$$

$$\text{mit} \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|G(f)|^2}{N_0/2} \cdot \frac{f^2}{f_0^2} \,\mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_0^2 \cdot T^2 \cdot \mathrm{e}^{-2\pi (fT)^2}}{N_0/2} \cdot \frac{f^2}{f_0^2} \,\mathrm{d}f .$$

e) Unter Berücksichtigung des Ergebnisses von (a) erhält man weiter:

$$I_2 = \frac{\varrho_{d,\mathrm{WR}} \cdot \sqrt{2} \cdot T}{f_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \cdot \mathrm{e}^{-2\pi (fT)^2} \,\mathrm{d}f \qquad \text{Subst. } x = 2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot f \cdot T :$$

$$I_2 = \frac{\varrho_{d,\mathrm{WR}} \cdot \sqrt{2} \cdot T}{f_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{4\pi T^2} \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2} \frac{\mathrm{d}x}{2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot T} = \frac{\varrho_{d,\mathrm{WR}}}{4\pi \cdot (f_0 \cdot T)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2} \,\mathrm{d}x .$$

Daraus folgt mit (11.35): $\varrho_d = \varrho_{d,\mathrm{WR}} \cdot \Big(1 + \dfrac{1}{4\pi \cdot (f_0 \cdot T)^2}\Big)$.

f) Aus (e) folgt direkt:

$$4\pi \cdot (f_0 \cdot T)^2 = 1 \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot T}$$

Je schmaler der Impuls $g(t)$ – d.h. je breitbandiger das Spektrum $G(f)$ – ist, desto kleiner muß der Wert von f_0 sein, um zum gleichen Detektions–Signalstörleistungsverhältnis ϱ_d zu führen.

g) Mit diesen Voraussetzungen würde der Frequenzgang $H_\mathrm{MF}(f)$ entsprechend (11.23) mit wachsender Frequenz bis ins Unendliche ansteigen. Theoretisch ergäbe sich bei Anwendung von (11.24) auch ein unendlich großes S/N–Verhältnis, natürlich auch eine unendlich große Bandbreite. Praktisch relevant ist diese Konfiguration nicht.

V11.3:

a) $$P_S = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_s(f)\ \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_0}{1+(f/f_0)^2}\ \mathrm{d}f = 2\cdot\Phi_0\cdot f_0 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\ \mathrm{d}u =$$

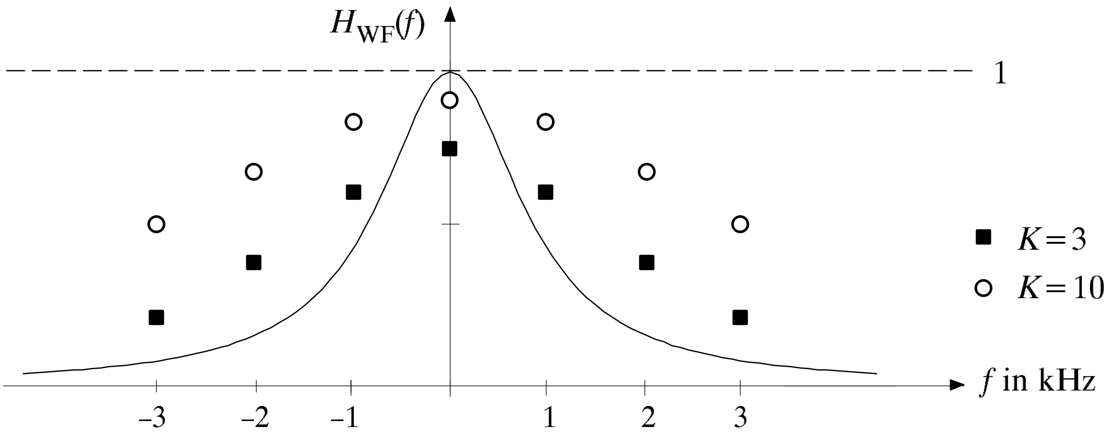
$$= 2\cdot\Phi_0\cdot f_0\cdot\arctan(\infty) = \Phi_0\cdot f_0\cdot\pi\ .$$

b) $$H_{WF}(f) = \frac{1}{1+\Phi_n(f)/\Phi_s(f)} = \frac{1}{1+\frac{N_0}{2\Phi_0}\cdot(1+(f/f_0)^2)} = \frac{1}{1+\frac{1}{K}\cdot(1+(f/f_0)^2)}\ .$$

Bei keinem anderen Filter ist die quadratische Abweichung zwischen dem Ausgangssignal $d(t)$ und dem zu approximierenden Nutzsignal $s(t)$ geringer.

c)

	$f = 0$	$f = f_0$	$f = 2f_0$	$f = 3f_0$
$H_{WF}(f)$ für $K=3$	0.750	0.600	0.375	0.231
$H_{WF}(f)$ für $K=10$	0.909	0.833	0.667	0.500



Bei kleineren Störungen, d.h. größerem K, muß auch weniger gefiltert werden.

d) $$\overline{\varepsilon_t^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_s(f)\cdot\Phi_n(f)}{\Phi_s(f)+\Phi_n(f)}\ \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{WF}(f)\cdot\Phi_n(f)\ \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0/2}{1+\frac{N_0}{2\Phi_0}\cdot(1+(f/f_0)^2)}\ \mathrm{d}f$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_0}{1+K+(f/f_0)^2}\ \mathrm{d}f = \frac{\Phi_0\cdot f_0\cdot\pi}{\sqrt{1+K}} = \frac{P_S}{\sqrt{1+K}}\ \text{(vgl. Punkt a).}$$

MQF ist proportional zur Nutzleistung. Je größer K ist, um so kleiner wird der MQF.

e) Mit $K = 3:\ \overline{\varepsilon_t^2} = \frac{P_S}{2}\ ;\ \ \overline{\varepsilon_t^2} = \frac{P_S}{10}:\ \ K = 99\ .$

V12.1:

a) Nach dem Abtasttheorem (vgl. Abschnitt 12.3) muß gelten:

$$f_A \geq 2 \cdot f_{N,max} = 8 \text{ kHz} = 8000 \text{ Abtastwerte/s.}$$

$$\Rightarrow \quad T_A = \frac{1}{f_A} = \frac{1}{8000 \text{ Hz}} = 125\mu\text{s.}$$

b) $N = \text{ld}(M) = \text{ld}(256) = 8$ Bit/Abtastwert.

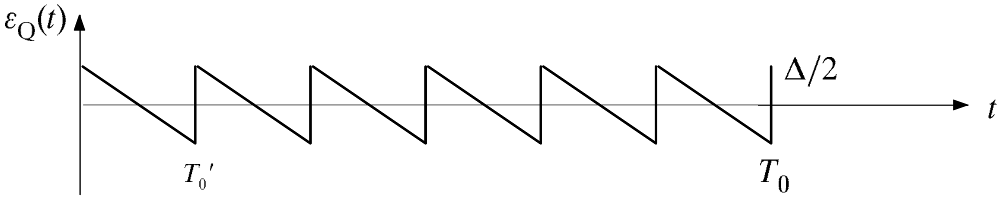
c) $T_B = \dfrac{T_A}{N} = \dfrac{125\mu\text{s}}{8} = 15.625\mu\text{s.}$

d) $T_B = \dfrac{15.625\mu\text{s}}{32} = 0.488\mu\text{s.}$

e) $T_B = \dfrac{T_A}{Z \cdot N} = \dfrac{1}{2 \cdot f_{N,max} \cdot Z \cdot N} \Rightarrow f_B = \dfrac{1}{T_B} = 2 \cdot f_{N,max} \cdot Z \cdot N = 2.048$ Mbit/s.

<u>Hinweis:</u> $f_{N,max}$ in Hz, aber f_B in bit/s !

V12.2:

a) 

Aufgrund des vorliegenden Nachrichtensignals genügt es, die Integration (Mittelung) auf die Zeitdauer T_0' (siehe Skizze) zu beschränken. Man erhält:

$$\varepsilon_Q(t) = \frac{\Delta}{2} \cdot \left(1 - \frac{t}{T_0'/2}\right) \quad \Rightarrow \quad P_Q = \frac{\Delta^2}{4T_0'} \cdot \int_0^{T_0'} \left(1 - \frac{2t}{T_0'}\right)^2 \, dt$$

$$\text{Subst.:} \quad x = \frac{t}{T_0'} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{T_0'}:$$

$$P_Q = \frac{\Delta^2}{4} \cdot \int_0^1 (1-2x)^2 \, dx \quad = \frac{\Delta^2}{4} \cdot \int_0^1 (1 - 4x + 4x^2) \, dx = \frac{\Delta^2}{4} \cdot \left(x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}$$

$$\Rightarrow P_Q = \frac{\Delta^2}{4} \cdot \left(1 - 2 + \frac{4}{3}\right) = \frac{\Delta^2}{12}. \qquad \text{Mit } \Delta = \frac{2 \cdot q_{max}}{M}: \; P_Q = \frac{q_{max}^2}{3 \cdot M^2}.$$

b) In gleicher Weise erhält man für die Leistung des Nutzsignals (um Faktor M^2 größer):

$$P_S = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} q(t)^2 \, dt = \frac{q_{max}^2}{3} \; .$$

c) $\varrho_Q = \dfrac{P_S}{P_Q} = M^2 \;\Rightarrow\; 10 \cdot \lg(\varrho_Q) = 20 \cdot \lg(M) = 20 \cdot \lg(2) \cdot \mathrm{ld}(M)$ in dB .

$M = 2^8 = 256$: $10 \cdot \lg(\varrho_Q) \approx 6.02 \cdot 8 = 48.16$ dB ,

$M = 2^{16}$: $10 \cdot \lg(\varrho_Q) \approx 6.02 \cdot 16 = 96.32$ dB .

d) $10 \cdot \lg(\varrho_Q) = 60$ dB $\Rightarrow \varrho_Q = M^2 = 10^6 \Rightarrow M = 1000 \Rightarrow N = 10$.

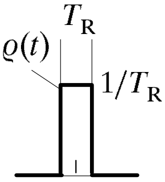
e) 1. Alle Amplitudenwerte gleichwahrscheinlich (z.B. sägezahnförmiges NF–Signal),
2. lineare Quantisierung,
3. Quantisierer ist genau an das Nachrichtensignal angepaßt ($Q_{max} = q_{max}$).

V12.3:

a) Das Signal $q_A(t)$ ergibt sich bei natürlicher Abtastung aus der Multiplikation von $q(t)$ mit $p_R(t)$. In den Bereichen $p_R(t) \neq 0$ gilt somit $q_A(t) = q(t)$.

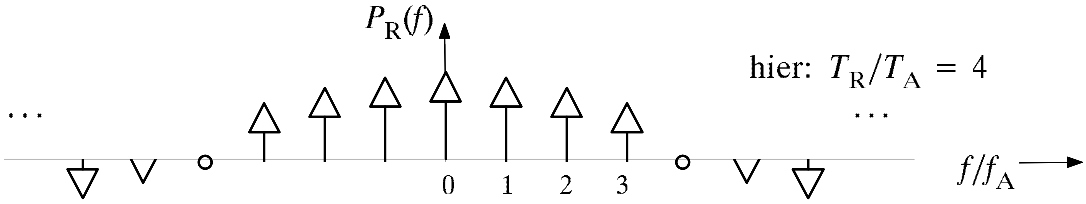
b) Den Rechteckpuls kann man sich durch Faltung des Diracpulses mit der Rechteckfunktion entstanden denken: $p_R(t) = p_\delta(t) * \varrho(t)$.

c) Nach Faltungssatz: $P_R(f) = P_\delta(f) \cdot R(f)$ mit $R(f) = \mathrm{si}(\pi \cdot f \cdot T_R) \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \varrho(t)$

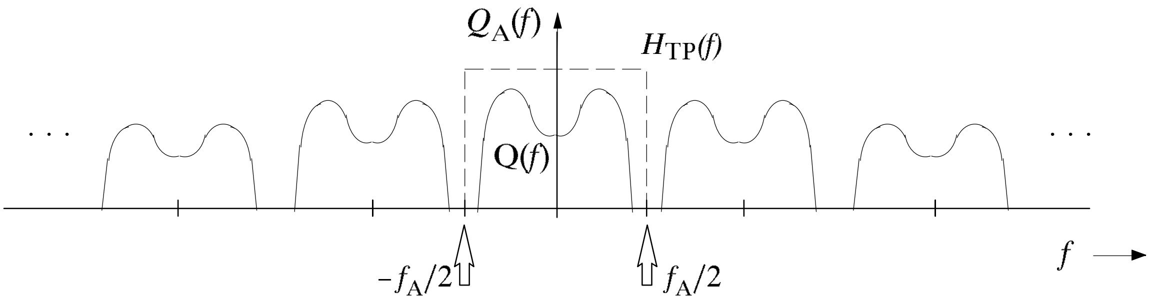


$$\Rightarrow \quad P_R(f) = \mathrm{si}(\pi \cdot f \cdot T_R) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n \cdot f_A)$$

D.h., die Gewichte der Diracfunktionen sind jetzt nicht mehr konstant, sondern gemäß einer si–Funktion verändert.



d)



Bei Abtastung mit einem Rechteckpuls $p_R(t)$ ist das Spektrum $Q_A(f)$ nicht mehr periodisch, sondern die "Seitenbänder" sind gedämpft.

e) Wie bei der Abtastung mit einem Diracpuls genügt hier ebenfalls ein idealer Tiefpaß zwischen $\pm f_A/2$ (Küpfmüller–Tiefpaß, siehe Skizze bei Punkt d).

Musterlösungen der Versuchsdurchführung (5. Termin)

D11.1:

a) $N_0/T = 0.01 \cdot \sigma_n^2 \;\Rightarrow\; \sigma_d = \sqrt{\frac{N_0}{2T}} = \sqrt{0.005} \cdot \sigma_n \;.$

	$10 \cdot \lg\, \varrho_{d,\max}$ (berechnet)	$10 \cdot \lg\, \varrho_{d,\max}$ (simuliert)	σ_d	σ_n
$N_0/T = 10^{-4}$	43.01 dB	43.01 dB	0.007	0.100
$N_0/T = 10^{-3}$	33.01 dB	33.01 dB	0.022	0.316
$N_0/T = 10^{-2}$	23.01 dB	23.01 dB	0.071	1.000
$N_0/T = 10^{-1}$	13.01 dB	13.01 dB	0.224	3.162

Der Effektivwert σ_d der Störungen im Ausgangssignal $d(t)$ ist proportional zum Störeffektivwert σ_n im Eingangssignal. Bei der hier vorliegenden Konstellation beträgt der Proportionalitätsfaktor etwa 0.071. Wird σ_n um den Faktor 10 vergrößert, so wächst auch σ_d um den Faktor 10 und der Störabstand wird um genau 20 dB kleiner.

b) $\varrho_{d,\max}(T_\mathrm{D}) = \frac{200}{\sigma_n^2} \overset{!}{\geq} 100 \;\Rightarrow\; \sigma_n \leq \sqrt{2} \;\Rightarrow\; N_0/T \leq 0.02 \;.$

c)

	$d_\mathrm{S}(T_\mathrm{D})$	σ_d	$10 \cdot \lg\, \varrho_{d,\max}$
Rechteckimpuls	1.000	0.100	20.00 dB
Gaußimpuls	0.283	0.053	14.56 dB
Exponentialimp.	0.125	0.035	10.97 dB

d) Nach (11.10) ist der Nutzabtastwert $d_\mathrm{S}(T_\mathrm{D,opt})$ proportional zur Impulsenergie E_g. Diese ist beim Rechteckimpuls am größten, beim Exponentialimpuls am kleinsten.

e) Je schmaler die Spektralfunkion $G(f)$ des Eingangsimpulses ist, desto schmalbandiger ist das Matched–Filter und um so kleiner σ_d. Nach (11.11) ist σ_d proportional zu $\sqrt{E_g}$.

f) Nach (11.12) ist bei exakter Anpassung von Eingangsimpuls und Filterfunktion der Störabstand $\varrho_{d,\max}$ ebenfalls proportional zur Impulsenergie E_g.

D11.2:

a) $\varrho_{d,\max}(T_{\rm D}) = \dfrac{2\cdot E_g}{N_0} \overset{!}{=} 100 \;\Rightarrow\; E_g = \displaystyle\int_0^\infty g_0^2\cdot {\rm e}^{-2t/\Delta t_g}\,{\rm d}t = \dfrac{g_0^2\cdot \Delta t_g}{2} = 1 \Rightarrow\; g_0 = 2\,.$

b)

Matched–Filter für	$d_{\rm S}(T_{\rm D})$	σ_d	$10\cdot\lg\,\varrho_{d,\max}$
Exponentialimp.	0.250	0.025	20.00 dB
Rechteckimpuls	0.501	0.071	17.00 dB
Gaußimpuls	0.340	0.038	19.16 dB

c) Der Integrator über T (Matched–Filter für einen Rechteckimpuls der Dauer T) ist zu breitbandig. Bezüglich des Nutzsignals bringt dies zwar eine Verbesserung um den Faktor 2. Gleichzeitig wird aber auch σ_d um ca. den Faktor 3 vergrößert. Insgesamt ergibt sich ein um ca. 3 dB kleinerer Rauschabstand als beim Matched–Filter.

Der Gaußtiefpaß, optimal für einen Gaußimpuls mit $\Delta t_g = 0.4\cdot T$, ist etwas günstiger. Hier beträgt die Verschlechterung weniger als 1 dB. Dieses Filter paßt von der Bandbreite her besser an den gegebenen Eingangsimpuls als der eben untersuchte Integrator, lediglich die Filterform ist nicht optimal.

d)

exponentiell fallender Impuls	$d_{\rm S}(T_{\rm D})$	σ_d	$10\cdot\lg\,\varrho_{d,\max}$
$\Delta t_g/T = 0.10$	0.147	0.025	15.40 dB
$\Delta t_g/T = 0.25$	0.250	0.025	20.00 dB
$\Delta t_g/T = 0.40$	0.305	0.025	21.73 dB

Es ergibt sich aufgrund der unterschiedlichen Zeitkonstanten ein unsymmetrischer Ausgangsimpuls mit deutlich geringerer Amplitude. Da das Filter nicht verändert wurde, bleibt $\sigma_d = 0.025$ konstant. Der Rauschabstand vermindert sich um 4.6 dB.

e) Auch hier ändert sich σ_d nicht; der Nutzabtastwert ist größer als bei Anpassung (0.305 statt 0.250). Dies ist jedoch kein der Theorie widersprechendes Ergebnis. Wäre das Filter auch auf $\Delta t_g = 0.4\cdot T$ abgestimmt, so ergäbe sich aufgrund der größeren Energie $10\cdot\lg\,\varrho_{d,\max} = 22.04$ dB. Dieser Maximalwert wird hier um 0.3 dB unterschritten.

D11.3:

a) Das LDS $\Phi_s(f)$ des Nutzsignals ist si^2–förmig. Entsprechend (11.29) bleiben die Nullstellen dieser Funktion im Frequenzgang $H_{\mathrm{WF}}(f)$ erhalten. Die Seitenschwinger von $H_{\mathrm{WF}}(f)$ sind ausgeprägter als die von $\Phi_s(f)$, der Gleichsignalübertragungsfaktor beträgt $H_{\mathrm{WF}}(0) = \Phi_s(0)/(\Phi_s(0) + \Phi_n(0)) = 64/65 = 0.985$. Das Ausgangssignal $d(t)$ des Wiener–Filters paßt sich in etwa dem Nutzsignal $s(t)$ an; die größten Abweichungen gibt es bei den Sprungstellen. Es ist MQF = 0.111.

Matched–Filter für Binärsignal	$H_{\mathrm{WF}}(0)$	$\overline{\varepsilon_t^2}$	Bemerkungen
$\sigma_n = 1$	0.985	0.111	kleinstmöglicher Wert für gegebene Konfiguration
$\sigma_n = 0.5$	0.996	0.058	MQF etwa halb so groß
$\sigma_n = 2$	0.941	0.221	MQF etwa doppelt so groß

b) Die Nullstellen von $\Phi_s(f)$ bleiben im Frequenzgang $H_{\mathrm{WF}}(f)$ weiterhin stets erhalten. Bei kleinerer Störung werden die Seitenschwinger von $H_{\mathrm{WF}}(f)$ weiter verstärkt. Außerdem liegt $H_{\mathrm{WF}}(0)$ nun näher bei 1 und der MQF gegenüber Punkt a) ist nur etwa halb so groß. Mit $\sigma_n = 2$ ergeben sich die dazu gegensätzlichen Änderungen.

c) <u>Wiener–Filter:</u> $\overline{\varepsilon_t^2} =$ 0.111

<u>Filter 1. Ordnung:</u> $\overline{\varepsilon_t^2} =$ 0.128

$\Delta f =$ 6.00 $\quad f_{\mathrm{M}} =$ 0 (Tiefpaß) $\quad H_0 =$ 1.00

d) <u>Wiener–Filter:</u> $\overline{\varepsilon_t^2} =$ 0.111

<u>Gaußfilter:</u> $\overline{\varepsilon_t^2} =$ 0.130

$\Delta f =$ 4.00 $\quad f_{\mathrm{M}} =$ 0 (Tiefpaß) $\quad H_0 =$ 1.00

Beide Filter führen gegenüber dem Wiener–Filter zu einem größeren MQF.

D11.4:

a) Das LDS $\Phi_s(f)$ des Cosinussignals ist wie auch das Amplitudenspektrum ein Linienspektrum. Außerhalb der Frequenzen $\pm f_0$ ergibt sich somit aus (11.29): $H_{\mathrm{WF}}(f) = 0$. Da eine Diracfunktion um den Faktor ∞ größer ist als das kontinuierliche LDS $\Phi_n(f)$, erhält man bei $\pm f_0$: $H_{\mathrm{WF}}(f_0) = 1$. Das Wiener–Filter ist also theoretisch unendlich schmal. Der MQF ist (theoretisch) unabhängig von σ_n gleich 0.

b) Das Wiener–Filter ist zwar theoretisch unendlich schmal, praktisch muß natürlich immer eine gewisse Bandbreite B bereitgestellt werden. In Gl. (11.29) muß dann auch für $\Phi_n(f_0)$ ein endlicher Wert eingesetzt werden. Damit ergibt sich für $H_{\mathrm{WF}}(f_0)$ ein Wert kleiner als 1. Mit zunehmendem σ_n wird dieser kleiner und der MQF größer.

$$\sigma_n = 0.5: \quad H_{\mathrm{WF}}(f_0) = 0.985\ ; \quad \overline{\varepsilon_t^2} = 0.001\ ;$$

$$\sigma_n = 2: \quad H_{\mathrm{WF}}(f_0) = 0.800\ ; \quad \overline{\varepsilon_t^2} = 0.018\ .$$

c) $\overline{\varepsilon_t^2} = 0.021$

d) Mit Cosinus–Rolloff–Filter: $\overline{\varepsilon_t^2} = 0.022$;
optimale Werte: $\Delta f = 1.400$; $f_{\mathrm{M}} = 3.000$; $H_0 = 0.970$; $r = 0.800$.

D12.1:

a) Das Signal wird durch nur 3 Parameter (Amplitude, Frequenz, Phase) beschrieben. Durch diese 3 Parameter ist der gesamte Signalverlauf $q(t)$ festgelegt.

b) Entsprechend dem Abtasttheorem muß gelten: $f_{\mathrm{A}} = 10$ kHz, $f_{\mathrm{G}} = 5$ kHz.

c) Ja, es ist $v(t) = q(t)$. Bei dieser Parameterwahl besteht $Q(f)$ aus zwei Diracfunktionen, jeweils mit reellem Gewicht 0.5. Das Spektrum $Q_{\mathrm{A}}(f)$ ergibt sich aus der periodischen Fortsetzung von $Q(f)$ im Abstand f_{A}. Insgesamt ergibt sich für $Q_{\mathrm{A}}(f)$ ein Diracpuls mit Impulsgewichten 1; die einzelnen Diraclinien liegen bei ± 5 kHz, ± 15 kHz, ± 25 kHz usw. Wegen $H(f_{\mathrm{G}}) = 0.5$ werden die beiden Linien bei ± 5 kHz halbiert, alle anderen unterdrückt. Dies führt dazu, daß $v(t) = q(t)$ richtig rekonstruiert wird.

d) Bei dieser Parameterwahl besteht $Q(f)$ auch aus zwei Diracfunktionen bei ± 5 kHz, nun aber mit komplexen Gewichten. Bei der periodischen Fortsetzung von $Q(f)$ im Abstand f_{A} addieren sich nur deren Realteile konstruktiv; dagegen löschen sich die Imaginärteile aus. Dies bedeutet, daß die Phaseninformation verlorengeht: Das Sinkensignal verläuft nun cosinusförmig (Phase 0°) und ist gegenüber $q(t)$ auch um den Amplitudenfaktor $\cos(45°) = 0.707$ verfälscht.

e) Aus den unter e) genannten Gründen ergibt sich $v(t) = 0$.

f) Nun fallen die Faltungsprodukte nicht zusammen; z.B. ist $Q_{\mathrm{A}}(5\text{ kHz}) = Q(5\text{ kHz})$ und $Q_{\mathrm{A}}(6\text{ kHz}) = Q(-5\text{ kHz})$. Mit dem idealen Tiefpaß ($f_{\mathrm{G}} = 5.5$ kHz) lassen sich somit auch die Signale nach d) und e) phasenrichtig rekonstruieren.

g) Mit $f_{\mathrm{N,max}} = 4$ kHz und $f_{\mathrm{A}} = 10$ kHz ist das Abtasttheorem erfüllt und $v(t) = q(t)$.

h) Mit $f_{\mathrm{G}}/f_{\mathrm{A}} = 0.35$ (d.h. $f_{\mathrm{G}} = 3.5$ kHz) wird der Anteil bei $f = 4$ kHz fälschlicherweise unterdrückt und es gilt $v(t) \neq q(t)$. Bei zu großer Grenzfrequenz (z.B. $f_{\mathrm{G}} = 6.5$ kHz) wird dagegen der aufgrund der Abtastung entstehende Signalanteil bei $f = 6$ kHz durch den Tiefpaß nicht entfernt; dies führt ebenfalls zu einer Signalverfälschung.

D12.2:

a) Bei natürlicher Abtastung ist innerhalb der durch den Rechteckpuls vorgegebenen Zeitintervalle das abgetastete Signal $q_A(t)$ gleich dem Nachrichtensignal $q(t)$, außerhalb Null. Bei diskreter Abtastung setzt sich $q_A(t)$ aus Rechteckimpulsen zusammen, deren unterschiedliche Amplituden durch die Abtastwerte von $q(t)$ bestimmt werden.

b) Bei natürlicher Abtastung ist

$$q_A(t) = q(t) \cdot p_R(t) = q(t) \cdot [p_\delta(t) * \varrho(t)] \ .$$

Dagegen gilt bei diskreter Abtastung:

$$q_A(t) = [q(t) \cdot p_\delta(t)] * \varrho(t) \ .$$

c) Natürliche Abtastung:

$$Q_A(f) = Q(f) * [P_\delta(f) \cdot R(f)] \ ,$$

Diskrete Abtastung:

$$Q_A(f) = [Q(f) * P_\delta(f)] \cdot R(f) \ .$$

d) Bei natürlicher Abtastung erfolgt zuerst die Multiplikation des Diracspektrums $P_\delta(f)$ mit $R(f)$, anschließend die Faltung mit $Q(f)$. Im Bereich von –5 kHz ... 5 kHz sind deshalb alle Spektrallinien gleich hoch; wegen $T_R/T_A = 0.5$ sind diese allerdings nur halb so hoch wie diejenigen von $Q(f)$. Die Spektrallinien im Bereich von ± 5 kHz ... ± 15 kHz sind ebenfalls alle gleich hoch, aber (entsprechend der si–Funktion) um den Faktor 0.636 kleiner als diejenigen im inneren Bereich.

e) Der MQF ist mit $1.87 \cdot 10^{-13}$ vernachlässigbar klein, allerdings nur, wenn $H(0) = 2$ ist. Aufgrund der Aussagen zu Punkt d) ist dies verständlich. Das bedeutet: Bei natürlicher Abtastung genügt ein Küpfmüller–Tiefpaß zur Signalrekonstruktion.

f) Der MQF zwischen Sinken– und Quellensignal ist nun mit $2.9 \cdot 10^{-3}$ deutlich größer. Dies hat folgenden Grund: Bei diskreter Abtastung treten durch die Faltung von $Q(f)$ mit $P_\delta(f)$ konstant hohe Linien auf, wie es auch bei Abtastung mit einem Diracpuls der Fall ist. Durch die anschließende Multiplikation mit $R(f)$ entsprechend c) werden diese Spektrallinien nun unterschiedlich gewichtet. Die Folge ist, daß auch im Bereich von –5 kHz ... 5 kHz alle Linien von $Q_A(f)$ unterschiedlich hoch sind. Mit dem Küpfmüller–Tiefpaß zur Signalrekonstruktion gilt nun $V(f) = Q_A(f) \cdot H(f) = Q(f) \cdot R(f)$, so daß der Fehler durch die diskrete Abtastung auch in $v(t)$ erhalten bleibt.

g) Der si–förmige Abfall muß durch den inversen Verlauf korrigiert werden. Damit muß das Rekonstruktionsfilter folgenden Frequenzverlauf besitzen:

$$H(f) = \frac{1}{\mathrm{si}(\pi f T)} \cdot H_{KTP}(f) \ .$$

Mit diesem Filter, das im Programm als "1/si–KTP" bezeichnet wird, ist der mittlere quadratische Fehler zwischen Sinken– und Quellensignal wieder vernachlässigbar klein, solange $H(0) = T_A/T_R = 2$ gilt.

D12.3:

a) Bei sägezahnförmigem Nachrichtensignal ist auch das Fehlersignal sägezahnförmig (vgl V12.2a). Das Fehlersignal $\varepsilon(t)$ bei cosinusförmigem Nachrichtensignal unterscheidet sich demgegenüber besonders im flachen Signalverlauf.

b)

NF–Signal	P_S (simuliert)	P_Q (simuliert)	$10 \cdot \lg(\varrho_Q)$ (simuliert)	$10 \cdot \lg(\varrho_Q)$ (berechnet)
Sägezahn	0.333	$1.31 \cdot 10^{-3}$	24.07 dB	24.06 dB
Cosinus	0.500	$1.48 \cdot 10^{-3}$	25.30 dB	———

c)

NF–Signal	P_S (simuliert)	P_Q (simuliert)	$10 \cdot \lg(\varrho_Q)$ (simuliert)	$10 \cdot \lg(\varrho_Q)$ (berechnet)
Sägezahn	0.333	$5.10 \cdot 10^{-6}$	48.15 dB	48.12 dB
Cosinus	0.500	$4.75 \cdot 10^{-6}$	50.23 dB	———
Muster–signal 1	0.244	$5.02 \cdot 10^{-6}$	46.87 dB	———

d) Das erreichbare S/N–Verhältnis ϱ_Q hängt auch vom Quellensignal ab. Die Näherung $\varrho_Q = M^2$ gilt nur für das sägezahnförmige Quellensignal. Bei anderer Signalform sind Abweichungen von ca. 2 dB durchaus im Bereich des Möglichen.

e) $P_Q = 5.02 \cdot 10^{-6}$ $\quad 10 \cdot \lg(\varrho_Q) = 46.87$ dB (siehe Punkt d)

$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = 4.05 \cdot 10^{-6}$ $\quad 10 \cdot \lg(\varrho_v) = 47.81$ dB (Fenster ”*Sinkensignal*”)

Es ist ein Unterschied, ob man – wie bei $10 \cdot \lg(\varrho_Q)$ – nur die Differenz zwischen $q(t)$ und $q_Q(t)$ betrachtet oder – wie bei $10 \cdot \lg(\varrho_v)$ – den Unterschied zwischen $v(t)$ und $q(t)$. Letzterer beinhaltet auch die Operationen ”Abtastung” und ”Signalrekonstruktion” und verändert aufgrund der unzureichenden Quantisierung das Ergebnis, obwohl Abtastung und Signalrekonstruktion selbst ideal sind. Versteht das jemand?

f) $q_A(\nu \cdot T_A)$ ist wertkontinuierlich, $q_Q(\nu \cdot T_A)$ dagegen wertdiskret mit $M = 256$ Stufen. Die Signale $q_C(t)$ und $v_C(t)$ sind binär. Die Zuordnung von q_Q zu q_C geschieht nach der Dualcodierung. Bei den Voraussetzungen gilt $v_C(t) = q_C(t)$ und $v_Q(t) = q_Q(t)$. Zu den Abtastzeitpunkten $\nu \cdot T_A$ hat das Sinkensignal die gleichen Werte wie das quantisierte Signal: $v(\nu \cdot T_A) = q_Q(\nu \cdot T_A) \neq q(\nu \cdot T_A)$. Zwischen den Abtastwerten wird auch das Fehlersignal $\varepsilon_{v_q}(t) = v(t) - q(t)$ durch den Küpfmüller–Tiefpaß interpoliert.

g) $Q_{\max} = 0.7: \quad 10 \cdot \lg(\varrho_v) = 25.99\,\text{dB}$ (Quantisierung im Sättigungsbereich),

$Q_{\max} = 1.3: \quad 10 \cdot \lg(\varrho_v) = 45.83\,\text{dB}$ (unnötig große Quantisierungsintervalle).

In beiden Fällen ist ein merkbarer Störabstandsverlust feststellbar. Im ersten Fall ($Q_{\max}$ zu klein) hängt das damit zusammen, daß das Signal begrenzt wird. Ist dagegen $Q_{\max} > q_{\max}$, so sind die Quantisierungsintervalle größer als erforderlich. Dagegen liefert $Q_{\max} = 0.8$: $10 \cdot \lg(\varrho_v) = 49.61$ dB. Dieser Störabstand ist um ca. 2.7 dB besser als bei $Q_{\max} = 1$. Der Grund hierfür ist, daß der maximale Abtastwert des Signalausschnitts nur 0.775 beträgt und nicht $q_{\max} = 1$. Bei einer anderem Phasenverlauf wäre jedoch $Q_{\max} = 1$ der optimale Wert.

D12.4:

a) $q_K = f(q_A)$: Kompressorkennlinie (kleine Werte werden gespreizt, große gestaucht); bei gleichmäßiger Quantisierung ist diese Kennlinie eine Gerade.

$q_Q = f(q_K)$: Kennlinie bei gleichmäßiger Quantisierung (beschreibbar durch M).

$q_Q = f(q_A)$: Quantisierungskennlinie allgemein; bei gleichmäßiger Quantisierung ist diese Kennlinie gleich $q_Q = f(q_K)$.

$v_Q = f(v_E)$: Expanderkennlinie (Gegenstück zur Kompressorkennlinie $q_K = f(q_A)$).

$v_Q = f(q_A)$: Kennlinie des Gesamtsystems; berücksichtigt die kleineren Intervalle innen und die größeren außen.

b) Der Vorteil der ungleichmäßigen Quantisierung, kleinere Signalwerte feiner aufzulösen, kommt bei diesem Nachrichtensignal nicht zum Tragen; der Störabstand bewertet alle Amplituden gleichermaßen. Hier führt die nichtlineare Quantisierung mit der A–Kennlinie sogar zu einer Verschlechterung

	Quantisierungskennlinie		
	gleichmäßig	mit $A = 87.56$	mit 13–Segmente
Mustersignal 1 (MS1)	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = 4.05 \cdot 10^{-6}$ $\varrho_v = 47.81\,\text{dB}$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = 6.32 \cdot 10^{-5}$ $\varrho_v = 35.88\,\text{dB}$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = 3.82 \cdot 10^{-5}$ $\varrho_v = 38.06\,\text{dB}$
$0.1 \cdot$ MS1	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = 6.23 \cdot 10^{-6}$ $\varrho_v = 25.94\,\text{dB}$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = 2.97 \cdot 10^{-7}$ $\varrho_v = 39.15\,\text{dB}$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = 3.62 \cdot 10^{-7}$ $\varrho_v = 38.30\,\text{dB}$
$0.9 + 0.1 \cdot$ MS1	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = 6.82 \cdot 10^{-6}$ $\varrho_v = 50.85\,\text{dB}$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = 1.15 \cdot 10^{-4}$ $\varrho_v = 38.60\,\text{dB}$	$\overline{\varepsilon_{vq}^2(t)} = 6.54 \cdot 10^{-5}$ $\varrho_v = 41.07\,\text{dB}$

c) Bei diesem Signal ist durch eine nichtlineare Quantisierung aufgrund der kleinen Amplitudenwerte eine Verbesserung zu erzielen. Eine gleichmäßige Quantisierung mit $Q_{\max} = 0.1$ würde allerdings auch hier zu $10 \cdot \lg(\varrho_v) = 47.81$dB führen.

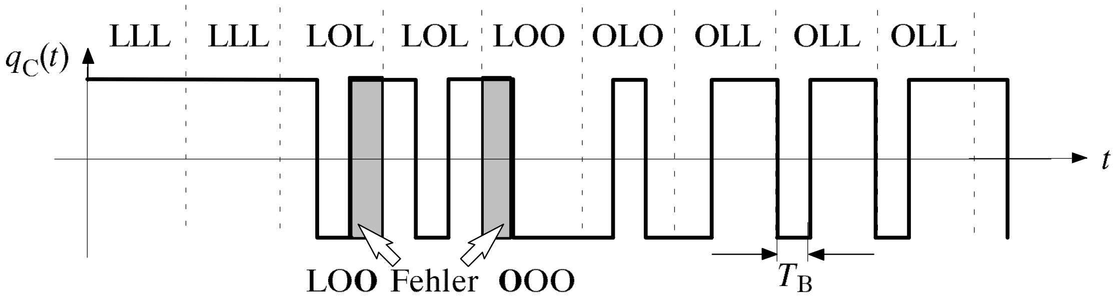
d) Das Signal nach Punkt c) war für die Anwendung einer gleichmäßigen Quantisierung ungünstig. Ein Signal mit ausschließlich großen Signalwerten ist dagegen für die Anwendung einer ungleichmäßigen Quantisierung äußerst ungünstig, da nur große Amplitudenwerte auftreten.

e) Bei der A–Kennlinie sind alle Quantisierungsintervalle unterschiedlich, nicht jedoch bei der 13–Segment–Kennlinie. Bei letzterer ist die Intervallbreite Δ in jedem der 13 Segmente gleich, da auch die Steigung in den einzelnen Abschnitten der bereichsweise linear beschreibbaren Kennlinie $q_\mathrm{K} = \mathrm{f}(q_\mathrm{A})$ jeweils konstant ist.

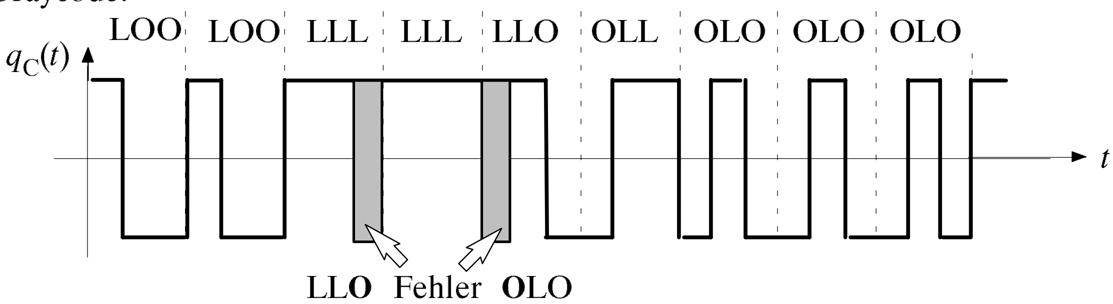
f) Die unter Punkt b) bis d) gemachten Aussagen gelten für die 13–Segment–Kennlinie in gleicher Weise wie für die A–Kennlinie.

D12.5:

a) Dualcode:



Graycode:



b) Wird bei der Übertragung ein Bit verfälscht (O ➧ L bzw. L ➧ O), so hat das Auswirkungen auf das decodierte Signal. Beim Dualcode hängt die Größe der Verfälschung davon ab, welches Bit verfälscht wurde. Bei der Übertragung des 3. Quantisierungswertes wurde das letzte Bit (LSB) von L ➧ O verändert; der Fehler beträgt hier nur ein Quantisierungsintervall. Dagegen ist der Fehler bei der Übertragung des 5. Quantisierungswertes deutlich größer, da hier das erste Bit (MSB) verfälscht wurde. Damit ergibt sich eine Verfälschung um 4 Stufen.

c) Beim Gray–Code haben die beiden Bitfehler jeweils gleiche Auswirkung, nämlich eine Verfälschung um nur ein Quantisierungsintervall. Eine Verfälschung von OOO nach LOO (oder umgekehrt) würde allerdings das decodierte Signal um 7 Quantisierungsintervalle verändern.

d) Wie erwartet.

e) Die Auswirkung des LSB–Fehlers ist mit dem Auge fast nicht zu erkennen. Trotzdem beträgt der Störabstandsverlust ca. 1.7 dB. In den beiden anderen Fällen ergeben sich jeweils sehr große Abweichungen zwischen $v(t)$ und $q(t)$, und $10 \cdot \lg(\varrho_v)$ ist sehr klein.

	kein Bitfehler	ein Bitfehler (LSB)	ein Bitfehler (3. Bit)	ein Bitfehler (MSB)
$10 \cdot \lg\ (\varrho_v)$	47.81 dB	46.15 dB	16.19 dB	4.12 dB

f) <u>$N=4$:</u>

Nr. 0:	O OOO	Nr. 8:	L LOO
Nr. 1:	O OOL	Nr. 9:	L LOL
Nr. 2:	O OLL	Nr. 10:	L LLL
Nr. 3:	O OLO	Nr. 11:	L LLO
Nr. 4:	O LLO	Nr. 12:	L OLO
Nr. 5:	O LLL	Nr. 13:	L OLL
Nr. 6:	O LOL	Nr. 14:	L OOL
Nr. 7:	O LOO	Nr. 15:	L OOO
	wie $N=3$		von unten nach oben

g) Ein LSB–Fehler hat die gleichen Auswirkungen wie beim Dualcode. Bei Fehlern im mittleren Bereich sind die Auswirkungen meist weniger stark als beim Dualcode. Ein MSB–Fehler bewirkt dagegen fast eine Vorzeichenumkehrung. Der MQF ist dann um so größer, je größer der Betrag des Abtastwertes ist.

	kein Bitfehler	ein Bitfehler (LSB)	ein Bitfehler (3. Bit)	ein Bitfehler (MSB)
$10 \cdot \lg\ (\varrho_v)$	47.81 dB	46.15 dB	29.68 dB	0.28 dB

Musterlösungen der Übungsaufgaben (5. Termin)

Ü11.1:

```
void ofifal(g,h,d)
  float g[],h[],d[];
{ int N=100,i,ianf,iend,nue;
  for (nue=0; nue<=N; nue++)
    h[nue]=g[N-nue];                              /* Impulsantwort h(t)  */
  for (nue=0; nue<=2*N; nue++)
  { if (nue<=N)                                   /* Summationsgrenzen   */
      { ianf=0;
        iend=nue;
      }
    else
      { ianf=nue-N;
        iend=N;
      }
    for (i=ianf; i<=iend; i++)                    /* Ausgangssignal d(t) */
      d[nue] += g[i]*h[nue-i];
  }
}
```

Musterlösungen der Vorbereitungsfragen (6. Termin)

V13.1:

a) $E_B = s_0^2 \cdot T = (2V)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^6} s = 2 \cdot 10^{-6}\ V^2 s$;

$E_B/N_0 = \frac{2 \cdot 10^{-6}\ V^2 s}{10^{-6}\ V^2/Hz} = 2$ (entspricht ca. 3 dB);

$p_B = Q(\sqrt{2 \cdot E_B/N_0}) = Q(2) = 2.27 \cdot 10^{-2}$.

b) $$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_x^{+\infty} e^{-u^2/2}\, du \xrightarrow[t = u/\sqrt{2}]{} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{x/\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \ ;$$

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_x^{+\infty} e^{-u^2}\, du \quad \Rightarrow \quad Q(x) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \ ;$$

$$\Rightarrow \quad p_B = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{s_0^2 \cdot T}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{erfc}(\sqrt{2}) \ .$$

c) $\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2T} = 1V^2 \Rightarrow \sigma_d = 1V$; $g_d(0) = s_0 \Rightarrow p_B = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right) = Q(2)$.

d) Nein.

e) $$p_B = \sum_{i=1}^{M} p_i \cdot p_{Si} = p_1 \cdot p\big(n(T_D) > E + s_0\big) + p_2 \cdot p\big(n(T_D) < E - s_0\big)$$
$$= p_1 \cdot Q\left(\frac{E + s_0}{\sigma_d}\right) + p_2 \cdot \left(1 - Q\left(\frac{E - s_0}{\sigma_d}\right)\right) = p_1 \cdot Q\left(\frac{s_0 + E}{\sigma_d}\right) + p_2 \cdot Q\left(\frac{s_0 - E}{\sigma_d}\right).$$

f) $$\frac{dp_B}{dE} = -p_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(s_0+E)^2/(2\sigma_d^2)} \cdot \frac{1}{\sigma_d} + p_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(s_0-E)^2/(2\sigma_d^2)} \cdot \frac{1}{\sigma_d} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{e^{-(s_0-E)^2/(2\sigma_d^2)}}{e^{-(s_0+E)^2/(2\sigma_d^2)}} = e^{2 \cdot E \cdot s_0/\sigma_d^2} \quad \Rightarrow \quad E_{opt} = \frac{\sigma_d^2}{2 \cdot s_0} \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} \ .$$

g) $\sigma_d = \frac{s_0}{2}$: $E_{opt} = \frac{s_0}{8} \cdot \ln \frac{0.31}{0.69} \approx -0.1 \cdot s_0$.

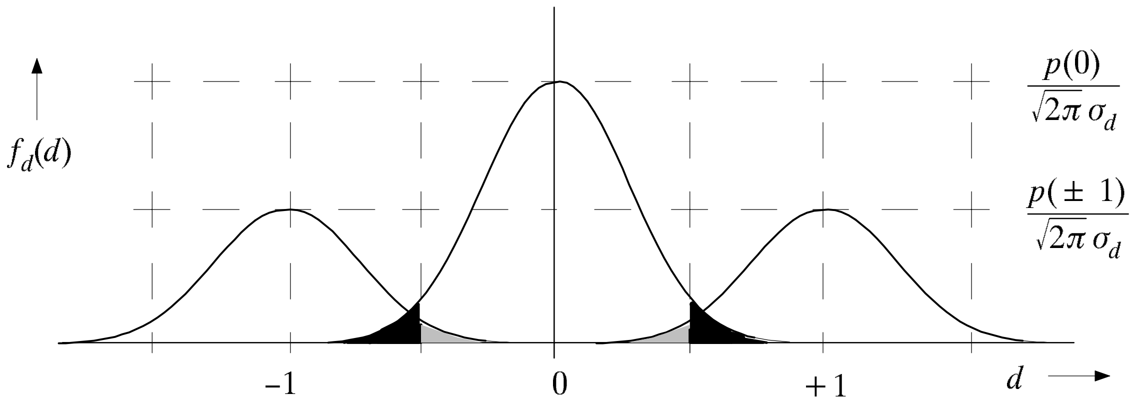
Die optimale Schwelle liegt tiefer als $E = 0$, da "–1" seltener auftritt.

h) $p_{B,min} = p_1 \cdot Q\left(\frac{s_0 + E}{\sigma_d}\right) + p_2 \cdot Q\left(\frac{s_0 - E}{\sigma_d}\right) = 0.31 \cdot Q(1.8) + 0.69 \cdot Q(2.2) \approx 0.0207.$

Gegenüber $E = 0$ wird p_B um ca. 9% kleiner.

V13.2:

a)



b) $$p_S = \sum_{i=1}^{3} p_i \cdot p_{Si} = p(-1) \cdot p\big(n(T_D) > 0.5\text{V}\big) + p(+1) \cdot p\big(n(T_D) < -0.5\text{V}\big) + p(0) \cdot p\big(|n(T_D)| > 0.5\text{V}\big)$$

$$p_S = \big(p(-1) + p(+1) + 2 \cdot p(0)\big) \cdot Q\Big(\frac{0.5\text{V}}{\sigma_d}\Big) = 1.5 \cdot Q(2.5) \approx 0.93\ \% \ .$$

c) Das Symbol "0" liefert den größten Anteil, da es häufiger auftritt als die beiden anderen Symbole und zudem nach beiden Richtungen hin verfälscht werden kann. Die kleinste Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich, wenn die Entscheiderschwellen jeweils genau bei den Schnittpunkten der beiden jeweiligen WDF–Kurven liegen. Mit optimalen Schwellenwerten (bei ± 0.52) erhält man 0.87%.

V13.3:

a) $\sigma_{hB}^{(N)} = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{N}} \approx \sqrt{\frac{p}{N}} = 10^{-5}$. Mit $\varepsilon = 10^{-5}$ folgt daraus :

$$p_\varepsilon = p(|h_B^{(N)} - p_B| < \varepsilon) = 1 - 2 \cdot Q(\frac{\varepsilon}{\sigma_{hB}}) = 1 - 2 \cdot Q(1) \approx 68.4\% \, .$$

b) Allgemein gilt: $N \geq \frac{p \cdot (1-p) \cdot a^2}{\varepsilon^2} \approx \frac{p \cdot a^2}{\varepsilon^2}$

Mit $\varepsilon = \varepsilon_{rel} \cdot p$: $N \geq \frac{a^2}{p \cdot \varepsilon_{rel}^2}$.

c) $a = Q^{-1}(\frac{1-p_\varepsilon}{2}) = Q^{-1}(0.025) = 1.96$ (siehe Anhang B)

d) Aus Punkt b) und c): $N \geq \frac{1.96^2}{p \cdot 0.1^2} \approx \frac{400}{p}$. $p = 10^{-4} : N \geq 4 \cdot 10^6$.

V14.1:

a) $T_B = T = \frac{1}{R_B} = 10\,\text{ns}$, $E_B = s_0^2 \cdot T_B = (2\text{V})^2 \cdot \frac{1}{10^8}\text{s} = 4 \cdot 10^{-8}\ \text{V}^2\text{s}$.

b) $g_d(t) = s_0 \cdot [\mathrm{Q}(2 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot f_\mathrm{E} \cdot (t - \frac{T}{2})) - \mathrm{Q}(2 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot f_\mathrm{E} \cdot (t + \frac{T}{2}))]$.

Mit $t' = t/T$ und $f_\mathrm{E}' = f_\mathrm{E} T = 0.4$:

$$g_d(t') = s_0 \cdot [\mathrm{Q}(2 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot f_\mathrm{E}' \cdot (t' - 0.5)) - \mathrm{Q}(2 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot f_\mathrm{E}' \cdot (t' + 0.5))] ;$$

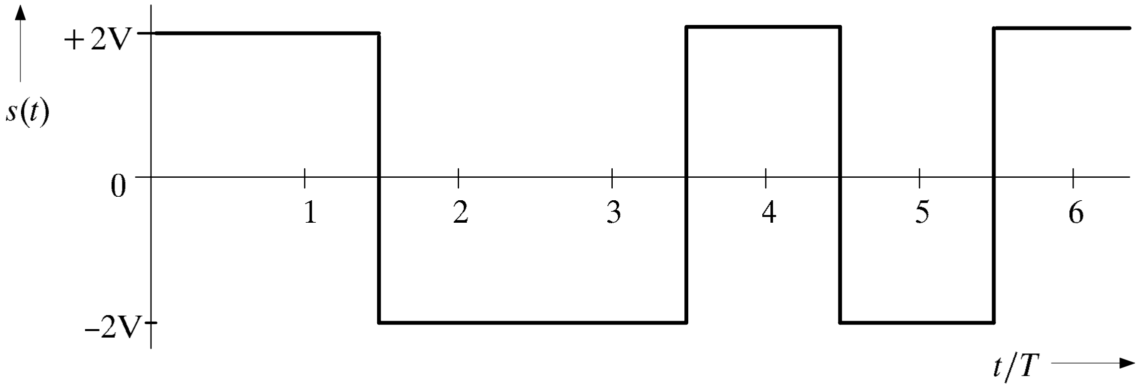
$$g_d(t' = 0) = s_0 \cdot [\mathrm{Q}(-0.4 \cdot \sqrt{2\pi}) - \mathrm{Q}(0.4 \cdot \sqrt{2\pi})] \approx 2\mathrm{V} \cdot [\mathrm{Q}(-1) - \mathrm{Q}(1)] ;$$

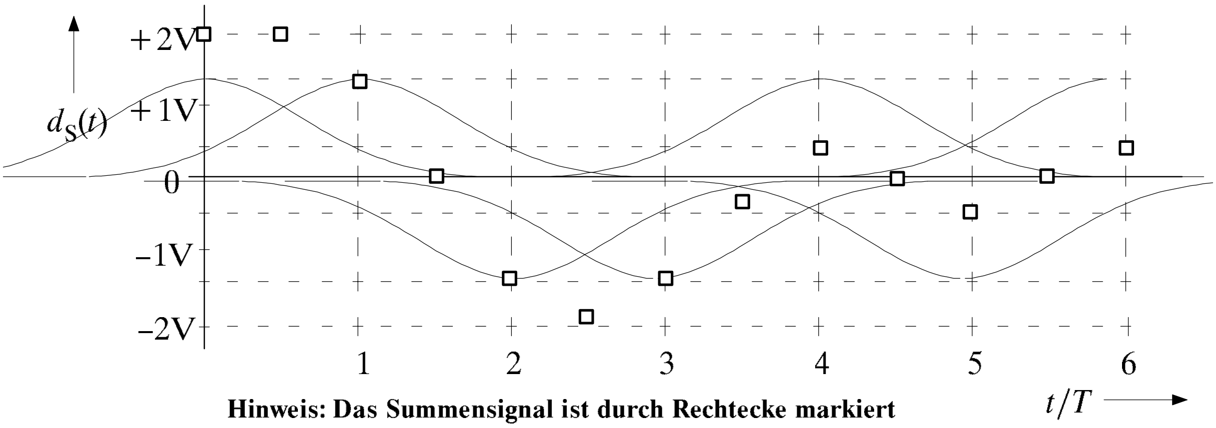
$$g_d(t = 0) = 2\mathrm{V} \cdot (0.841 - 0.159) = 1.365\mathrm{V} ;$$

$$g_d(t = \pm 5\mathrm{ns}) = g_d(t' = 0.5) = s_0 \cdot [\mathrm{Q}(0) - \mathrm{Q}(-0.8 \cdot \sqrt{2\pi})] \approx 0.955\mathrm{V} ;$$

$$g_d(t = \pm 10\mathrm{ns}) = g_d(t' = 1) \approx s_0 \cdot [\mathrm{Q}(1) - \mathrm{Q}(3)] \approx 0.351\mathrm{V} .$$

c)





Hinweis: Das Summensignal ist durch Rechtecke markiert

V14.2:

a) Allgemein gilt mit $E_\mathrm{opt} = 0$, $T_{\mathrm{D,opt}} = 0$:

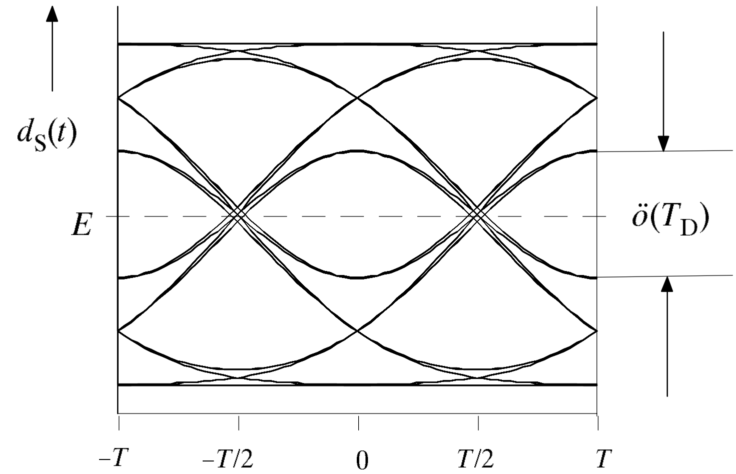
$$\ddot{o}(T_\mathrm{D} = 0) = 2 \cdot \left[g_d(0) - \sum_{\nu=1}^{n} |g_d(+\nu \cdot T)| - \sum_{\nu=1}^{v} |g_d(-\nu \cdot T)|\right] .$$

Hier $n = v = 1$: $\quad \ddot{o}(T_\mathrm{D} = 0) = 2 \cdot [g_d(0) - |g_d(+T)| - |g_d(-T)|]$.

$$g_d(0) = 1.365\mathrm{V} , \; g_d(T) = g_d(-T) = 0.315\mathrm{V} :$$

$$\Rightarrow \ddot{o}(T_\mathrm{D} = 0) = 2 \cdot [1.365 - 2 \cdot 0.315] = 1.47\mathrm{V}.$$

b)



Hinweis:
gültig für $n = 2$.

Für $n = v = 1$ unterscheidet sich das Auge nur geringfügig. Beispielsweise sind dann die obere und die untere Augenbegrenzungen keine horizontalen Linien mehr. ±

c) $\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_E(f)|^2 \, df = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2\pi \cdot \left(\frac{f}{2 \cdot f_E}\right)^2\right) \, df$

Mit der Substitution $a = \frac{\sqrt{2\pi}}{2f_E}$: $\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{a} = \frac{N_0 \cdot f_E}{\sqrt{2}}$.

$$N_0 = 10^{-9} \frac{V^2}{Hz}, \; f_E = 40 \cdot 10^6 \text{ Hz}: \; \sigma_d^2 = 0.0283 V^2 \Rightarrow \sigma_d = 0.168 V \; .$$

d) $\varrho_U = \left(\frac{\ddot{o}(T_D)/2}{\sigma_d}\right)^2 = \left(\frac{1.470 V/2}{0.168 V}\right)^2 = (4.37)^2 \Rightarrow 10 \cdot \lg(\varrho_U) = 12.82 \text{ dB}$.

e) $p_U = Q(\sqrt{\varrho_U}) = Q(4.37) \approx 5.4 \cdot 10^{-6}$.

f) obere Schranke (ungünstigste Fehlerwahrscheinlichkeit):

$$p_B \le p_U \approx 5.4 \cdot 10^{-6} \; .$$

untere Schranke (Nyquist–System):

$$p_B \ge Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2\text{s}}{10^{-9} \text{ V}^2/\text{Hz}}}\right) = Q(8.94) \approx 10^{-19} \; .$$

g) – Augenöffnung wird um Faktor 2 kleiner
– Störeffektivwert bleibt gleich

$\Rightarrow$ $10 \cdot \lg(\varrho_U)$ wird um 6 dB kleiner, also $10 \cdot \lg(\varrho_U) \approx 6.82$ dB .

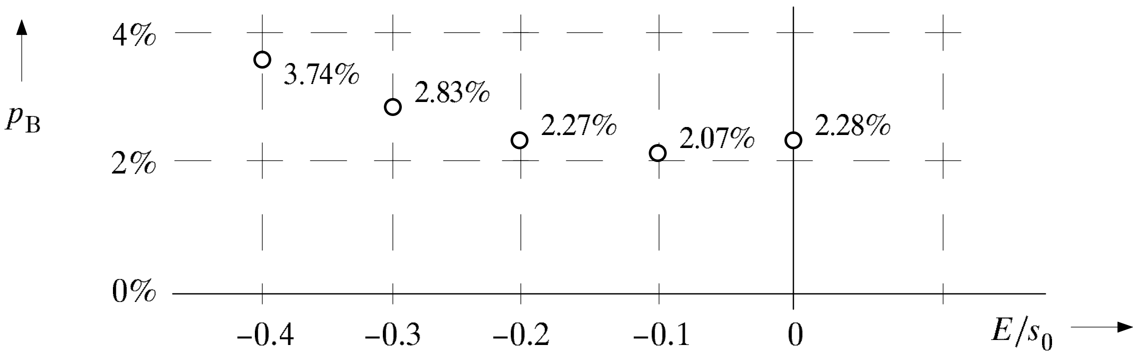
$\Rightarrow$ $p_U = Q(\sqrt{\varrho_U}) = Q(2.19) \approx 1.4 \cdot 10^{-2}$.

Musterlösungen der Versuchsdurchführung (6. Termin)

D13.1:

a) In V13.1 wurden folgende Parameter verwendet: $s_0 = 2\text{V}$, $\sigma_d = 1\text{V}$. Im Programm *"fwk"* sind dagegen alle Werte auf s_0 normiert. Daraus folgt: $\sigma = 0.5$.

b)



c) Der optimale Schwellenwert ergibt sich sowohl bei der Berechnung in V13.1 als auch bei der Simulation zu $E_{\text{opt}} = -0.1 \cdot s_0$. Allgemein gilt: Bei nicht gleichwahrscheinlichen Symbolen liegt der optimale Schwellenwert stets näher am Amplitudenwert mit der niedrigeren Auftrittswahrscheinlichkeit.

D13.2:

a) Die $M = 4$ möglichen Amplitudenwerte liegen bei $\pm s_0$ und $\pm s_0/3$, die $M-1 = 3$ Entscheiderschwellen in der Mitte zwischen zwei möglichen Amplitudenwerten (also bei 0 und $\pm 2/3 \cdot s_0$). Die Wahrscheinlichkeit, daß eine der beiden äußeren Stufen verfälscht wird, beträgt $p_a = \mathrm{Q}\big((s_0/3)/\sigma\big)$. Die beiden inneren Stufen können dagegen nach beiden Richtungen verfälscht werden (Verfälschungswahrscheinlichkeit: $2 \cdot p_a$). Durch Mittelung unter Berücksichtigung der Auftrittswahrscheinlichkeiten (jeweils 0.25) folgt $p_S = 1.5 \cdot p_a$. Dieser Wert ergibt sich auch mit Gl. (13.31).

b) $$p_S = \frac{2 \cdot (M-1)}{M} \cdot \mathrm{Q}\Big(\frac{s_0/(M-1)}{\sigma}\Big) \leq 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Q}\Big(\frac{s_0/(M-1)}{\sigma}\Big) \leq \frac{0.001 \cdot M}{2 \cdot (M-1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{s_0}{\sigma} \geq (M-1) \cdot \mathrm{Q}^{-1}\Big(\frac{0.001 \cdot M}{2 \cdot (M-1)}\Big)$$

c) $M = 2 : \dfrac{\sigma}{s_0} = 0.323$; $M = 3 : \dfrac{\sigma}{s_0} = 0.157$; $M = 4 : \dfrac{\sigma}{s_0} = 0.104$.

d) $M = 3; \sigma/s_0 = 0.2$: Mit $E/s_0 = \pm\, 0.52$ Verbesserung von 0.93% auf 0.87%;

$M = 3; \sigma/s_0 = 0.5$: Mit $E/s_0 = \pm\, 0.68$ Verbesserung von 23.8% auf 21.8%.

Die optimalen Entscheiderschwellen liegen dabei stets bei den Schnittpunkten der einzelnen Dichtefunktionen.

D13.3:

a) $m_{hB}^{(N)} = p_B = 10^{-3}$, $\sigma_{hB}^{(N)} = \sqrt{\frac{p_B \cdot (1 - p_B)}{N}} \approx \sqrt{\frac{p_B}{N}} = 10^{-4}$.

b) Bei 100 Versuchsreihen ergibt sich der Mittelwert zu $0.97 \cdot 10^{-3}$, der Minimalwert zu $0.75 \cdot 10^{-3}$ und der Maximalwert zu $1.14 \cdot 10^{-3}$. Die Streuung beträgt $0.9 \cdot 10^{-4}$.

c) $p_\varepsilon = p(|h_B^{(N)} - p_B| < \varepsilon_{80\%}) = 1 - 2 \cdot Q(\frac{\varepsilon_{80\%}}{\sigma_{hB}}) \stackrel{!}{=} 0.8$

$\Rightarrow Q(\frac{\varepsilon_{80\%}}{\sigma_{hB}}) \stackrel{!}{=} 0.1 \Rightarrow \frac{\varepsilon_{80\%}}{\sigma_{hB}} = 1.26 \Rightarrow \varepsilon_{80\%} = 1.26 \cdot 10^{-4}$

D.h.: Im Intervall von $0.874 \cdot 10^{-3}$ ... $1.126 \cdot 10^{-3}$ sind 80% aller Meßwerte zu erwarten.

d) $\varepsilon_{80\%} = 1.2 \cdot 10^{-4}$; Intervall von 0.00097 ± 0.00012 : $0.85 \cdot 10^{-3}$ … $1.09 \cdot 10^{-3}$;
$\varepsilon_{90\%} = 1.5 \cdot 10^{-4}$; Intervall von 0.00097 ± 0.00015 : $0.82 \cdot 10^{-3}$ bis $1.12 \cdot 10^{-3}$;
$\varepsilon_{95\%} = 1.8 \cdot 10^{-4}$; Intervall von 0.00097 ± 0.00018 : $0.79 \cdot 10^{-3}$ bis $1.15 \cdot 10^{-3}$.

e) $N \geq \frac{1.96^2}{p_B \cdot 0.1^2} \approx \frac{400}{p_B}$. Mit $p_B = 0.01 : N \geq 40000$

Mit diesen Werten fallen 95 von 100 Versuchsreihen in das Intervall zwischen 0.009 und 0.011. Damit gilt: $p_\varepsilon = 0.95$. Die Faustformel ist somit bestätigt.

D14.1:

a) Das Quellensignal $q(t)$ ist unipolar, das Sendesignal $s(t)$ bipolar. Wegen $H_K(f) = 1$ gilt $r(t) = s(t) + n(t)$; hierbei stellt $n(t)$ weißes Rauschen dar. Aufgrund des gaußförmigen Empfangsfilters ist das Detektionssignal $d(t)$ bandbegrenzt: Dessen Nutzanteil $d_S(t)$ unterscheidet sich vom rechteckförmigen Sendesignal $s(t)$. Der Störanteil $d_N(t)$ ist gegenüber dem Störsignal $n(t)$ am Empfängereingang niederfrequenter und besitzt zudem eine kleinere Leistung. Zum Sinkensignal $v(t)$ kommt man durch Schwellenwertentscheidung. Im fehlerfreien Fall ist $v(t)$ bis auf eine schaltungsbedingte Laufzeit identisch mit $q(t)$. Das Augendiagramm ohne Störungen ist wie in V14.2 dargestellt.

b)

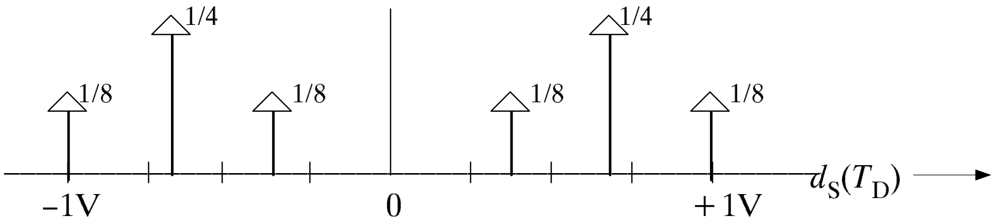
	$ö(T_D)$	σ_d	p_B	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$
berechnet	1.470 V	0.168 V	——	$5.4 \cdot 10^{-6}$	12.82 dB
umgerechnet auf ±1V	0.735 V	0.168 V	——	$1.4 \cdot 10^{-2}$	6.80 dB
simuliert	0.741 V	0.168 V	$3.5 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	6.86 dB

Ergebnis: gute Übereinstimmung zwischen gerechneten und simulierten Werten.

c) Da mit diesen Systemarametern $g_d(t = 2T) \approx 0$ ist, unterscheiden sich die Simulationsergebnisse für $n = v = 2$ gegenüber $n = v = 1$ (fast) nicht.

d) Die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit p_B ist etwa um den Faktor 4 kleiner als die ungünstiste Fehlerwahrscheinlichkeit p_U.

e)



Mögliche Werte	Wahrscheinlichkeiten
$\pm\ 1\,\text{V}$	$\frac{2}{8} = 0.25$
$\pm\ \frac{g_d(T_D = 0)}{2} \approx 0.682\,\text{V}$	$\frac{4}{8} = 0.50$
$\pm\ \ddot{o}(T_D = 0)/2 \approx 0.367\,\text{V}$	$\frac{2}{8} = 0.25$

f) $p_{\pm 0.367} = Q(\frac{0.367}{0.168}) = Q(2.18) \approx 1.4 \cdot 10^{-2} \quad (= p_U)$,

$p_{\pm 0.682} = Q(\frac{0.682}{0.168}) = Q(4.06) \approx 2.4 \cdot 10^{-5}$, $p_{\pm 1.000} = Q(5.95) \approx 1.4 \cdot 10^{-9}$.

$p_B = \frac{1}{4} \cdot p_{\pm 0.367} + \frac{1}{2} \cdot p_{\pm 0.682} + \frac{1}{4} \cdot p_{\pm 1.000} \approx \frac{p_U}{4} = 3.5 \cdot 10^{-3}$.

g) Mögliche Werte für den Schwellenabstand mit Wahrscheinlichkeit 1/8:
0.267, 0.467, 0.900, 1.100.

Mögliche Werte für den Schwellenabstand mit Wahrscheinlichkeit 1/4:
0.582, 0.782.

Näherung: $p_B \approx \frac{1}{8} \cdot Q(\frac{0.267}{0.168}) = \frac{1}{8} \cdot 5.6 \cdot 10^{-2} = 7 \cdot 10^{-3}$.

h) Gute Übereinstimmung: Das Programm liefert $7.1 \cdot 10^{-3}$.

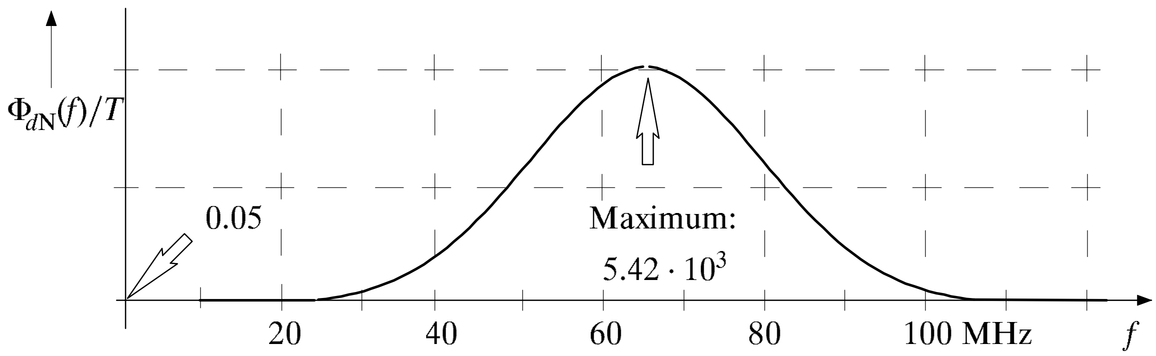
D14.2:

a)

	$\ddot{o}(T_D)$	σ_d	p_B	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$
$H_K(f) = 1$	0.735	0.168	$3.5 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	6.86 dB
Koaxialkabel (a = 60dB)	0.735	70.424	0.5	0.5	– 45.65 dB

Die Streuung des Störanteils ist wegen der erforderlichen Entzerrung (Anhebung der hohen Frequenzen) sehr hoch. Trotz der relativ großen Augenöffnung ist deshalb das System unbrauchbar.

b) $\Phi_{dN}(f) = \Phi_n(f) \cdot |H_E(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{|H_I(f)|^2}{|H_K(f)|^2}$ mit $|H_E(f)|^2 = e^{2 \cdot a \cdot \sqrt{2 \cdot f \cdot T}} \cdot e^{-2\pi f^2/(4f_I^2)}$.



Mit $f\,T = 0.65$, $f_I\,T = 0.4$ und a $= 6.9$ (Neper):

$$|H_E(f = 65\,\text{MHz})| = 328 \;\Rightarrow\; |H_E(f = 65\,\text{MHz})|^2 = 1.076 \cdot 10^5$$

$$\Rightarrow\; \Phi_{dN}(f = 65\text{MHz})/T \approx \frac{1}{2} \cdot 0.1 \cdot 1.076 \cdot 10^5 = 5.4 \cdot 10^3\;.$$

c) Der unter a) ermittelte ungünstigste Störabstand ergab sich zu −45.65 dB. Erforderlich wären dagegen 11.35 dB. Das bedeutet: Man muß entweder die Sendeleistung um 57 dB erhöhen oder die Störleistung um 57 dB (also um den Faktor $5 \cdot 10^5$) absenken. Anstelle von $N_0/T = 0.1$ ist dann nur noch $N_0/T = 2 \cdot 10^{-7}$ zulässig.

d) Mit dieser Rauschleistungsdichte ergibt sich $p_U = 1.1 \cdot 10^{-4}$. Das gestellte Kriterium wird somit näherungsweise erfüllt.

e)

	$\ddot{o}(T_D)$	σ_d	p_B	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$
$f_I \cdot T = 0.25$	0.000	0.017	$9.4 \cdot 10^{-2}$	0.5	$-\infty$
$f_I \cdot T = 0.30$	0.192	0.031	$7.7 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	9.72 dB
$f_I \cdot T = 0.35$	**0.478**	**0.057**	$1.8 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	**12.48 dB**
$f_I \cdot T = 0.40$	0.735	0.100	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	11.35 dB
$f_I \cdot T = 0.45$	0.962	0.170	$5.7 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	9.05 dB
$f_I \cdot T = 0.50$	1.159	0.281	$6.2 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-2}$	6.28 dB

f) Hinsichtlich der Impulsformer–Grenzfrequenz f_I gibt es ein Optimum; bei den gewählten Parameterwerten liegt die optimale Grenzfrequenz bei $f_I \cdot T = 0.35$. Ist f_I zu groß, so ist dies zwar günstig für das Nutzsignal (d.h. große Augenöffnung), aber die Störungen machen sich dann extrem ungünstig bemerkbar. Bei zu kleiner Grenzfrequenz überwiegt dagegen der Einfluß der Impulsinterferenzen (d.h.: zu kleine Augenöffnung). Für $f_I \cdot T < 0.27$ ergibt sich stets ein geschlossenes Auge.

Musterlösungen der Übungsaufgaben (6. Termin)

Ü13.1:

```
#include <math.h>
float Q1(x)
float x;
{ float erfc() ;
  return(0.5*erfc(x/sqrt(2.)));
}
```

```
#include <math.h>
float Qo(x)
float x;
{float pi=3.1415926345;
 if (x <= 0.) return (1000000.);
 return (exp(-0.5*x*x)/(x*sqrt(2.*pi)));
}
```

```
float Qu(x)
float x;
{float Qo();
 if (x <= 0.) return (1000000.);
 return (Qo(x)*(1.-1./(x*x)));
}
```

```
#include <stdio.h>
main()
{ float x,Q1(),Qo(),Qu();
  int i;
  printf("\n   x \t   Q1(x) \t   Qo(x) \t   Qu(x)\n\n");
  for (i=0; i<=20 ; i++)
   { x=0.5*i;
     printf("%5.2f   %12.4e   %12.4e   %12.4e   \n",x,Q1(x),Qo(x),Qu(x));
   }
}
```

Ü13.2:

```
main()
{ float A,E,Eopt,pu,po,ps,psmin,p0,sigma,x1,x2,x3,Q1();
  int i;
  printf("\nEinlesen des Amplitudenstufenwertes A = ");
  scanf ("%f",&A);
  printf("\nEinlesen der Streuung sigma = ");
  scanf ("%f",&sigma);
  printf("\nEinlesen der Wahrscheinlichkeit p(-1) = ");
  scanf ("%f%f%f",&pu);
  printf("\nEinlesen der Wahrscheinlichkeit p(+1) = ");
  scanf ("%f%f%f",&po);
  p0=1.-pu-po;
  psmin=1.;
  Eopt=0.;
  for (E=0.; E<=A; E+=0.05 )
    { x1=(E-A)/sigma;
      x2=E/sigma;
      x3=(A-E)/sigma;
      ps = pu*(1-Q1(x1)) + 2*p0*Q1(x2) + po*Q1(x3);
      if (ps < psmin)
        { psmin=ps;
          Eopt=E;
        }
```

```
        printf("\nE = %4.2f \t pS = %10.4e",E,ps);
    }
  printf("\n\nMinimale SFW pSmin = %10.4e  bei  Eopt = %4.2f\n",psmin,Eopt);
}
```

Mit $\sigma = 0.1$ liegen die optimalen Entscheiderschwellen ziemlich genau bei $E_{\text{opt}} = \pm 0.5$. Weicht man mit den Entscheiderschwellen von diesem Optimalwert ab, so ergibt sich eine deutliche Degradation. Dagegen verschieben sich die optimalen Schwellenwerte auf $E_{\text{opt}} = \pm 0.55$ ($\sigma = 0.2$) bzw. $E_{\text{opt}} = \pm 0.7$ ($\sigma = 0.4$), also nach außen.

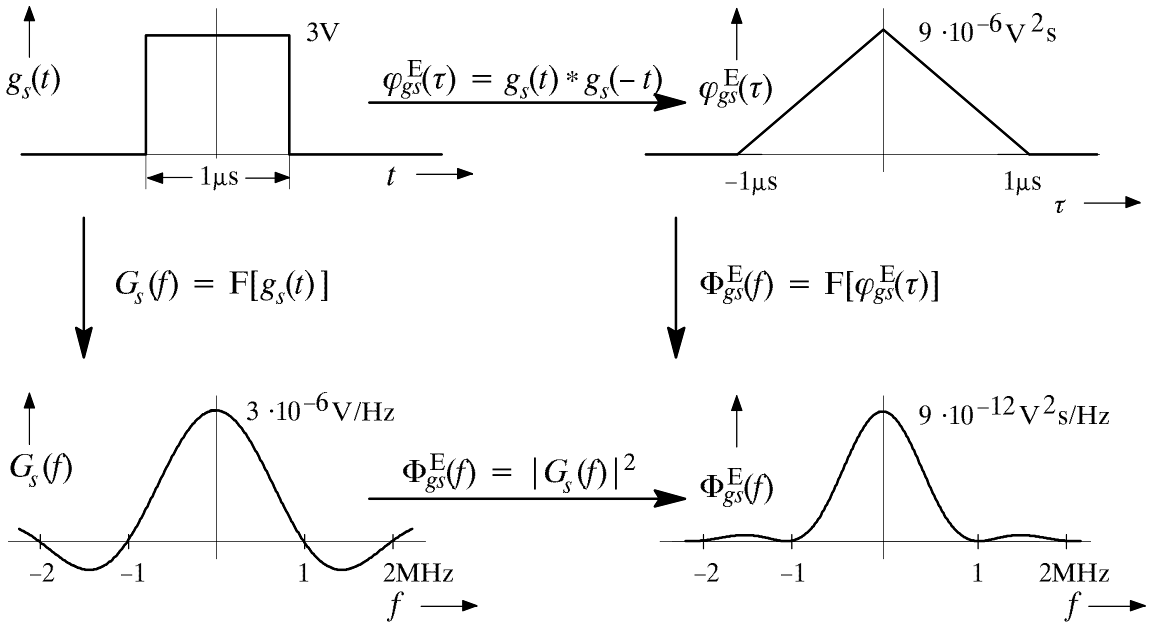
Ü14.1:

```
# include <math.h>
void basaug(n,gd,oef,fld)
long n;
double *oef;
float gd[289],fld[73][32];
{ float a[5],d[73],doben=1.,dunten=-1.,hilf;
  long augzal,i,j,jj,k,l,lmax,m,max,mitte=n;
  double auge;
  augzal=pow(2,2*n+1);
  max=36;
  for(m=0; m<=4; m++)
    { a[m]=-1.; }
  for(i=0; i<=augzal-1; i++)
    {
     for(j=0; j<=72; j++)
       { d[j]=0.; }
     for(l=-36; l<=36; l++)
       { lmax=l+max;
         for(k=0;k<=2*n;k++)
           { j=l+(mitte-k)*max;
             jj=j+144;
             hilf=gd[jj]*a[k];
             d[lmax]=d[lmax]+hilf;
           }
       }
     for(l=0; l<=72; l++)
       { fld[l] [i]=d[l]; }
     if(a[mitte] == 1.)
       { if(d[max] < doben)
           { doben=d[max]; }
       }
     else
       { if(d[max] > dunten)
           { dunten=d[max]; }
       }
     for(m=0; m<=4; m++)
       { if(a[m] == -1.) { a[m]=1.; break; }
         else            { a[m]=-1.; }
       }
    }
    auge=(doben-dunten);
    if(auge <= 0.)
      { auge=0.; }
    *oef=auge;
}
```

Musterlösungen der Vorbereitungsfragen (7. Termin)

V15.1:

a)



b) Aus (15.11) und (15.12) folgt mit $M = 2$:

$$\varphi_s(\tau) = \frac{M+1}{3 \cdot T \cdot (M-1)} \cdot \varphi_{gs}^{E}(\tau) = \frac{1}{T} \cdot \varphi_{gs}^{E}(\tau) = s_0^2 \cdot \mathrm{tri}(\tau/T) \; ; \quad \text{tri: Dreieckfunktion.}$$

$$\Phi_s(f) = \frac{M+1}{3 \cdot T \cdot (M-1)} \cdot \Phi_{gs}^{E}(f) = \frac{1}{T} \cdot \Phi_{gs}^{E}(f) = s_0^2 \cdot T \cdot \mathrm{si}^2(\pi \cdot f \cdot T) \; .$$

$$P_S = \varphi_s(0) = s_0^2 = 9\,V^2.$$

c) Aus (15.11) und (15.12) folgt mit $M = 4$:

$$\varphi_s(\tau) = \frac{M+1}{3 \cdot T \cdot (M-1)} \cdot \varphi_{gs}^{E}(\tau) = \frac{5}{9 \cdot T} \cdot \varphi_{gs}^{E}(\tau) = \frac{5}{9} \cdot s_0^2 \cdot \mathrm{tri}(\tau/T) \; ;$$

$$\Phi_s(f) = \frac{M+1}{3 \cdot T \cdot (M-1)} \cdot \Phi_{gs}^{E}(f) = \frac{5}{9 \cdot T} \cdot \Phi_{gs}^{E}(f) = \frac{5}{9} \cdot s_0^2 \cdot T \cdot \mathrm{si}^2(\pi \cdot f \cdot T) \; .$$

$$P_S = \varphi_s(0) = \frac{5}{9} \cdot s_0^2 = 5\,V^2.$$

d) Bei gleicher Symboldauer T haben das Binär– und das Quaternärsystem bis auf einen konstanten Faktor, der die kleinere Leistung des Quaternärsystems berücksichtigt, genau gleiche AKF– und LDS–Verläufe. Die Bitrate des Quaternärsystems ist doppelt so groß wie die des Binärsystems.

Vergleicht man dagegen die LDS von Binär– und Quaternärsystem bei konstanter Bitrate, so ist die Symboldauer des Quaternärsystems ($T = 2T_q$) doppelt so groß als beim Binärsystem ($T = T_q$). Das LDS des Quaternärsystems ist dann gegenüber Punkt c) nur halb so breit, aber doppelt so hoch.

V15.2:

a) Wären die einzelnen Amplitudenkoeffizienten a_ν des ternären Codersignals $c(t)$ statistisch voneinander unabhängig und gleichwahrscheinlich, so ergäbe sich die maximale Entropie $H_{q,\max} = \text{ld}\,3$ bit. Da jedoch durch diese Art der Codierung keine Information hinzugefügt wird, ist die tatsächliche Entropie $H_q = 1$ bit gleich der des redundanzfreien Binärsignals. Aus diesen beiden Werten ergibt sich mit (15.18) die relative Coderedundanz zu $r_c = 1 - 1/\text{ld}(3) \approx 37\%$.

b)

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_ν	+1	–1	+1	+1	–1	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1
b_ν	–1	+1	+1	+1	–1	–1	–1	+1	–1	+1	–1	–1
c_ν	–1	0	+1	+1	0	–1	–1	0	0	0	0	–1

c)

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_ν	+1	–1	+1	+1	–1	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1
b_ν	+1	+1	–1	+1	+1	–1	+1	+1	+1	+1	+1	–1
c_ν	+1	0	–1	+1	0	–1	+1	0	0	0	0	–1

d) $p(c_\nu = +1) = p(c_\nu = -1) = 0.25,\ p(c_\nu = 0) = 0.5.$

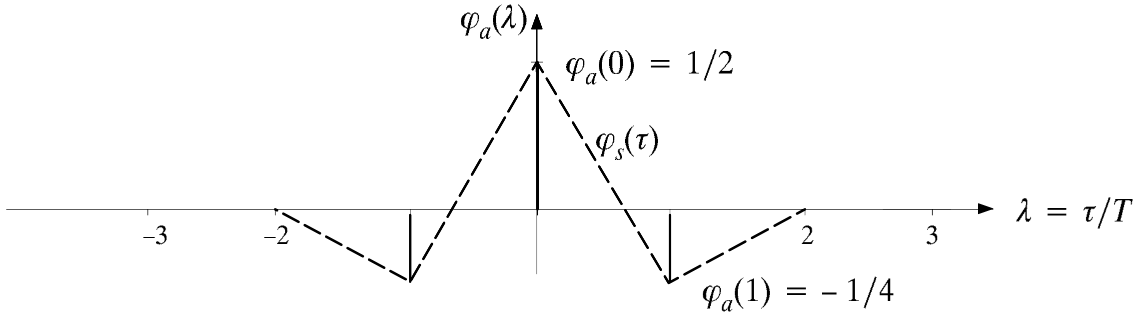
e) Der AKF–Wert $\varphi_a(0)$ gibt den quadratischen Mittelwert an: $\varphi_a(0) = 0.5$.

f) Für $\lambda > 1$ ist $\varphi_a(\lambda) = 0$ (wegen $N_c = 1$).

g) $\varphi_a(1) = \text{E}[c_\nu \cdot c_{\nu+1}] = \text{Mittelung über } [\, p(c_\nu \cap c_{\nu+1}) \cdot c_\nu \cdot c_{\nu+1}]$

$$= -1 \cdot \frac{1}{8} - 1 \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{4}$$ (siehe Tabelle auf der nächsten Seite).

h)



f)

c_ν	$c_{\nu+1}$	$c_\nu \cdot c_{\nu+1}$	$p(c_\nu \cap c_{\nu+1}) = p(c_\nu) \cdot p(c_{\nu+1} \vert c_\nu)$	
0	0	0		
0	+1	0		
0	–1	0		
+1	0	0		
+1	+1	+1	$1/4 \cdot 0 = 0$	
+1	–1	–1	$1/4 \cdot 1/2 = 1/8$	⇦
–1	0	0		
–1	+1	–1	$1/4 \cdot 1/2 = 1/8$	⇦
–1	–1	+1	$1/4 \cdot 0 = 0$	

V15.3:

a) $T = T_c = 2 \cdot T_q = 20\,\text{ns}$.

b) Der Grundimpuls ändert sich gegenüber V14.1 aufgrund der größeren Symboldauer:

$$g_d(t) = s_0 \cdot [\mathrm{Q}(2 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot f_\mathrm{E} \cdot (t - \frac{T}{2})) - \mathrm{Q}(2 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot f_\mathrm{E} \cdot (t + \frac{T}{2}))] .$$

Mit $t' = t/T$ und $f_\mathrm{E}' = f_\mathrm{E} \cdot T = 0.8$:

$$g_d(t') = s_0 \cdot [\mathrm{Q}(2 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot f_\mathrm{E}' \cdot (t' - 0.5)) - \mathrm{Q}(2 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot f_\mathrm{E}' \cdot (t' + 0.5))] .\ \text{Daraus :}$$

$$g_d(t' = 0) = s_0 \cdot [\mathrm{Q}(-0.8 \cdot \sqrt{2\pi}) - \mathrm{Q}(0.8 \cdot \sqrt{2\pi}))] \approx 2\mathrm{V} \cdot [\mathrm{Q}(-2) - \mathrm{Q}(2))] ;$$

$$g_d(t = 0) = 2\mathrm{V} \cdot (0.97725 - 0.02275) = 1.909\mathrm{V} .$$

$$g_d(t = \pm\ 10\mathrm{ns}) = g_d(t' = 0.5) \approx s_0 \cdot [\mathrm{Q}(0) - \mathrm{Q}(4)] \approx 0.995\mathrm{V} .$$

$$g_d(t = \pm\ 20\mathrm{ns}) = g_d(t' = 1) \approx s_0 \cdot [\mathrm{Q}(2) - \mathrm{Q}(6))] \approx 0.045\mathrm{V} .$$

c) $\ddot{o}(T_\mathrm{D} = 0) = 2 \cdot [\frac{g_d(0)}{3} - |g_d(T)| - |g_d(-T)|] = 2(\frac{1.909}{3} - 2 \cdot 0.045) \approx 1.093\,\mathrm{V}.$

d) Da sowohl N_0 als auch $H_\mathrm{E}(f)$ nicht verändert wird, bleibt σ_d erhalten. Somit ist:

$$\varrho_\mathrm{U} = (\frac{\ddot{o}(T_\mathrm{D})/2}{\sigma_d})^2 = (\frac{1.093\mathrm{V}/2}{0.168\mathrm{V}})^2 = (3.25)^2 \quad \Rightarrow \quad p_\mathrm{U} = \mathrm{Q}(3.25) \approx 5.8 \cdot 10^{-4}$$

$10 \cdot \lg(\varrho_\mathrm{U}) = 10.24\ \mathrm{dB}$ (Verschlechterung gegenüber Binärsystem: 2.58 dB).

V16.1:

a) $G_d(f) = G_d(0) \cdot \cos^2(\frac{\pi \cdot f}{4 \cdot f_G})$ für $|f| \le 2 \cdot f_G$.

b) Für ein Nyquist–System muß Gl. (16.15) erfüllt sein. Es ist offensichtlich, daß nur dann die periodische Fortsetzung von $G_d(f)$ im Abstand f_N eine Konstante ergibt, wenn f_G ein geradzahliges Vielfaches von $2 \cdot f_N = 1/T$ ist. Sinnvoll ist jedoch nur $f_G = f_N$.

c) Mit $f_G = f_N$: $G_d(f) = G_d(0) \cdot \cos^2(\frac{\pi}{2} \cdot f \cdot T)$ für $|f \cdot T| \le 1$.

2. Nyquistkriterium entsprechend (16.8):

$$\Sigma = \frac{G_d(f_N - f)}{\cos(\pi \cdot (f_N - f) \cdot T)} + \frac{G_d(f_N + f)}{\cos(\pi \cdot (f_N + f) \cdot T)} = G_d(0) = \text{const.}$$

Obiges Spektrum eingesetzt:

$$\Sigma = \frac{G_d(0) \cdot \cos^2(\pi/2 \cdot (f_N - f) \cdot T)}{\cos(\pi \cdot (f_N - f) \cdot T)} + \frac{G_d(0) \cdot \cos^2(\pi/2 \cdot (f_N + f) \cdot T)}{\cos(\pi \cdot (f_N + f) \cdot T)} .$$

Weiter gilt:

$$\frac{\cos^2(x)}{\cos(2x)} = \frac{[1 + \cos(2x)]/2}{\cos(2x)} = \frac{1}{2} \cdot [1 + \frac{1}{\cos(2x)}] .$$

Daraus folgt:

$$\Sigma = \frac{G_d(0)}{2} \cdot [1 + \frac{1}{\cos(\pi \cdot (f_N - f) \cdot T)} + 1 + \frac{1}{\cos(\pi \cdot (f_N + f) \cdot T)}] .$$

Mit $\cos(\pi \cdot (f_N \pm f) \cdot T) = \cos(\frac{\pi}{2} \pm \pi \cdot f \cdot T) = \sin(\pm \pi \cdot f \cdot T) = \pm \sin(\pi \cdot f \cdot T)$:

$$\Sigma = \frac{G_d(0)}{2} \cdot [2 - \frac{1}{\sin(\pi \cdot f \cdot T)} + \frac{1}{\sin(\pi \cdot f \cdot T)}] = G_d(0) = \text{const.} .$$

q.e.d.

d) Nach (16.11) gilt mit $r = 1$:

$$g_d(t) = g_0 \cdot \frac{\cos(\pi \cdot t/T)}{1 - 4 \cdot (t/T)^2} \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot \frac{t}{T}) .$$

Die Nulldurchgänge bei Vielfachen von T (1. Nyquist–Kriterium) entstehen aufgrund der si–Funktion, die zusätzlichen Nulldurchgänge bei $\pm 1.5T$, $\pm 2.5T$, $\pm 3.5T$ usw. (2. Nyquist–Kriterium) durch die cos–Funktion. Bei $t = T/2$ ist kein Nulldurchgang.

e) Für $t = T/2$ liefert obige Gleichung einen unbestimmten Wert. Regel nach l'Hospital:

$$g_d(T/2) = g_0 \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot \frac{t}{T}) \cdot \left. \frac{d/dt[\cos(\pi \cdot t/T)]}{d/dt[1 - (2 \cdot t/T)^2]} \right|_{t = T/2}$$

$$= g_0 \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot \frac{t}{T}) \cdot \left. \frac{-\pi/T \cdot \sin(\pi \cdot t/T)]}{-2 \cdot (2t/T) \cdot (2/T)} \right|_{t = T/2} = g_0 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{g_0}{2} .$$

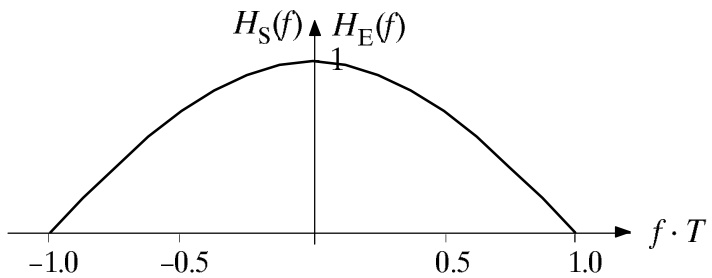
f) $H_E(f) = \dfrac{G_d(0) \cdot \cos^2(\pi/2 \cdot f \cdot T)}{G_s(0) \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot f \cdot T)} = \dfrac{\cos^2(\pi/2 \cdot x)}{\mathrm{si}(\pi \cdot x)}$ mit $x = f \cdot T,\ |x| < 1$.

$x = f \cdot T$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\cos^2(\frac{\pi}{2} \cdot x)$	1.000	0.976	0.905	0.794	0.655	0.500	0.345	0.206	0.095	0.024	0.000
$\mathrm{si}(\pi \cdot x)$	1.000	0.983	0.935	0.858	0.757	0.636	0.505	0.368	0.234	0.109	0.000
$H_E(f \cdot T)$	1.000	0.993	0.968	0.925	0.865	0.786	0.683	0.560	0.406	0.220	0.000

V16.2:

a) $s(t) = q_\delta(t) * h_S(t) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot s_0 \cdot T \cdot h_S(t - \nu \cdot T)$; $\quad g_s(t) = s_0 \cdot T \cdot h_S(t)$.

b) $H_{S,opt}(f) = H_{E,opt}(f) = \sqrt{H_N(f)} = \cos(\frac{\pi}{2} \cdot f \cdot T)$ für $|f \cdot T| \le 1$.



c) Da $H_S(f)$ als Produkt einer Cosinusfunktion (Frequenzperiode $4/T$) mit einer Rechteckfunktion (Breite $2T$) dargestellt werden kann, ergibt sich $h_S(t)$ durch Faltung zweier Diracfunktionen (bei $\pm T/4$, Gewicht jeweils 0.5) mit einer si–Funktion. Damit:

$$g_s(t) = s_0 \cdot T \cdot h_S(t) = s_0 \cdot T \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{T} [\mathrm{si}(\frac{2 \cdot \pi}{T}(t - \frac{T}{4})) + \mathrm{si}(\frac{2 \cdot \pi}{T}(t + \frac{T}{4}))] =$$

$$= s_0 \cdot [\frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot t/T - \frac{\pi}{2})}{\pi/2 \cdot (4 \cdot t/T - 1)} + \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot t/T + \frac{\pi}{2})}{\pi/2 \cdot (4 \cdot t/T + 1)}] =$$

$$= \frac{2 \cdot s_0}{\pi} \cdot [-\frac{\cos(2 \cdot \pi \cdot t/T)}{(4 \cdot t/T - 1)} + \frac{\cos(2 \cdot \pi \cdot t/T)}{(4 \cdot t/T + 1)}] = \frac{4 \cdot s_0}{\pi} \cdot \frac{\cos(2 \cdot \pi \cdot t/T)}{1 - 16 \cdot (t/T)^2} \quad \text{q.e.d.}$$

d) Bei ganzzahligen Vielfachen von T liefert die Cosinusfunktion stets den Wert 1.

Daraus folgt: $g_s(0) = \dfrac{4 \cdot s_0}{\pi} = 1.273$; $\qquad g_s(T) = -\dfrac{g_s(0)}{15} = -0.085$;

$g_s(2T) = -\dfrac{g_s(0)}{63} = -0.020$; $\qquad g_s(3T) = -\dfrac{g_s(0)}{143} = -0.009$.

e) Die mittlere Sendeleistung wird durch die Impilsinterferenzen nicht beeinflußt; die Gleichungen (16.20) und (16.21) gelten somit unabhängig vom Rolloff–Faktor r. Dagegen wird der Maximalwert des Sendesignals signifikant von den Impilsinterferenzen und dem Rolloff–Faktor bestimmt. Im Versuch D16.3 wird gezeigt, daß der Quotient $\mathrm{Max}|s(t)|/s_0$ je nach Rolloff–Faktor Werte zwischen 1.4 und 2 annehmen kann.

Musterlösungen der Versuchsdurchführung (7. Termin)

D15.1:

a) Duobinärcode:

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_ν	+1	–1	+1	+1	–1	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1
c_ν	–1	0	+1	+1	0	–1	–1	0	0	0	0	–1

AMI–Code:

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_ν	+1	–1	+1	+1	–1	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1
c_ν	+1	0	–1	+1	0	–1	+1	0	0	0	0	–1

b)

Codierung	Ordnung	$\varphi_a(0)$	$\varphi_a(\pm 1)$	$\varphi_a(\pm 2)$	gleichsignalfrei
binär bipolar redundanzfrei	0	1.00	0.00	0.00	nein
Duobinärcode	1	0.50	0.25	0.00	nein
AMI–Code	1	0.50	–0.25	0.00	ja

c) redundanzfrei: $\Phi_a(f) = 1$,

Duobinärcode: $\Phi_a(f) = \frac{1}{2} \cdot \big(1 + \cos(2\pi \cdot f \cdot T)\big) = \cos^2(\pi \cdot f \cdot T)$,

AMI–Code: $\Phi_a(f) = \frac{1}{2} \cdot \big(1 - \cos(2\pi \cdot f \cdot T)\big) = \sin^2(\pi \cdot f \cdot T)$.

d) Lange "+1"–Folge und lange "–1"–Folge sind hier nicht möglich.
Lange "0"–Folge, falls Quellensymbolfolge "–1, –1, –1, –1, –1, –1, –1, ..."
Alternierende Folge, falls Quellensymbolfolge "+1, +1, +1, +1, +1, +1, ..."

e) Lange "+1"–Folge, falls Quellensymbolfolge "–1, +1, +1, +1, +1, +1, ..."
Lange "–1"–Folge, falls Quellensymbolfolge "+1, +1, +1, +1, +1, +1, ..."
Lange "0"–Folge, falls Quellensymbolfolge "–1, –1, –1, –1, –1, –1, –1, ..."
Alternierende Folge ist hier nicht möglich.

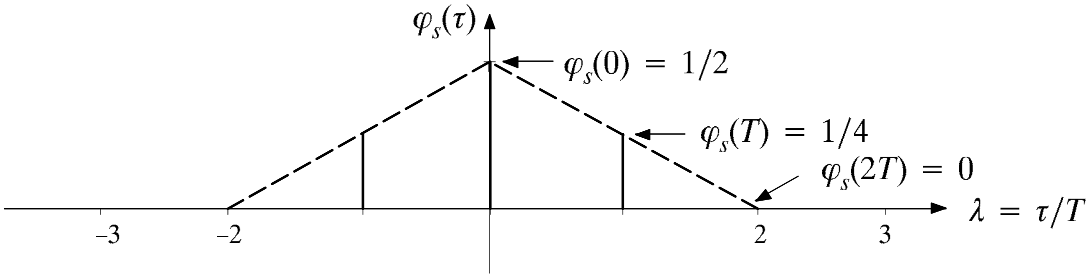
f) Mit (15.12) und dem Ergebnis von c) erhält man:

$$\Phi_s(f) = \Phi_a(f) \cdot \Phi_{gs}^{\mathrm{E}}(f) = \cos^2(\pi \cdot f \cdot T) \cdot s_0^2 \cdot T \cdot \frac{\sin^2(\pi \cdot f \cdot T)}{(\pi \cdot f \cdot T)^2} \ .$$

Mit $\cos(x) \cdot \sin(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ folgt weiter :

$$\Phi_s(f) = \frac{s_0^2 \cdot T}{4} \cdot \frac{\sin^2(2\pi \cdot f \cdot T)}{(\pi \cdot f \cdot T)^2} = s_0^2 \cdot T \cdot \mathrm{si}^2(2\pi \cdot f \cdot T) \; .$$

$\varphi_s(\tau)$ ergibt sich aus $\varphi_a(\tau)$ durch lineare Interpolation (dreieckförmiger Verlauf).



D15.2:

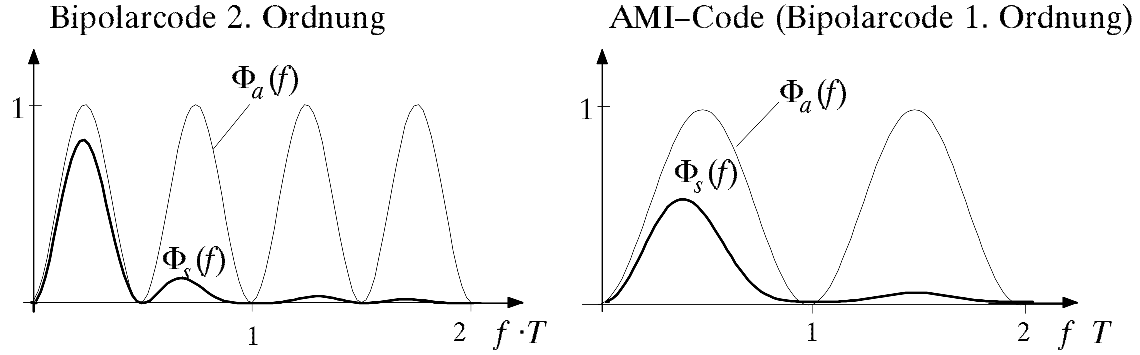
a)

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q_ν	+1	–1	+1	+1	–1	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1
b_ν	+1	–1	–1	+1	–1	–1	+1	–1	+1	–1	+1	+1
c_ν	+1	0	–1	+1	0	–1	+1	0	0	0	0	+1

b)

Codierung	$\varphi_a(0)$	$\varphi_a(\pm 1)$	$\varphi_a(\pm 2)$	$\varphi_a(\pm 3)$
AMI–Code	0.50	–0.25	0.00	0.00
Bipolarcode 2. Ordnung	0.50	0.00	–0.25	0.00

c) $\Phi_a(f)$ ist bis auf eine (Abszissen–)Stauchung um den Faktor 2 identisch wie beim AMI–Code. Dagegen unterscheidet sich $\Phi_s(f)$ auch in der Form, da in beiden Fällen mit der gleichen si–Funktion multipliziert werden muß.



d) Die alternierende Folge "+1, –1, +1, –1, +1, –1, ..." ist hier nicht möglich. Man erkennt dies u.a. daran, daß $\Phi_s(f = 1/(2T))$ gleich Null ist.

D15.3:

a)

Pseudoternärcode	ungünstigste Symbolfolge(n) für das obere Auge	
	obere Begrenzungslinie	untere Begrenzungslinie
AMI–Code	... –1 +1 –1 ...	... +1 0 0 ... bzw. ... 0 0 +1 ...
Duobinärcode	... 0 +1 0 ...	... +1 0 0 ... bzw. ... 0 0 +1 ...

b) AMI–Code: $d_{\text{oben}} = g_0 - 2 \cdot g_1$, $d_{\text{unten}} = g_1$;

$\ddot{o}(T_D) = d_{\text{oben}} - d_{\text{unten}} = g_0 - 3 \cdot g_1 = 0.684 - 3 \cdot 0.156 = 0.216\,\text{V}$.

Duobinärcode: $d_{\text{oben}} = g_0$, $d_{\text{unten}} = g_1$;

$\ddot{o}(T_D = 0) = g_0 - g_1 = 0.684\,\text{V} - 0.156\,\text{V} = 0.528\,\text{V}$.

Der AMI–Code ist ungünstig, da auch die alternierende Folge auftreten kann.

c) $E_2 = (d_{\text{oben}} + d_{\text{unten}})/2$, $E_1 = -E_2$;

AMI–Code: $E_2 = (g_0 - g_1)/2 = 0.264\,\text{V}$, $E_1 = -0.264\,\text{V}$;

Duobinärcode: $E_2 = (g_0 + g_1)/2 = 0.420\,\text{V}$, $E_1 = -0.420\,\text{V}$.

d)

	$\ddot{o}(T_D)$	σ_d	p_B	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$
$f_I \cdot T = 0.35$	0.062	0.057	0.1	0.29	–5.30 dB
$f_I \cdot T = 0.40$	**0.214**	**0.100**	$5.4 \cdot 10^{-2}$	0.14	**0.61 dB**
$f_I \cdot T = 0.45$	0.352	0.170	$7.4 \cdot 10^{-2}$	0.15	0.33 dB

geschlossenes Auge bei $f_{I,\min} \cdot T = 0.33$.

e)

	$\ddot{o}(T_D)$	σ_d	p_B	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$
$f_I \cdot T = 0.25$	0.117	0.017	$1.9 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$	10.97 dB
$f_I \cdot T = 0.30$	**0.286**	**0.031**	$3.1 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-6}$	**13.19 dB**
$f_I \cdot T = 0.35$	0.417	0.057	$3.5 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	11.28 dB

geschlossenes Auge bei $f_{I,\min} \cdot T = 0.22$.

D15.4:

a) Das Codersignal $c(t)$ ist vierstufig und besitzt gegenüber dem binären Quellensignal $q(t)$ die doppelte Symboldauer. Der Schwellenwertentscheider hat hier $M - 1 = 3$ Schwellenwerte. Somit ist die Augenöffnung prinzipiell um den Faktor 3 geringer. Aufgrund der niedrigeren Symbolrate ist allerdings der Einfluß der Impulsinterferenzen weniger stark ausgeprägt. Bei der gegebenen Grenzfrequenz $f_\mathrm{I} \cdot T = 0.4$ wird das Auge aufgrund der Impulsinterferenzen nur von 0.667 auf 0.562 vermindert. Beim vergleichbaren Binärsystem ergab sich eine Verkleinerung von 2 auf 0.735.

b) Nach (15.30) gilt:

$$\ddot{o}(T_\mathrm{D}) = 2 \cdot \Big[\frac{g_d(T_\mathrm{D})}{M-1} - \sum_{\nu=1}^{+n} |g_d(T_\mathrm{D} + \nu \cdot T)| - \sum_{\nu=1}^{+v} |g_d(T_\mathrm{D} - \nu \cdot T)| \Big] .$$

Das bedeutet, daß die Summe aller Vor– und Nachläufer betragsmäßig kleiner als der um den Faktor 3 verminderte Hauptwert sein muß. Mit den weiteren Einschränkungen $g_{-1} = g_1$ und $g_2 = g_3 = \ldots = g_{-2} = g_{-3} = \ldots = 0$ gilt $|g_1| < g_0/6$.

c)

	$\ddot{o}(T_\mathrm{D})$	σ_d	p_B	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_\mathrm{U})$
$f_\mathrm{I} \cdot T = 0.25$	0.106	0.017	$5.9 \cdot 10^{-5}$	$6.5 \cdot 10^{-4}$	10.15 dB
$f_\mathrm{I} \cdot T = 0.30$	**0.313**	**0.031**	$2.8 \cdot 10^{-8}$	$2.9 \cdot 10^{-7}$	**13.97 dB**
$f_\mathrm{I} \cdot T = 0.35$	0.455	0.057	$3.8 \cdot 10^{-6}$	$3.1 \cdot 10^{-5}$	12.05 dB
$f_\mathrm{I} \cdot T = 0.40$	0.547	0.100	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$3.0 \cdot 10^{-3}$	8.77 dB

geschlossenes Auge bei $f_\mathrm{I,min} \cdot T = 0.23$.

d) Für alle Systeme gibt es eine optimale Impulsformergrenzfrequenz $f_\mathrm{I,opt}$. Ist $f_\mathrm{I} < f_\mathrm{I,opt}$, so entstehen große Impulsinterferenzen und es resultiert daraus eine kleine vertikale Augenöffnung. Dagegen führt ein zu großer Wert von f_I zu einer starken Überhöhung des Entzerrerfrequenzgangs, so daß die Detektionsstörleistung sehr groß wird. Dieser grundsätzliche Zusammenhang gilt auch bei redundanten/mehrstufigen Codes.

e) Mit dem Quaternärcode kann gegenüber dem Binärcode ein Störabstandsgewinn von ca. 2 dB erzielt werden. Der Grund hierfür ist die um den Faktor 2 niedrigere Symbolrate, die zu geringeren Impulsinterferenzen führt. Während das binäre Auge für $f_\mathrm{I} \cdot T < 0{,}27$ geschlossen ist, ergibt sich beim Quaternärsystem trotz des prinzipiellen Verlustes um den Faktor 3 erst für $f_\mathrm{I} \cdot T < 0{,}23$ ein geschlossenes Auge. Die optimale Grenzfrequenz ist deshalb für $M = 4$ ($f_\mathrm{I,opt} \cdot T \approx 0.28$) deutlich kleiner als bei $M = 2$ ($f_\mathrm{I,opt} \cdot T \approx 0.35$). Damit ergibt sich auch ein kleinerer Störeffektivwert.

f) Bei kleinerer Kabeldämpfung wird die optimale Grenzfrequenz sowohl beim Binär– als auch beim Quaternärsystem größer. Mit $a_\mathrm{K} = 40$ dB ist das Quaternärsystem sogar um ca. 0.75 dB schlechter als das Binärsystem.

g) Bei den gegebenen Voraussetzungen beträgt der Störabstandsverlust gegenüber dem redundanzfreien Binärcode ca. 12 dB. Wegen der ternären Auswertung ohne gleichzeitige Reduzierung der Symbolrate muß die Grenzfrequenz deutlich erhöht werden. Besonders ungünstige Symbolfolgen werden trotz der relativ großen Redundanz von 37% durch diesen Code nicht ausgeschlossen. Bereits für $f_I \cdot T < 0.33$ ist das Auge geschlossen. Die optimale Grenzfrequenz beträgt (bei der Kabeldämpfung 60 dB) $f_{I,opt} \cdot T \approx 0.4$, und dementsprechend groß ist auch die Detektionsstörleistung.

h) Wenn die beiden Grundimpulswerte g_1 und g_{-1} jeweils negativ wären.

i) Jeweils vier Binärsymbole werden zu drei Ternärsymbolen zusammengefaßt. Dadurch verringert sich die Symbolrate gegenüber dem Binärsystem um den Faktor 0.75. Bei einem Nyquist–System ergäbe sich aufgrund der Ternärentscheidung die Augenöffnung zu 1, wegen der Impulsinterferenzen verringert sich diese auf 0.456. Das ungünstigste Signalstörleistungsverhältnis ist um 5 ... 7 dB schlechter als bei den redundanzfreien Systemen, aber auch um ca. 6.5 dB besser als beim AMI–Code.

D16.1:

a) Allgemein gilt: $g_d(t) = 2 \cdot s_0 \cdot f_G \cdot T \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot f_G \cdot t)$. Im folgenden sei $s_0 = 1$.

b) Bei $f_G \cdot T = 0.5$ ist das Auge maximal geöffnet; die vertikale Augenöffnung beträgt 2. Eigentlich müßte bei rechteckförmigem Spektrum die horizontale Augenöffnung gleich 0 sein (d.h. das Auge zu einem unendlich schmalen Spalt entarten). Da hier jedoch nur $n = v = 3$ Vor– und Nachläufer berücksichtigt werden (und nicht unendlich viele), ergibt sich für die horizontale Augenöffnung ein deutlich größerer Wert.

c) Für $f_G \cdot T < 0.5$ ergibt sich theoretisch stets ein geschlossenes Auge. Bei $f_G \cdot T = 0.4$ wird dies auch am Programm deutlich, obwohl nur jeweils $n = v = 3$ Vor– und Nachläufer berücksichtigt werden.

d) Auch hier ergeben sich Impulsinterferenzen. Obwohl bei $f_G \cdot T = 0.6$ der Hauptwert größer als 1 ist (nämlich 1.2), ist die vertikale Augenöffnung nur 0.643 (im Gegensatz zu 2 bei einem Nyquist–System mit $f_G \cdot T = 0.5$).

e) Bei $f_G \cdot T = 1$ ist die vertikale Augenöffnung maximal (hier gleich 4), da das erste Nyquist–Kriterium erfüllt ist. Trotzdem ist bei rechteckförmigen Sendeimpuls eine Nyquist–Entzerrung mit $f_G \cdot T = 1$ nicht sinnvoll. Betrachtet man einen Sendeimpuls $g_s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G_s(f)$ der Dauer T, so ist das Empfangsfilter $H_E(f) = G_d(f)/(G_s(f) \cdot H_K(f))$ nicht mehr realisierbar, da $G_s(f=1/T) = 0$ ist, während $G_d(f=1/T) = 0.5$ gilt. Das Filter hätte somit bei $f = 1/T$ eine Polstelle, das Rauschen würde unendlich verstärkt.

Das zweite Kriterium ist nicht erfüllt. Dies erkennt man z.B. daran, daß die horizontale Augenöffnung deutlich kleiner als T ist. Zwar weist der Grundimpuls $g_d(t)$, wie für das zweite Nyquist–Kriterium erforderlich, Nulldurchgänge zu den Zeitpunkten $\pm 1.5T$, $\pm 2.5T$, $\pm 3.5T$ auf, aber auch bei $0.5T$.

f) Die Aussagen zum binären Augendiagramm lassen sich direkt auf das Quaternärsystem übertragen.

D16.2:

a) Beide Spektren (Trapez und Cosinus–Rolloff) erfüllen das erste Nyquist–Kriterium unabhängig vom Rolloff–Faktor, solange $f_G \cdot T = 0.5$ ist. Die vertikale Augenöffnung ist somit stets maximal gleich 2. Obwohl der Cosinus–Rolloff–Tiefpaß asymptotisch das bessere Abklingverhalten (mit t^3) aufweist als der Trapez–Tiefpaß (mit t^2), ist die horizontale Augenöffnung bei ersterem ungünstiger (0.810 gegenüber 0.873). Der Grund hierfür ist die größere Flankensteilheit des Cosinus–Rolloff–Tiefpasses bei gegebenem $r = 0.5$.

b) Der Cosinus–Rolloff–Tiefpaß mit $r = 0.7$ hat die gleiche Steilheit wie der Trapez–Tiefpaß mit $r = 0.5$, aber keine Ecken. Somit ist hier die horizontale Augenöffnung etwas günstiger (0.905 gegenüber 0.873).

c) Das zweite Nyquist–Kriterium wird allein vom Cosinus–Rolloff–Tiefpaß mit $r = 1$ erfüllt. Dies entspricht dem $\cos^2$–Verlauf. Der Trapez–Tiefpaß mit $r = 1$ hat einen dreieckförmigen Frequenzgang. Die Zeitfunktion verläuft entsprechend Anhang C proportional zur si^2–Funktion; das zweite Nyquist–Kriterium wird nicht erfüllt.

D16.3:

a) Die angezeigten Werte stimmen exakt mit den berechneten überein:

$$g_0 = g_s(0) = \frac{4 \cdot s_0}{\pi} = 1.273; \quad g_1 = g_s(T) = -0.085;$$

$$g_2 = g_s(2T) = -0.020; \quad g_3 = g_s(3T) = -0.009.$$

b) $$s_{\min} = ö(t = 0)/2 = g_0 - 2 \cdot |g_1| - 2 \cdot |g_2| - 2 \cdot |g_3| =$$

$$= g_0 + 2 \cdot g_1 + 2 \cdot g_2 + 2 \cdot g_3 = 1.045 \ .$$

Das Programm ”*nyq*” liefert genau diesen Wert. Aufgrund der Grundimpulswerte (positiver Hauptwert, alle Vor– und Nachläufer negativ) stammt die obere innere Augenlinie von der langen Eins–Folge.

c) Zum Zeitnullpunkt ist das Sendesignal maximal für eine Einzel–Eins (alle anderen Symbole seien –1). Daraus folgt:

$$s_{\max} = g_0 - 2 \cdot g_1 - 2 \cdot g_2 - 2 \cdot g_3 = 1.501 \ . \ \text{Oder}: s_{\max} = 2 \cdot g_0 - s_{\min} \ .$$

d) Die lange Eins–Folge führt aufgrund von $H_S(f = 0) = 1$ zum tatsächlichen Sendesignal $s(t) = 1$ (normiert). Mit dem Ergebnis c) ergibt sich somit $s_{\min} = 1$ und $s_{\max} = 1.546$.

e) Unabhängig vom Rolloff–Faktor r ist das Auge des Detektionssignals maximal geöffnet. Bei Wurzel–Wurzel–Aufteilung des Nyquist–Frequenzgangs auf Sender und Empfänger ist entsprechend (16.18) auch die Störleistung unabhängig vom Rolloff r. Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit beträgt also stets

$$p_B = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right) .$$

Systeme mit unterschiedlichem r differieren bzgl. der horizontalen Augenöffnung.

f) Das ”Augendiagramm” des Wurzel–Nyquist–Systems beschreibt u.a. die Impulsinterferenzen des Sendesignals. Mit dem Rolloff–Faktor $r = 0$ (Küpfmüller–Tiefpaß) gibt es auch beim Sendesignal keine Impulsinterferenzen. Der Maximalwert von $s(t)$ liegt in der Mitte zwischen 2 Symbolen (also bei $T/2$) und ist doppelt so groß als bei $t = 0$.

Mit steigendem r nimmt das Verhältnis von s_{max} zu s_{min} kontinuierlich ab; etwa für $r = 0.5$ springt t_{max}/T, also der Zeitpunkt des Signalmaximums, von 0.5 auf 0. Die erforderliche Bandbreite steigt ebenfalls mit wachsendem Rolloff–Faktor an

	$B_{K,min}/f_N$	$g_s(0)/s_0$	Min $\|s(t = 0)\|$	Max $\|s(t)\|$ (bei t_{max}/T)
$r = 1$	2.000	1.273	1.044	1.503 (0.0)
$r = 0.75$	1.750	1.205	0.955	1.455 (0.0)
$r = 0.50$	1.500	1.136	0.832	1.448 (0.0)
$r = 0.25$	1.250	1.067	0.758	1.739 (0.5)
$r = 0$	1.000	1.000	1.000	2.030 (0.5)

D16.4:

a) Das Detektionsnutzsignal $d_S(t)$ kann zu den Detektionszeitpunkten nur 2 verschiedene Werte annehmen. Der Grundimpuls hat – wie bereits in D16.2 dargestellt – den für $r = 1$ typischen Verlauf (1. und 2. Nyquistkriterium erfüllt). Aufgrund des großen Störanteils $d_N(t)$ sind diese Eigenschaften allerdings im Gesamtsignal nicht mehr zu erkennen. Trotzdem gilt $p_B = p_U$.

	$ö(T_D)$	σ_d	p_B	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$
Gauß ($f_I \cdot T = 0.35$)	0.478	0.057	$1.8 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	12.48 dB
Nyquist ($r = 1$)	2.000	0.571	$4.0 \cdot 10^{-2}$	$4.0 \cdot 10^{-2}$	4.87 dB

b) Bei einem Nyquistsystem mit $r = 1$ erfolgt die Kanalentzerrung in einem viel weiteren Frequenzbereich als beim optimierten Gauß–Impulsformer. Dadurch ist hier der Störeffektivwert ca. um den Faktor 10 größer. Dieser Effekt wirkt sich auf das Gesamtverhalten stärker aus als die um ca. den Faktor 4 größere Augenöffnung; der Störabstandsverlust beträgt etwa 7.6 dB.

c) Je kleiner der Rolloff–Faktor r ist, desto weniger weit erfolgt die Kanalentzerrung. Da aber auch die Cosinus–Rolloff–Flanke die Störleistung vermindert, gibt es für r ein Optimum. Bei den gegebenen Randbedingungen liegt dieses etwa bei $r = 0.25$.

Nyquist	$\ddot{o}(T_D)$	σ_d	p_B	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$
$r = 1$	2.000	0.571	$4.0 \cdot 10^{-2}$	$4.0 \cdot 10^{-2}$	4.87 dB
$r = 0.5$	2.000	0.179	$1.2 \cdot 10^{-8}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$	4.87 dB
$\boldsymbol{r = 0.25}$	**2.000**	**0.146**	$3.5 \cdot 10^{-12}$	$3.5 \cdot 10^{-12}$	**16.73 dB**
$r = 0$	2.000	0.203	$4.2 \cdot 10^{-7}$	$4.2 \cdot 10^{-7}$	13.85 dB

d) Der Störabstandsgewinn des Nyquist–Systems beträgt etwa 4.25 dB. Die mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit ist dabei um fast sechs Zehnerpotenzen geringer.

Musterlösungen der Übungsaufgaben (7. Termin)

Ü15.1:

```
#include <math.h>
double codnue(nue,kenn,qnue)
  long nue,kenn;
 float qnue;
{ long KC,NC;
  float bnue,cnue;
  static float feld[2];
  if(nue==1)
    { feld[0]=-1.;
      feld[1]=-1.;
    }
  switch (kenn)
    { case 1: KC=1;
              NC=1;
              break;
      case 2: KC=-1;
              NC=1;
              break;
      case 3: KC=1;
              NC=2;
    }
  if (qnue != (KC*feld[NC-1]))
    bnue=1.0;
  else
    bnue=-1.0;
  cnue=0.5*(bnue-KC*feld[NC-1]);
  feld[1]=feld[0];
  feld[0]=bnue;
  return(cnue);
}
```

Ü16.1:

```
# include "math.h"
void nyqcrt(fG,r,spektrum,signal)
  double fG,r;
  float spektrum[],signal[];
{ void fft();
  float fA=0.03125,hlfi[1024],pi=3.1415926,x,TA;
  long N=1024;
  int if1,if2,i,mitte;
  mitte=N/2;
  for (i=0;i<N;i++) spektrum[i]=0.;
  if1=(int)(fG/fA*(1.-r));
  if2=(int)(fG/fA*(1.+r));
  for(i=0;i<=if1;i++)
    spektrum[mitte+i]=spektrum[mitte-i]=1.;
  for(i=if1;i<=if2;i++)
    { x=(float)(i-if1)/(float)(if2-if1);
      x=cos(pi/2*x);
      spektrum[mitte+i]=spektrum[mitte-i]=x*x;
    }
  for(i=0;i<N;i++)
    { signal[i]=spektrum[i];
      hlfi[i]=0.;
    }
  for(i=0;i<N/2;i++)
    { x=spektrum[i];
      signal[i]=spektrum[i+N/2];
      signal[i+N/2]=x;
      hlfi[i]=0.;
      hlfi[i+N/2]=0.;
    }
  TA=1./(N*fA);
  fft((long)0,N,signal,hlfi,TA);
  for(i=0;i<N/2;i++)
    { x=signal[i];
      signal[i]=signal[i+N/2];
      signal[i+N/2]=x;
    }
}
```

Anhang A: Einige Hinweise zu den C-Programmen

Die hier verwendeten Graphikprogramme sind in Fortran77 geschrieben. Damit Sie C–Programmteile in die Hauptprogramme einbinden können, mußten Interfaces erstellt werden, die die Parameterübergabe von den Fortran– zu den C–Routinen (und umgekehrt) bewerkstelligen. Dies ist der Grund dafür, daß Sie bei der C–Programmierung einige – nach unserer Auffassung nicht sehr gravierende – Restriktionen in Kauf nehmen müssen. Diese sind nachfolgend am Beispiel der Übungsaufgabe Ü1.2 zusammengestellt, wobei die C–Funktion *"long z2(M, p)"* zu erstellen ist. Diese soll in das Hauptprogramm *"dis"* eingebunden werden.

1. Verlassen Sie das Hauptmenü mit dem Menüpunkt *"Z: Zur DOS–Ebene"*; Sie befinden sich danach in Ihrem Homeverzeichnis. (Dieses wird übrigens in *"LNTSIM.BAT"* durch die DOS–Variable *"SIMTMP"* bestimmt).
2. Schreiben Sie Ihren C–Code mit *"edit"* in die Datei *"z2.c"*. Zum Übersetzen und Binden können Sie die DOS–Prozedur *"mkdis"* verwenden.
3. Starten Sie das Hauptprogramm *"dis"*. Mit dem Menüpunkt 7 können Sie nun Ihre C–Funktion *"z2"* testen. Das Eingabemenü ist dabei an die aktuelle Übungsaufgabe Ü1.2 angepaßt.
4. Beachten Sie unbedingt den bei der Aufgabenbeschreibung vorgegebenen Dateiheader, der für vorliegendes Beispiel wie folgt lautet:
   ```
   long z2(M,p)
   long M; float p;
   { }
   ```
   Das eigentliche Programm folgt dann zwischen den geschweiften Klammern.
5. Da das Programm *"z2"* die Funktion *"long z1(M, p_mue)"* von Ü1.1 verwenden soll, muß diese intern mit *"long z1()"* als Longvariable definiert werden.
6. Der Aufruf von *"random()"* liefert eine zwischen 0 und 1 gleichverteilte Zufallsgröße. Im aufrufenden Programm muß diese Funktion vorher mit *"float random()"* definiert werden.
7. Benötigt Ihr Programm eine mathematische Funktion, so muß die Mathematik–Bibliothek hinzugebunden werden. Fügen Sie in diesem Fall als erste Zeile in Ihr Programm ein:
   ```
   #include <math.h>
   ```
8. Funktionsaufrufe mit einem Parameter lauten: *"double aaa (double x)"*. Beispielsweise steht hier *"aaa"* für *"cos"* (Cosinus), *"sin"* (Sinus), *"tan"* (Tangens), *"log"* (natürlicher Logarithmus), *"log*10" (Logarithmus zur Basis 10), *"exp"* (Exponentialfunktion), *"sqrt"* (Quadratwurzel). Die Potenz x^y erzeugt man mit *"double pow (double x, double y)"*.
9. Eine komplexe Größe *z* wird wie folgt definiert: *"struct cmplx z"*. Deren Realteil wird mit *"z.x"*, der Imaginärteil mit *"z.y"* angesprochen. Voraussetzung ist die Bereitstellung der entsprechenden Bibliothek mit der Zeile
   ```
   #include "complex.h"
   ```

Anhang B: Tabellen der Fehlerfunktionen

x	$20 \cdot \lg(x)$	$\phi(x)$	$Q(x)$	$\frac{1}{2} \cdot \mathrm{erfc}(x)$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}x} e^{-x^2}$
0.0	$-\infty$ dB	0.500000	0.500000E+00	0.500000E+00	∞
0.2	-13.979 dB	0.579260	0.420740E+00	0.388649E+00	0.135517E+01
0.4	-7.959 dB	0.655422	0.344578E+00	0.285804E+00	0.600963E+00
0.6	-4.437 dB	0.725747	0.274253E+00	0.198072E+00	0.328018E+00
0.8	-1.938 dB	0.788145	0.211855E+00	0.128950E+00	0.185933E+00
1.0	0.000 dB	0.841345	0.158655E+00	0.786496E-01	0.103777E+00
1.2	1.584 dB	0.884930	0.115070E+00	0.448430E-01	0.556967E-01
1.4	2.923 dB	0.919243	0.807567E-01	0.238577E-01	0.283824E-01
1.6	4.082 dB	0.945201	0.547993E-01	0.118259E-01	0.136295E-01
1.8	5.105 dB	0.964070	0.359303E-01	0.545475E-02	0.613774E-02
2.0	6.021 dB	0.977250	0.227504E-01	0.233887E-02	0.258337E-02
2.2	6.848 dB	0.986097	0.139035E-01	0.931423E-03	0.101388E-02
2.4	7.604 dB	0.991802	0.819755E-02	0.344257E-03	0.370380E-03
2.6	8.299 dB	0.995339	0.466119E-02	0.118017E-03	0.125774E-03
2.8	8.943 dB	0.997445	0.255513E-02	0.375066E-04	0.396614E-04
3.0	9.542 dB	0.998650	0.134990E-02	0.110453E-04	0.116044E-04
3.2	10.103 dB	0.999313	0.687138E-03	0.301288E-05	0.314825E-05
3.4	10.630 dB	0.999663	0.336929E-03	0.760996E-06	0.791538E-06
3.6	11.126 dB	0.999841	0.159109E-03	0.177931E-06	0.184347E-06
3.8	11.596 dB	0.999928	0.723480E-04	0.385020E-07	0.397557E-07
4.0	12.041 dB	0.999968	0.316713E-04	0.770863E-08	0.793640E-08
4.2	12.465 dB	0.999987	0.133457E-04	0.142774E-08	0.146619E-08
4.4	12.869 dB	0.999995	0.541254E-05	0.244585E-09	0.250611E-09
4.6	13.255 dB	0.999998	0.211246E-05	0.387480E-10	0.396247E-10
4.8	13.625 dB	0.999999	0.793328E-06	0.567606E-11	0.579440E-11
5.0	13.979 dB	1.000000	0.286652E-06	0.768730E-12	0.783543E-12
5.2	14.320 dB	1.000000	0.996443E-07	0.962455E-13	0.979642E-13
5.4	14.648 dB	1.000000	0.333204E-07	0.111384E-13	0.113233E-13
5.6	14.964 dB	1.000000	0.107176E-07	0.119142E-14	0.120985E-14
5.8	15.269 dB	1.000000	0.331574E-08	0.117780E-15	0.119481E-15
6.0	15.563 dB	1.000000	0.986589E-09	0.107599E-16	0.109054E-16
6.2	15.848 dB	1.000000	0.282316E-09	0.908340E-18	0.919860E-18
6.4	16.124 dB	1.000000	0.776883E-10	0.708539E-19	0.716989E-19
6.6	16.391 dB	1.000000	0.205579E-10	0.510666E-20	0.516397E-20
6.8	16.650 dB	1.000000	0.523095E-11	0.340042E-21	0.343644E-21
7.0	16.902 dB	1.000000	0.127981E-11	0.209191E-22	0.211284E-22
7.2	17.147 dB	1.000000	0.301063E-12	0.118891E-23	0.120015E-23
7.4	17.385 dB	1.000000	0.680922E-13	0.624192E-25	0.629792E-25
7.6	17.616 dB	1.000000	0.148065E-13	0.302727E-26	0.305304E-26
7.8	17.842 dB	1.000000	0.309536E-14	0.135621E-27	0.136717E-27
8.0	18.062 dB	1.000000	0.622097E-15	0.561215E-29	0.565533E-29
8.2	18.276 dB	1.000000	0.120194E-15	0.214511E-30	0.216084E-30
8.4	18.486 dB	1.000000	0.223240E-16	0.757313E-32	0.762593E-32
8.6	18.690 dB	1.000000	0.398579E-17	0.246937E-33	0.248584E-33
8.8	18.890 dB	1.000000	0.684079E-18	0.743680E-35	0.748421E-35
9.0	19.085 dB	1.000000	0.112859E-18	0.206852E-36	0.208113E-36
9.2	19.276 dB	1.000000	0.178976E-19	0.531368E-38	0.534471E-38
9.4	19.463 dB	1.000000	0.272817E-20	0.126064E-39	0.126766E-39
9.6	19.645 dB	1.000000	0.399722E-21	0.276196E-41	0.277737E-41
9.8	19.825 dB	1.000000	0.562928E-22	0.560519E-43	0.560519E-43
10.0	20.000 dB	1.000000	0.761985E-23	0.140130E-44	0.140130E-44

Die vorherige Tabelle gilt für äquidistante x–Werte, die nachfolgende für äquidistante dB–Werte.

x	$20 \cdot \lg(x)$	$\phi(x)$	$Q(x)$	$\frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}(x)$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}x} e^{-x^2}$
1.000	.00 dB	0.841345	0.158655E+00	0.786496E-01	0.103777E+00
1.029	.25 dB	0.848307	0.151693E+00	0.727642E-01	0.950314E-01
1.059	.50 dB	0.855258	0.144742E+00	0.670652E-01	0.867179E-01
1.090	.75 dB	0.862184	0.137816E+00	0.615667E-01	0.788379E-01
1.122	1.00 dB	0.869073	0.130927E+00	0.562820E-01	0.713922E-01
1.155	1.25 dB	0.875910	0.124090E+00	0.512231E-01	0.643805E-01
1.189	1.50 dB	0.882682	0.117318E+00	0.464013E-01	0.578013E-01
1.223	1.75 dB	0.889374	0.110626E+00	0.418262E-01	0.516521E-01
1.259	2.00 dB	0.895971	0.104029E+00	0.375061E-01	0.459288E-01
1.296	2.25 dB	0.902458	0.975417E-01	0.334476E-01	0.406256E-01
1.334	2.50 dB	0.908820	0.911804E-01	0.296553E-01	0.357354E-01
1.372	2.75 dB	0.915040	0.849600E-01	0.261321E-01	0.312490E-01
1.413	3.00 dB	0.921104	0.788959E-01	0.228786E-01	0.271559E-01
1.454	3.25 dB	0.926997	0.730031E-01	0.198936E-01	0.234433E-01
1.496	3.50 dB	0.932704	0.672961E-01	0.171734E-01	0.200970E-01
1.540	3.75 dB	0.938211	0.617891E-01	0.147111E-01	0.171010E-01
1.585	4.00 dB	0.943505	0.564953E-01	0.125009E-01	0.144377E-01
1.631	4.25 dB	0.948573	0.514269E-01	0.105323E-01	0.120881E-01
1.679	4.50 dB	0.953405	0.465951E-01	0.879383E-02	0.100320E-01
1.728	4.75 dB	0.957990	0.420097E-01	0.727250E-02	0.824821E-02
1.778	5.00 dB	0.962321	0.376790E-01	0.595387E-02	0.671483E-02
1.830	5.25 dB	0.966390	0.336096E-01	0.482252E-02	0.540952E-02
1.884	5.50 dB	0.970194	0.298063E-01	0.386224E-02	0.430983E-02
1.939	5.75 dB	0.973728	0.262719E-01	0.305640E-02	0.339355E-02
1.995	6.00 dB	0.976993	0.230074E-01	0.238829E-02	0.263899E-02
2.054	6.25 dB	0.979989	0.200113E-01	0.184142E-02	0.202531E-02
2.113	6.50 dB	0.982720	0.172803E-01	0.139980E-02	0.153275E-02
2.175	6.75 dB	0.985192	0.148075E-01	0.104828E-02	0.114294E-02
2.239	7.00 dB	0.987413	0.125871E-01	0.772675E-03	0.839009E-03
2.304	7.25 dB	0.989391	0.106087E-01	0.560054E-03	0.605749E-03
2.371	7.50 dB	0.991139	0.886107E-02	0.398796E-03	0.429712E-03
2.441	7.75 dB	0.992669	0.733107E-02	0.278682E-03	0.299204E-03
2.512	8.00 dB	0.993996	0.600439E-02	0.190908E-03	0.204260E-03
2.585	8.25 dB	0.995134	0.486564E-02	0.128054E-03	0.136557E-03
2.661	8.50 dB	0.996101	0.389863E-02	0.839995E-04	0.892946E-04
2.738	8.75 dB	0.996913	0.308676E-02	0.538158E-04	0.570355E-04
2.818	9.00 dB	0.997587	0.241331E-02	0.336273E-04	0.355362E-04
2.901	9.25 dB	0.998138	0.186176E-02	0.204635E-04	0.215656E-04
2.985	9.50 dB	0.998584	0.141612E-02	0.121089E-04	0.127275E-04
3.073	9.75 dB	0.998939	0.106116E-02	0.695578E-05	0.729274E-05
3.162	10.00 dB	0.999217	0.782701E-03	0.387211E-05	0.404995E-05
3.255	10.25 dB	0.999432	0.567725E-03	0.208500E-05	0.217578E-05
3.350	10.50 dB	0.999595	0.404562E-03	0.108385E-05	0.112858E-05
3.447	10.75 dB	0.999717	0.282936E-03	0.542794E-06	0.564021E-06
3.548	11.00 dB	0.999806	0.193986E-03	0.261307E-06	0.270989E-06

Anhang C: Tabelle zur Fouriertransformation

Übertragungsfunktion	Impulsantwort
Küpfmüller–Tiefpaß $H(f) = 1$ für $\lvert f\rvert \le f_1$, ansonsten 0 $\Delta f = 2 \cdot f_G = 2 \cdot f_1$	$h(t) = \Delta f \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot \Delta f \cdot t)$ mit $\mathrm{si}(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$
Trapez–Tiefpaß $H(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } \lvert f\rvert \le f_1 \\ \dfrac{f_2 - \lvert f\rvert}{f_2 - f_1} & \text{für } f_1 \le \lvert f\rvert \le f_2 \\ & \text{ansonsten } 0 \end{cases}$	$h(t) = \Delta f \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot \Delta f \cdot t) \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot r \cdot \Delta f \cdot t)$ mit $\Delta f = f_1 + f_2$, $r = \dfrac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}$
Dreieck–Tiefpaß $H(f) = 1 - \dfrac{\lvert f\rvert}{f_1}$ für $\lvert f\rvert \le f_1$, ansonsten 0 $\Delta f = 2 \cdot f_G = f_1$	$h(t) = \Delta f \cdot \mathrm{si}^2(\pi \cdot \Delta f \cdot t)$ mit $\mathrm{si}(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$
Spalt–Tiefpaß $H(f) = \mathrm{si}(\pi \cdot \dfrac{f}{f_1})$ $\Delta f = 2 \cdot f_G = f_1$	$h(t) = \Delta f$ für $\lvert t\rvert \le \dfrac{1}{2 \cdot \Delta f}$ ansonsten 0
si²–Tiefpaß $H(f) = \mathrm{si}^2(\pi \cdot \dfrac{f}{f_1})$ $\Delta f = 2 \cdot f_G = f_1$	$h(t) = \Delta f \cdot [1 - \Delta f \cdot \lvert t\rvert]$ für $\lvert t\rvert \le \dfrac{1}{\Delta f}$
Gauß–Tiefpaß $H(f) = \exp[-\pi \cdot (\dfrac{f}{\Delta f})^2]$ $\Delta f = 2 \cdot f_G$	$h(t) = \Delta f \cdot \exp[-\pi \cdot (\Delta f \cdot t)^2]$
Tiefpaß n–ter Ordnung $H(f) = \dfrac{1}{(1 + \mathrm{j} \cdot f/f_1)^n}$ f_1: 3 dB–Grenzfrequenz	1. Ordnung ($n = 1$): $h(t) = 2\pi \cdot f_1 \cdot \exp[-2\pi \cdot f_1 \cdot t]$ für $t \ge 0$, sonst 0 2. Ordnung ($n = 2$): $h(t) = 4\pi^2 \cdot f_1^2 \cdot t \cdot \exp[-2\pi \cdot f_1 \cdot t]$ für $t \ge 0$, sonst 0