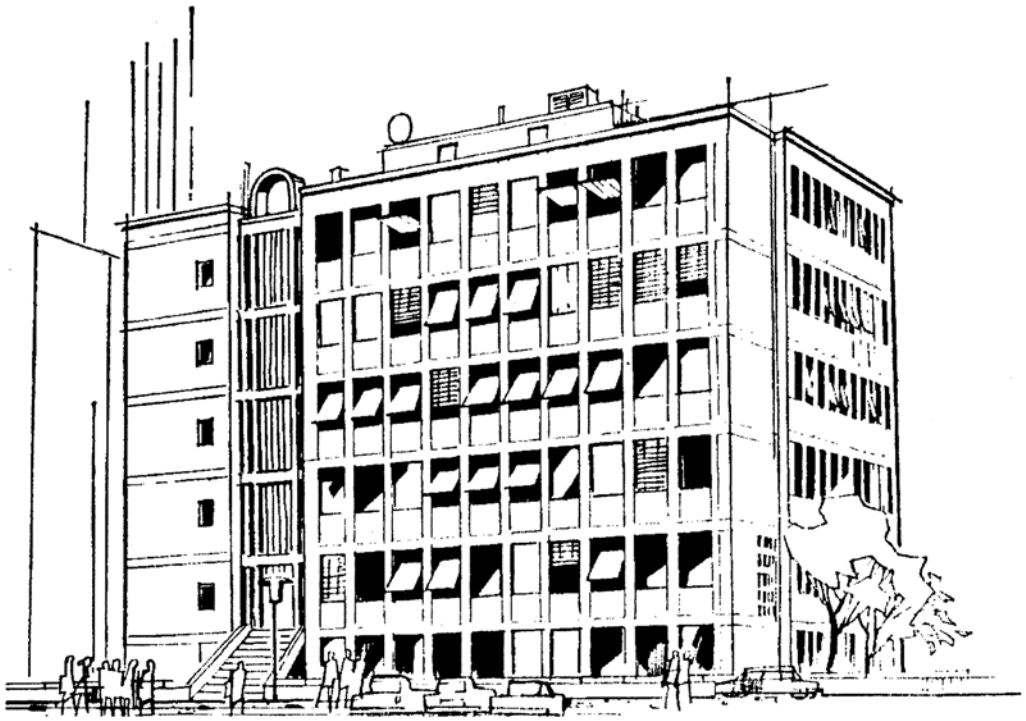
Impulsinterferenzen & Entzerrung

Lehrstuhl für Nachrichtentechnik
Technische Universität München



Vorwort

Unter *Impulsinterferenz* versteht man die Beeinträchtigung einer Symbolentscheidung aufgrund von Impulsverbreiterung (Zeitdispersion) und damit verbunden eine Abhängigkeit der Bitfehlerwahrscheinlichkeit von den Nachbarsymbolen (Abschnitt 1.1). Sie spielt insbesondere bei leitungsgebundener Übertragung eine dominante Rolle, sollte aber auch bei Funksystemen nicht außer Acht gelassen werden.

Eine einfache Maßnahme, um den störenden Einfluß von Impulsinterferenzen bei einem Digitalempfänger mit Schwellenwertentscheidung zu reduzieren, ist eine lineare *Entzerrung* (Abschnitt 1.2). Ein Beispiel hierfür ist die sogenannte *Nyquistentzerrung*, die eine vollständige Eliminierung der Impulsinterferenzen bewirkt, jedoch dabei stets den Einfluß der Rauschstörungen verstärkt.

Weiterhin werden in diesem Versuch mit der *Entscheidungsrückkopplung* (Abschnitt 1.3), dem *Korrelationsempfänger* (Abschnitt 1.4) und schließlich dem *Viterbi–Algorithmus* (Abschnitt 1.5) auch aufwendigere Empfängerkonzepte vorgestellt, bei denen aufgrund ihres nichtlinearen Charakters diese unerwünschte Rauschanhebung vermieden werden.

Alle diese Methoden können prinzipiell bei allen digitalen Modulationsverfahren angewandt werden; in diesem Praktikum werden sie jedoch aus Darstellungsgründen stets am einfachsten Beispiel der binären Basisbandübertragung verdeutlicht.

Die vorliegende Anleitung gliedert sich in die drei Kapitel *Theoretische Grundlagen*, *Vorbereitungsfragen* und *Versuchsdurchführung*. Anhand dieser Versuchsanleitung und der Lehrprogramme sollte ein Benutzer mit Grundkenntnissen der Nachrichtentechnik in der Lage sein, sich den Lehrstoff dieses Versuchs in etwa acht Stunden – ca. vier Stunden Vorbereitung sowie vier Stunden Versuchsdurchführung – zu erarbeiten.

Die Musterlösungen der Vorbereitungsfragen und der Versuchsdurchführung sind am Ende des Heftes (ab Seite 63) beigefügt. Auf Seite IV finden Sie noch eine Zusammenstellung einschlägiger Literaturstellen, die für eine erfolgreiche Versuchsdurchführung durchaus nützlich sein können, jedoch nicht vorausgesetzt werden.

Die hier eingesetzten interaktiven Graphikprogramme *"bas"*, *"kve"*, *"nyq"* und *"qrk"* wurden von meinen ehemaligen Diplomand(inn)en *Dorothea Pabst, Hans Peter Christoph*, *Helmut Frohnwieser*, *Erik Hogl*, *Bernhard Knull* und *Christian Riedl* konzipiert und mit großer Sorgfalt implementiert. Mein langjähriger Kollege, Herr Dr.–Ing. *Klaus Eichin*, hat einige der Arbeiten mitbetreut und tatkräftig mitgearbeitet. Für das überdurchschnittliche Engagement und die ausgesprochen freundschaftliche Zusammenarbeit danke ich allen Beteiligten recht herzlich.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg und Spaß beim Durcharbeiten dieses Versuchs.

München, im Oktober 1999 Günter Söder

Hinweis: Die in diesem Versuch verwendeten Lehrprogramme *"bas"*, *"kve"*, *"nyq"* und *"qrk"* sind Bestandteil des insgesamt 24 Graphikprogramme umfassenden Softwarepakets *LNTsim,* das wir – ebenso wie die Windows–Programme der Reihe *LNTwin* – an Hochschuleinrichtungen zu günstigen Konditionen weitergeben. Bei diesbezüglichen Fragen, aber auch bei Kritik jeder Art, wenden Sie sich bitte an:

Priv.–Doz. Dr.–Ing. habil. Günter Söder
Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Technische Universität München
D–80290 München, Tel: (089) 289–23486, Fax: (089) 289–23490
Email: guenter.soeder@ei.tum.de

Inhaltsverzeichnis

1 Theoretische Grundlagen 1
1.1 Impulsinterferenzen 1
1.1.1 Betrachtetes Übertragungssystem 1
1.1.2 Mittlere und ungünstigste Fehlerwahrscheinlichkeit 4
1.2 Lineare Entzerrung 8
1.2.1 Ideale Entzerrung und Impulsformer 8
1.2.2 Nyquistentzerrung 10
1.3 Entscheidungsrückkopplung 13
1.3.1 Prinzip und Blockschaltbild 13
1.3.2 Schaltungstechnische Realisierung 16
1.4 Korrelationsempfänger 17
1.4.1 Prinzip und Entscheidungsregeln 17
1.4.2 Baumdiagramm 19
1.5 Viterbi–Empfänger 22
1.5.1 Blockschaltbild und Prinzip 22
1.5.2 Fehlergrößen und Trellisdiagramm 24
1.5.3 Ablaufdiagramm eines Viterbi–Entscheiders 29
1.5.4 Fehlerwahrscheinlichkeit bei Viterbi–Entscheidung 31

2 Vorbereitungsfragen 33
V1 Bitfehlerwahrscheinlichkeit 33
V2 Gaußförmiges Empfangsfilter 35
V3 Entscheidungsrückkopplung 37
V4 Korrelationsempfänger 39
V5 Viterbi–Empfänger 41

3 Versuchsdurchführung 43
D1 Nyquistkriterien 43
D2 Nyquistfilter beim AWGN–Kanal 45
D3 Nyquistentzerrung 47
D4 Gaußförmiger Impulsformer 49
D5 Entscheidungsrückkopplung 51
D6 Entscheidungsrückkopplung mit RC–Tiefpaß 53
D7 Korrelationsempfänger 54
D8 Viterbi–Empfänger 57
D9 Auswahl der Symbolfolge beim Viterbi–Empfänger 59
D10 Vergleich der Fehlerwahrscheinlichkeiten 61

4 Musterlösungen der Vorbereitungsfragen 63

5 Musterlösungen der Versuchsdurchführung 67

Anhang: Tabellen der Fehlerfunktionen 75

Literaturverzeichnis

Die nachfolgende Liste enthält einige Fachbücher und Aufsätze, die die hier behandelte Thematik zum Inhalt haben und empfohlen werden können. Für eine erfolgreiche Versuchsdurchführung werden sie jedoch nicht unbedingt benötigt.

[1] Antreich, K.: *Mathematische Methoden der Informationstechnik*. Vorlesungsmanuskript, Lehrstuhl für Rechnergestütztes Entwerfen, Technische Universität München, 1991.

[2] Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.: *Taschenbuch der Mathematik*. 25. Auflage. Frankfurt: Harry Deutsch, 1991.

[3] Hänsler, E.: *Statistische Signale*. Berlin: Springer, 1991.

[4] Haykin, S.: *Digital Communications*. New York: John Wiley & Sons, 1988.

[5] Hagenauer, J.: *Nachrichtentechnik 1*. Vorlesungsmanuskript, Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Technische Universität München, 1998.

[6] Hagenauer, J.: *Nachrichtentechnik 2*. Vorlesungsmanuskript, Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Technische Universität München, 1998.

[7] Hauske, G.: *Statistische Methoden der Nachrichtentechnik*. Vorlesungsmanuskript. Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Technische Universität München, 1996.

[8] Huber, J.: *Detektoren und Optimalfilter für Digitalsignale mit Impulsinterferenzen, Teil I: Optimaldetektion und Whitened Matched Filter, Teil II: Suboptimale Filter*. In: Frequenz 41 (1987), S. 161–167 und S. 189–196.

[9] Huber, J.: *Trelliscodierung – Grundlagen und Anwendungen in der digitalen Übertragungstechnik*. Berlin: Springer, 1992.

[10] Kammeyer, K.D.: *Nachrichtenübertragung*. Stuttgart: B.G. Teubner, 1992.

[11] Lüke, H.D.: *Korrelationssignale*. Berlin: Springer, 1992.

[12] Marko, H.: *Methoden der Systemtheorie*. 3. Auflage. Berlin: Springer, 1982.

[13] Nyquist, H.: *Certain Topics in Telegraph Transmission Theory*. In: Trans. AIEE Commun. and Electronics. Vol. 47 (1928), S. 617–644.

[14] Papoulis, A.: *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. 2. Auflage. New York: McGraw–Hill, 1985.

[15] Peters, U.: *Empfangsstrategien für die Digitalsignalübertragung im Basisband*. Dissertation, Hochschule der Bundeswehr München, 1983.

[16] Proakis, J.G.: *Digital Communications*. 2. Auflage. New York: McGraw–Hill, 1989.

[17] Söder, G.: *Modellierung, Simulation und Optimierung von Nachrichtensystemen*. Berlin: Springer, 1993.

[18] Söder, G.: *Simulationmethoden in der Nachrichtentechnik*. Praktikumsanleitung, Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Technische Universität München, 1999.

[19] Söder, G.; Tröndle, K.: *Digitale Übertragungssysteme* – Theorie, Optimierung und Dimensionierung der Basisbandsysteme. Berlin: Springer, 1985.

[20] Viterbi, A.J.; Omura, J.K.: *Principles of Digital Communication and Coding*. New York: McGraw–Hill, 1979.

[21] Wellhausen, H.W.: *Dämpfung, Phase und Laufzeiten bei Weitverkehrs–Koaxialpaaren*. In: Frequenz 31 (1977), S. 23–28.

1 Theoretische Grundlagen

Inhalt: Zentrales Thema dieses Versuchs ist die Beeinträchtigung der Digitalsignalübertragung aufgrund linearer Kanalverzerrungen, die zu Impulsinterferenzen führen. Weiterhin werden nachfolgend die wichtigsten Verfahren angegeben, die es ermöglichen, die auf dem Kanal entstandenen Amplituden– und Phasenverzerrungen zu korrigieren (*"Entzerrung"*). Soll zur Detektion wieder der im Versuch *"Digitale Modulationsverfahren"* ausführlich beschriebene Schwellenwertentscheider eingesetzt werden, so kann man zur Entzerrung ein lineares Filter verwenden. Damit verbunden ist dann allerdings eine (oft gravierende) Erhöhung der Störleistung am Entscheider. Bessere Detektionsergebnisse erzielt man mit aufwendigeren Entscheidungsstrategien, von denen in dieser Anleitung die Entscheidungsrückkopplung sowie der Korrelations– und der Viterbi–Empfänger beispielhaft betrachtet werden. Diese nichtlinearen, kombinierten Entzerrungs– und Entscheidungsverfahren führen im Gegensatz zur linearen Entzerrung nicht bzw. nur zu einer unwesentlichen Erhöhung der Detektionsstörleistung.

1.1 Impulsinterferenzen

Unter *Impulsinterferenz* (engl.: *Intersymbol Interference*) versteht man die Beeinträchtigung einer Symbolentscheidung aufgrund der Impulsverbreiterung (*"Zeitdispersion"*) und damit verbunden eine Abhängigkeit der Bitfehlerwahrscheinlichkeit von den Nachbarsymbolen. Im folgenden wird dies am Beispiel der Basisbandübertragung erläutert. Die Auswirkungen von Impulsinterferenzen auf ASK– und PSK–Systeme lassen sich in gleicher Weise beschreiben, wenn man auf deren Basisbandmodelle übergeht.

1.1.1 Betrachtetes Übertragungssystem

Bild 1.1 zeigt das für diesen Versuch zugrundeliegende Blockschaltbild. Beispielhafte Signalverläufe, gültig für eine binäre bipolare (manchmal auch als antipodisch bezeichnet) Übertragung, sind in Bild 1.2 dargestellt. Eine ausführliche Beschreibung der Basisbandübertragung finden Sie im Abschnitt 1.1.1 des Versuchs *"Digitale Modulationsverfahren"* sowie im Kapitel 14.1 des Praktikums *"Simulationsmethoden in der Nachrichtentechnik"*.

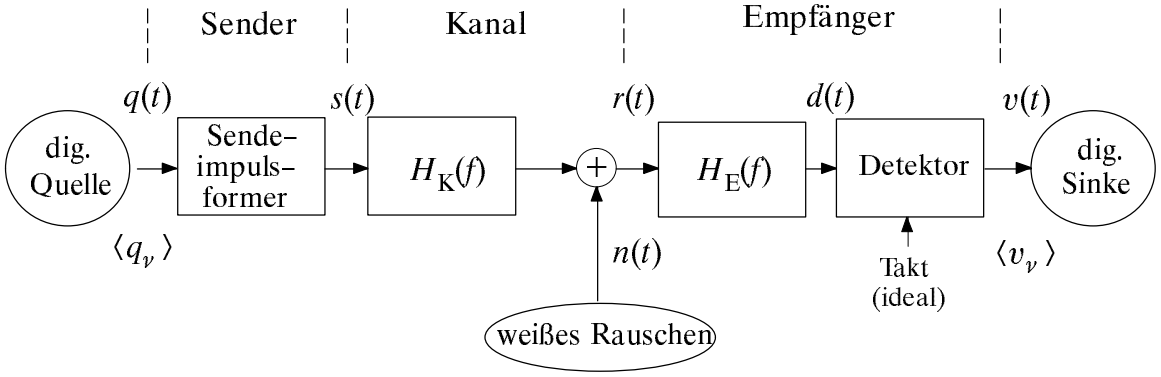


Bild 1.1: Betrachtetes Basisbandübertragungssystem.

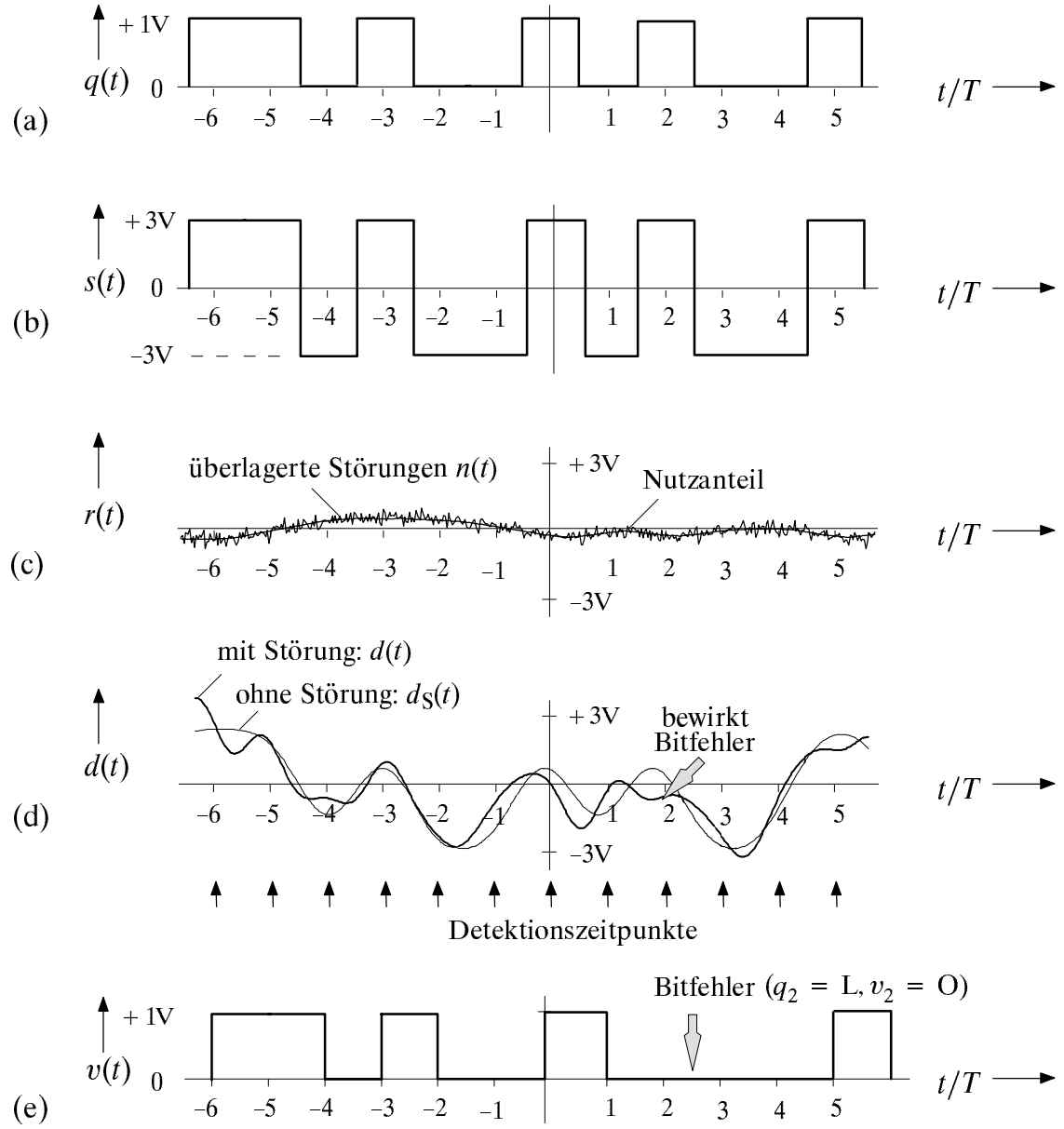


Bild 1.2: Beispiel der Signalverläufe bei binärer bipolarer redundanzfreier Basisbandübertragung über ein Koaxialkabel, Detektion mit Schwellenwertentscheider.

Sendesignal, Empfangssignal und Detektionssignal lassen sich wie folgt beschreiben:

$$s(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot g_s(t - \nu \cdot T) \,, \tag{1.1}$$

$$r(t) = k(t) + n(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot g_r(t - \nu \cdot T) + n(t) \,, \tag{1.2}$$

$$d(t) = d_S(t) + d_N(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot g_d(t - \nu \cdot T) + d_N(t) \,. \tag{1.3}$$

Hierbei bezeichnet $g_s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; G_s(f)$ den Sendegrundimpuls und T die Symboldauer (bei Binärsystemen ist $T = T_B$); $a_\nu \in \{-1, +1\}$ sind dimensionslose Amplitudenkoeffizienten.

Bei der Übertragung über den Kanal (Übertragungsmedium) wird das Signal $s(t)$ i.a. verzerrt und von (additiven) Störungen $n(t)$ überlagert. Für das Folgende wird stets von "gaußverteilten und weißen" Störungen ausgegangen, d.h. die WDF $f_n(n)$ ist gaußisch und die (zweiseitige) Rauschleistungsdichte $\Phi_n(f) = N_0/2$ konstant.

Der Empfangsgrundimpuls ergibt sich bei linearem und zeitinvariantem Kanal aus der Faltung des Sendegrundimpulses $g_s(t)$ mit der Kanalimpulsantwort $h_K(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, H_K(f)$: $g_r(t) = g_s(t) * h_K(t)$. Für Bild 1.2 ist ein rechteckiger Sendegrundimpuls (Amplitude s_0, Dauer T) und als Kanal ein Koaxialkabel mit folgenden Eigenschaften zugrundegelegt:

$$H_K(f) = \exp\left(-a_K \cdot \sqrt{\frac{f}{f_B/2}}\right) \cdot \exp\left(-j \cdot a_K \cdot \sqrt{\frac{f}{f_B/2}}\right), \tag{1.4}$$

$$h_K(t) = \frac{a_K/2}{\pi \cdot \sqrt{2 \cdot f_B \cdot t^3}} \cdot \exp\left(-\frac{a_K^2}{2\pi \cdot f_B \cdot t}\right) \quad \text{für } t \geq 0 . \tag{1.5}$$

$|H_K(f)|$ ist hier aufgrund des Skineffekts stark monoton abfallend. Die Konstante a_K (in Np einzusetzen) ist die Dämpfung bei der halben Bitfrequenz $f_B/2 = 1/(2T)$. Das in Bild 1.2c dargestellte Empfangssignal $r(t)$ gilt für ein Koaxialkabel mit der relativ geringen Kabeldämpfung $a_K = 4.6$ Np (entsprechend 40 dB). Dieses Bild zeigt, daß die Verzerrungen bereits bei diesem, noch relativ günstigen Kanal so stark sind, daß die gesendete Symbolfolge auch bei Vernachlässigung der Störungen $n(t)$ nicht mehr zu erkennen ist.

Da am Empfängereingang das Auge bereits geschlossen ist, eignet sich ein tiefpaßartiges Empfangsfilter (z.B. Matched–Filter) nicht. Vielmehr muß hier das Empfangsfilter den Kanal in einem weiten Frequenzbereich entzerren (was z.B. durch den inversen Frequenzgang zu $H_K(f)$ möglich ist), bevor bei höheren Frequenzen wegen der notwendigen Rauschleistungsbegrenzung ein Abfall von $H_E(f)$ erfolgen muß. Aus Bild 1.2(d) ist zu erkennen, daß das entzerrte Signal $d(t)$ – im Gegensatz zu $r(t)$ – mittels eines Schwellenwertentscheiders (Schwellenwert $E = 0$, Detektionszeitpunkt $T_D = 0$) detektierbar ist.

Wie das Empfangssignal $r(t)$ setzt sich auch das Detektionssignal $d(t)$ aus einem Nutzanteil und einem Störanteil zusammen. Die beiden Indizes "S" und "N" in Gl. (1.3) stehen hierbei für "Signal" und "Noise". Ist das Rauschsignal $n(t)$ am Empfängereingang gaußverteilt, so ist das Detektionsstörsignal $d_N(t)$ ebenfalls gaußverteilt. Für die Leistung dieses unerwünschten, störenden Anteils gilt bei den hier getroffenen Voraussetzungen:

$$\sigma_d^2 = \overline{d_N(t)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(f) \cdot |H_E(f)|^2 \, df = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_E(f)|^2 \, df . \tag{1.6}$$

Wie aus (1.3) weiter hervorgeht, läßt sich der Nutzanteil $d_S(t)$ des Detektionssignals als Summe gewichteter und jeweils um eine Symboldauer T verschobener Grundimpulse $g_d(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G_d(f)$ darstellen:

$$g_d(t) = g_r(t) * h_E(t) = g_s(t) * h_K(t) * h_E(t) . \tag{1.7}$$

Aufgrund der Entzerrung ist $g_d(t)$ deutlich schmaler als der Empfangsgrundimpuls $g_r(t)$, aufgrund der Rauschleistungsbegrenzung aber breiter als der Sendegrundimpuls $g_s(t)$.

1.1.2 Mittlere und ungünstigste Fehlerwahrscheinlichkeit

Solange die Störungen und Kanalverzerrungen einen gewissen Grenzwert nicht überschreiten, ist das entschiedene Symbol (Sinkensymbol) v_ν mit dem Quellensymbol q_ν identisch. Ist dagegen $v_\nu \neq q_\nu$, so spricht man von einem Symbolfehler (allgemein) oder von einem Bitfehler (bei den im weiteren ausschließlich betrachteten Binärsystemen).

Im Beispiel von Bild 1.2 ist zum Zeitpunkt $t = 2 \cdot T$ ein solcher Bitfehler zu erkennen. Dieser ist darauf zurückzuführen, daß aufgrund der Kanalverzerrungen und –störungen das Detektionssignal $d(t)$ den Schwellenwert $E = 0$ fälschlicherweise unterschreitet, und somit das Quellensymbol q_2 = "L" als das Symbol v_2 = "O" entschieden wird (vgl. Signalverläufe in den Bildern 1.2(a), (d) und (e)).

Das wichtigste Gütekriterium eines binären Übertragungssystems ist die (mittlere) Bitfehlerwahrscheinlichkeit (vgl. "*Digitale Modulationsverfahren*", Abschnitt 1.1.2):

$$p_\mathrm{B} = \mathrm{E}[p(v_\nu \neq q_\nu)] = \overline{p(v_\nu \neq q_\nu)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{\nu=-N}^{N} p(v_\nu \neq q_\nu)\,. \tag{1.8}$$

Bei einem optimalen System mit AWGN–Kanal und Matched–Filter ist die Berechnung von p_B recht einfach. In diesem Sonderfall sind alle Verfälschungswahrscheinlichkeiten $p(v_\nu \neq q_\nu)$ gleich, und es kann auf die aufwendige Zeitmittelung in (1.8) verzichtet werden. Mit dem Grundimpuls $g_d(t)$ und dem Störeffektivwert σ_d erhält man:

$$p_\mathrm{B} = \mathrm{Q}\Big(\frac{g_d(0)}{\sigma_d}\Big) \quad \text{mit Q}(x) \text{ entsprechend den Tabellen im Anhang.} \tag{1.9}$$

Ein Optimalsystem zeichnet sich dadurch aus, daß die Detektion eines Symbols nicht von den benachbarten Impulsen beeinflußt wird. Man spricht dann auch von einem impulsinterferenzfreien System bzw. von einem *Nyquistsystem* (vgl. Abschnitt 1.2.2).

Im betrachteten Beispiel ist diese Voraussetzung nicht gegeben. Vielmehr sind hier die Detektionsnutzabtastwerte $d_\mathrm{S}(\nu \cdot T)$ zu den verschiedenen Detektionszeitpunkten aufgrund des verzerrenden, zeitdispersiven Kanals unterschiedlich. In diesem Fall kann die Berechnung von p_B nach (1.8) sehr aufwendig sein, selbst beim einfachsten Fall gaußverteilter Störungen. Eine Vereinfachung ergibt sich, wenn man von der Zeitmittelung auf eine Scharmittelung übergeht. Ein geeignetes Hilfsmittel hierfür ist das Augendiagramm.

Das Augendiagramm ist die Summe aller übereinander gezeichneter Ausschnitte eines (eventuell verzerrten und gestörten) Digitalsignals, deren Dauer ein ganzzahliges Vielfaches der Symboldauer T beträgt. Dieses Diagramm hat eine gewisse Ähnlichkeit mit einem menschlichen Auge, was zu seiner Namensgebung geführt hat. Es kann z.B. auf einem Oszilloskop dargestellt werden, das mit dem Taktsignal getriggert wird.

In Bild 1.3(b) und (c) sind zwei solche Augendiagramme für das Signal von Bild 1.3(a) dargestellt. Bild (b) zeigt das Augendiagramm mit Störungen, während für Bild (c) nur der Nutzanteil $d_\mathrm{S}(t)$ berücksichtigt ist. Zur Bestimmung der Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_B ist das Augendiagramm ohne Störungen besser geeignet. Natürlich kann dieses nicht am Oszilloskop dargestellt, sondern nur mittels einer Rechnersimulation erzeugt werden.

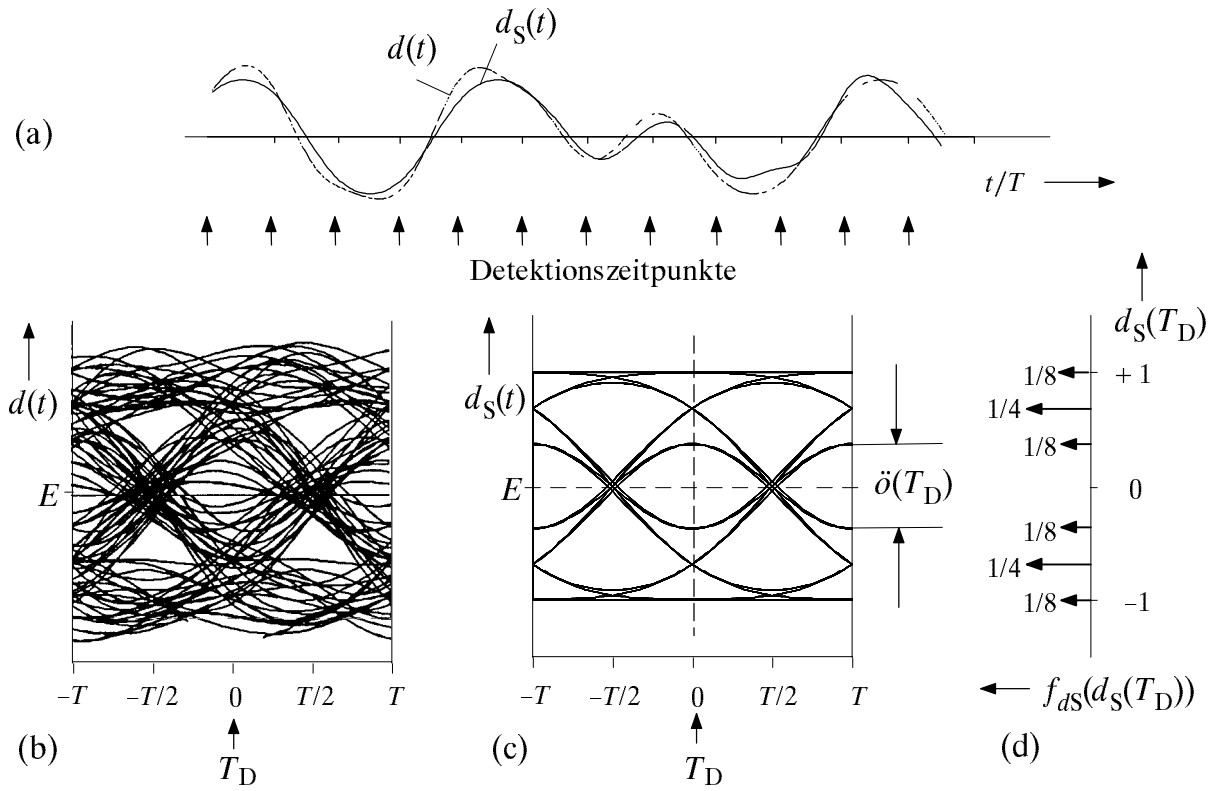


Bild 1.3: Zur Verdeutlichung der Augendiagramme anhand des Detektionssignals:
(a) Ausschnitt aus dem Detektionssignal bei gaußähnlichem Impuls,
(b) Augendiagramm mit Störungen (Signal d(t)),
(c) Augendiagramm ohne Störungen (Signal $d_S(t)$),
(d) WDF der Detektionsnutzabtastwerte $d_S(T_D)$ für $T_D = 0$.

Wie aus Bild 1.3(c) ersichtlich ist, sind im Augendiagramm ohne Störungen nur endlich viele Augenlinien zu unterscheiden. Diese Eigenschaft kann bei der Berechnung der Bitfehlerwahrscheinlichkeit ausgenutzt werden: Dazu bestimmt man für jede Augenlinie den Abstand $|d_S(T_D)|$ zur Entscheiderschwelle $E = 0$ zum Detektionszeitpunkt T_D, daraus zusammen mit der Streuung σ_d des Störanteils $d_N(t)$ und der im Anhang tabellierten komplementären Gaußschen Fehlerfunktion Q(x) die jeweilige Überschreitungswahrscheinlichkeit $Q(|d_S(T_D)|/\sigma_d)$ und mittelt schließlich über alle Augenlinien.

Diese Berechnungsvorschrift läßt sich durch die Einführung der WDF der Detektionsnutzabtastwerte $d_S(T_D)$ formalisieren. Da ohne Berücksichtigung des Störanteils nur endlich viele Augenlinien auftreten, ist $d_S(T_D)$ eine diskrete Zufallsgröße, deren WDF aus einer Summe gewichteter Diracfunktionen besteht.

In Bild 1.3(d) ist die WDF der Detektionsnutzabtastwerte $d_S(T_D)$ für das Augendiagramm von Bild (c) und den Detektionszeitpunkt $T_D = 0$ dargestellt. Es zeigt, daß sich im vorliegenden Fall die diskrete WDF aus sechs Diracfunktionen zusammensetzt, deren Gewichte die Auftrittshäufigkeiten der jeweiligen Werte angeben. Berücksichtigt man noch die Symmetrie zur Entscheiderschwelle $E = 0$, so kann man p_B als Summe über drei Überschreitungswahrscheinlichkeiten berechnen (vgl. Vorbereitungsfrage V1).

Es ist offensichtlich, daß durch den Übergang von der Zeitmittelung entsprechend (1.8) auf die Scharmittelung über alle unterscheidbaren Augenlinien die Rechenzeit zur Fehlerwahrscheinlichkeitsbestimmung drastisch verringert wird. Trotzdem kann manchmal die Berechnung von p_B noch sehr aufwendig sein. Man verwendet deshalb oft als Näherung die bereits im Abschnitt 1.1.3 des letzten Versuchs eingeführte ungünstigste Fehlerwahrscheinlichkeit (*"worst case"*), für deren Berechnung nur die jeweils ungünstigsten Symbolfolgen berücksichtigt werden. Das heißt, daß hier die tatsächliche WDF der Nutzabtastwerte $d_S(T_D)$ gemäß Bild 1.3(d) durch eine vereinfachte WDF mit nur den zwei inneren Diracfunktionen (jeweils mit dem Gewicht 1/2) ersetzt wird. Mit der in Bild (c) eingezeichneten vertikalen Augenöffnung $\ddot{o}(T_D)$ zum Detektionszeitpunkt T_D gilt:

$$p_U = Q\left(\frac{\ddot{o}(T_D)/2}{\sigma_d}\right) . \tag{1.10}$$

Diese Gleichung gilt nur unter der Voraussetzung von gaußverteilten Störungen und einem optimalen Schwellenwert E_{opt}. Liegt die Entscheiderschwelle nicht in Augenmitte, so ist in Gl. (1.10) anstelle von $\ddot{o}(T_D)/2$ der minimale Abstand einer Augenlinie von der Entscheiderschwelle E einzusetzen.

Die Näherung p_U geht davon aus, daß alle Folgen mit der gleichen, nämlich der maximalen Fehlerwahrscheinlichkeit verfälscht werden, so daß p_U eine obere Schranke für die mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_B darstellt ($p_U \geq p_B$). Das Gleichheitszeichen gilt hierbei nur für Nyquistsysteme (vgl. Abschnitt 1.2.2).

Bei einem redundanzfreien Binärsystem wird das Augendiagramm (ohne Störungen) allein durch den Detektionsgrundimpuls $g_d(t)$ bestimmt. Je breiter $g_d(t)$ ist, um so mehr Linien sind im Augendiagramm zu unterscheiden und um so mehr Nachbarimpulse beeinflussen die Detektion eines Symbols. Diese Beeinflussung einer Symbolentscheidung durch die anklingenden Flanken der nachfolgenden Impulse (*"Vorläufer"*) und/oder die abklingenden Flanken der vorangegangenen Impulse (*"Nachläufer"*) bezeichnet man als Impulsinterferenzen (*"Intersymbol Interference"*).

Im folgenden betrachten wir das Augendiagramm zum Detektionszeitpunkt T_D und setzen voraus, daß der Detektionsgrundimpuls $g_d(t)$ genau v Vorläufer und n Nachläufer aufweist. Darunter versteht man, daß von den äquidistanten Abtastwerten zu den Detektionszeitpunkten nur $g_d(T_D - v \cdot T)$, ... ,$g_d(T_D - T), g_d(T_D)$, $g_d(T_D + T)$, ... , $g_d(T_D + n \cdot T)$ zu berücksichtigen sind, während alle anderen Abtastwerte vernachlässigt werden können. Bei den in Bild 1.3 dargestellten Augendiagrammen gilt beispielsweise $n = v = 1$.

Mit dieser Voraussetzung kann der Nutzabtastwert $d_S(T_D)$ maximal 2^{n+v+1} verschiedene Werte annehmen. Ist $g_d(t)$ symmetrisch, so schneiden sich mehrere Augenlinien zum Detektionszeitpunkt $T_D = 0$ und die WDF besteht aus weniger als 2^{n+v+1} Diracfunktionen. Die vertikale Augenöffnung gibt den Abstand der beiden inneren Augenlinien an und kann bei redundanzfreien bipolaren Binärsystemen wie folgt berechnet werden:

$$\ddot{o}(T_D) = 2 \cdot \left[g_d(T_D) - \sum_{\nu=1}^{n} |g_d(T_D + \nu \cdot T)| - \sum_{\nu=1}^{v} |g_d(T_D - \nu \cdot T)| \right] . \tag{1.11}$$

Die Betragsbildung ist notwendig, da für die Berechnung der Augenöffnung stets vom ungünstigsten Fall ausgegangen werden muß. Das bedeutet: Ist der erste Nachläufer positiv, so wird die Detektion des Amplitudenkoeffizienten a_ν durch $a_{\nu-1} \neq a_\nu$ beeinträchtigt. Dagegen wirkt sich bei gleichem Grundimpuls ein Koeffizient $a_{\nu-1} = a_\nu$ positiv aus. Das heißt, daß hier die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung des Koeffizienten a_ν durch die Impulsinterferenzen sogar kleiner wird. Entsprechendes gilt für die Vorläufer.

Alle anderen Symbole, die nicht zu inneren Augenlinien gehören, haben eine (u.U. sehr viel) kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit als p_U, so daß die mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_B bei Vorhandensein von Impulsinterferenzen stets kleiner als p_U ist.

Häufig wird anstelle von p_U das ungünstigste Signalstörleistungsverhältnis

$$\varrho_\mathrm{U} = \left(\frac{\ddot{o}(T_\mathrm{D})/2}{\sigma_d}\right)^2 \tag{1.12}$$

als Optimierungskriterium herangezogen. Zwischen diesen beiden Größen besteht ein fester Zusammenhang über die Gaußsche Fehlerfunktion:

$$p_\mathrm{U} = \mathrm{Q}(\sqrt{\varrho_\mathrm{U}}) \; . \tag{1.13}$$

Beispielsweise gehört zu $p_\mathrm{U} = 10^{-3}$ der Signalrauschabstand $10 \cdot \lg(\varrho_\mathrm{U}) \approx 9.75$ dB. ϱ_U ist eine untere Schranke für das *mittlere Signalstörleistungsverhältnis am Entscheider*:

$$\varrho_d = [\mathrm{Q}^{-1}(p_\mathrm{B})]^2 \; . \tag{1.14}$$

Diese Größe ist zwar bei einem System mit Impulsinterferenzen – im Gegensatz zu einem Nyquistsystem – nicht meßbar und physikalisch interpretierbar, für einen Systemvergleich aber trotzdem sehr hilfreich (siehe nachfolgendes Beispiel und Vorbereitungsfrage V1).

Beispiel: Obige Größen sollen nun am Zahlenbeispiel von Tabelle 1.1 verdeutlicht werden. Weitere Interpretationen zu diesen Simulationsergebnissen finden Sie in V2.

Man erkennt, daß p_U eine um so bessere Näherung für p_B (ebenso ϱ_U für ϱ_d) darstellt, je größer die Grenzfrequenz f_E des Gaußfilters gewählt wird, d.h. je geringer die Impulsinterferenzen sind. Die optimale Grenzfrequenz $f_{\mathrm{E,opt}} \approx 0.8/T$ ist näherungsweise gleich, unabhängig davon, ob man p_U oder p_B als Optimierungskriterium heranzieht.

Tabelle 1.1: Simulationsergebnisse für ein Binärsystem, AWGN–Kanal ($E_\mathrm{B}/N_0 = 10\,\mathrm{dB}$), gaußförmiges Empfangsfilter (Grenzfrequenz f_E), Schwellenwertentscheider

$f_\mathrm{E} \cdot T$	$\ddot{o}(T_\mathrm{D})$	σ_d	p_B	$10 \cdot \lg(\varrho_d)$	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_\mathrm{U})$
0.2	0	0.119	$1.2 \cdot 10^{-1}$	1.31 dB	$5.0 \cdot 10^{-1}$	$-\infty$
0.4	0.735	0.168	$3.5 \cdot 10^{-3}$	8.63 dB	$1.4 \cdot 10^{-2}$	6.80 dB
0.6	1.469	0.206	$5.2 \cdot 10^{-5}$	11.78 dB	$1.8 \cdot 10^{-4}$	11.04 dB
0.8	1.819	0.238	$3.5 \cdot 10^{-5}$	12.00 dB	$6.6 \cdot 10^{-5}$	11.65 dB
1.0	1.951	0.266	$1.0 \cdot 10^{-4}$	11.39 dB	$1.2 \cdot 10^{-4}$	11.29 dB
1.2	1.989	0.291	$3.1 \cdot 10^{-4}$	10.69 dB	$3.2 \cdot 10^{-4}$	10.67 dB

1.2 Lineare Entzerrung

Bei verzerrungsfreiem Kanal besteht der optimale Empfänger aus einem (an den Sendegrundimpuls $g_s(t)$ angepaßten) Matched–Filter in Kombination mit einem Schwellenwertentscheider. Bei leitungsgebundener Übertragung, die oft durch den Kanalfrequenzgang (1.4) und die Impulsantwort (1.5) beschrieben werden kann, erstreckt sich jedoch bereits der Empfangsgrundimpuls $g_r(t) = g_s(t) * h_K(t)$ über sehr viele Symbole (*Zeitdispersion*) und das Auge ist aufgrund der gravierenden Impulsinterferenzen geschlossen. Würde man hier beim Empfänger ein Matched–Filter verwenden (das nun allerdings nicht an den Sendegrundimpuls, sondern den Empfangsgrundimpuls angepaßt sein müßte), so würden die Impulsinterferenzen noch weiter verstärkt. Das bedeutet, daß dann der Detektionsgrundimpuls $g_d(t)$, der ja bei einem Matched–Filter proportional zu $g_r(t) * g_r(-t)$ ist, in etwa doppelt so lange als der Empfangsgrundimpuls $g_r(t)$ wäre und damit das Auge "noch weiter geschlossen" würde. Die resultierende Fehlerwahrscheinlichkeit wäre bei diesem Empfängerkonzept nicht akzeptabel.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß durch ein – geeignet dimensioniertes – Empfangsfilter die auf dem Kanal entstandenen linearen Verzerrungen zumindest so weit kompensiert werden können, daß ein Schwellenwertentscheider das Detektionssignal $d(t)$ mit hinreichend kleiner Fehlerwahrscheinlichkeit detektieren kann.

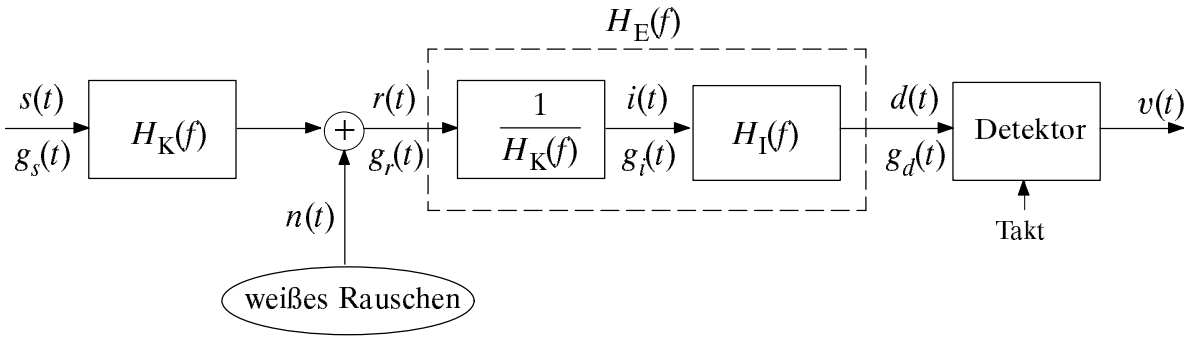
1.2.1 Ideale Entzerrung und Impulsformer

Grund für die Impulsverbreiterung durch den Übertragungskanal sind Amplituden– und Phasenverzerrungen. Sowohl die Dämpfung $a(f)$ als auch die Phase $b(f)$ verlaufen bei koaxialem Übertragungskanal, physikalisch bedingt durch den Skineffekt, $\sqrt{f}$–förmig. Voraussetzung für einen verzerrungsfreien Kanal wäre dagegen ein konstanter Dämpfungsverlauf $a(f)$ und ein linear mit f ansteigender Phasenverlauf $b(f)$, wobei gilt:

$$H_K(f) = e^{-a(f)} \cdot e^{-j \cdot b(f)} . \tag{1.15}$$

Durch geeignete Dimensionierung des Empfangsfilters können die Amplituden– und Phasenverzerrungen des Kanals merklich vermindert werden. Bei Abwesenheit von Störungen (d.h. falls $n(t) = 0$) könnte man beispielsweise $H_E(f) = 1/H_K(f)$ wählen. Das Ausgangssignal $i(t)$ dieses idealen Entzerrers wäre in diesem Fall identisch mit dem Sendesignal $s(t)$ und wie dieses z.B. ideal rechteckförmig (vgl. Bild 1.4). Die Frequenzanteile, die auf dem Kanal einer besonders großen Dämpfung unterliegen, werden durch dieses – möglicherweise nicht realisierbare – Empfangsfilter so weit angehoben, daß $H_K(f) \cdot H_E(f) = 1$ gilt.

Bei leitungsgebundener Übertragung fällt $|H_K(f)|$ mit wachsender Frequenz monoton ab. Dementsprechend wächst bei idealer Entzerrung $|H_E(f)|$ monoton an, was zur Folge hat, daß bei weißem Rauschen $n(t)$ am Empfängereingang die Rauschleistung σ_d^2 nach dem idealen Entzerrer entsprechend (1.6) unendlich groß ist. Um diese Varianz zu begrenzen, ist deshalb ein zusätzlicher Tiefpaß erforderlich.



Sendegrundimpuls $g_s(t)$: z.B. rechteckförmig;

Empfangsgrundimpuls $g_r(t)$: extrem breit;

Grundimpuls $g_i(t)$: wie $g_s(t)$, z.B. rechteckförmig;

Detektionsgrundimpuls $g_d(t)$: breiter als $g_s(t)$ und $g_i(t)$, aber schmaler als $g_r(t)$.

Bild 1.4: Zur Verdeutlichung des idealen Entzerrers und des Impulsformers.

Bild 1.4 zeigt das Blockschaltbild eines möglichen Digitalempfängers bei Vorhandensein von Impulsinterferenzen. Das Empfangsfilter mit dem bandpaßähnlichen Frequenzgang $H_E(f)$ setzt sich – zumindest gedanklich – aus dem idealen Entzerrer $1/H_K(f)$ und dem Tiefpaß $H_I(f)$ zur Rauschbegrenzung zusammen. Für den Gesamtfrequenzgang gilt:

$$H_{KE}(f) = H_K(f) \cdot \frac{1}{H_K(f)} \cdot H_I(f) = H_I(f) \ . \tag{1.16}$$

Aufgrund dieser Eigenschaft wird das zeitdispersive Verhalten von Kanal und Empfangsfilter allein durch den sogenannten Impulsformer–Frequenzgang $H_I(f) \bullet\!\!-\!\!\circ h_I(t)$ bestimmt. Beispielsweise gilt für den Detektionsgrundimpuls:

$$g_d(t) = g_s(t) * h_I(t) \ . \tag{1.17}$$

Wählt man z.B. einen gaußförmigen Impulsformer mit dem Frequenzgang

$$H_I(f) = \mathrm{e}^{-\pi(\frac{f}{2f_I})^2} \ , \tag{1.18}$$

dessen Verlauf durch die Grenzfrequenz f_I vollständig bestimmt ist, so ergibt sich genau die in Tabelle 1.1 (für den AWGN–Kanal) angegebene Augenöffnung, und zwar unabhängig vom betrachteten Kanalfrequenzgang $H_K(f)$. Dieser wirkt sich lediglich auf die Größe der Störungen am Entscheider aus. Für die Detektionsstörleistung gilt nun:

$$\sigma_d^2 = \overline{d_N(t)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(f) \cdot |H_E(f)|^2 \, \mathrm{d}f = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|H_I(f)|^2}{|H_K(f)|^2} \, \mathrm{d}f \ . \tag{1.19}$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, daß der Impulsformer $|H_I(f)|$ – zumindest ab einer bestimmten Frequenz – schneller abfallen muß als $1/|H_K(f)|$ ansteigt. In der Versuchsdurchführung D3 wird gezeigt, daß es für jeden Kanal $H_K(f)$ eine optimale Grenzfrequenz $f_{I,opt}$ gibt, die die Fehlerwahrscheinlichkeit mimimiert.

1.2.2 Nyquistentzerrung

Erfolgt die Symoboldetektion, wie für diesen Abschnitt 1.2 stets vorausgesetzt, mit einem einfachen Schwellenwertentscheider, so ist es im Hinblick auf eine möglichst geringe Fehlerwahrscheinlichkeit am günstigsten, durch eine geeignete Dimensionierung von $H_E(f)$ die Impulsinterferenzen vollständig zu beseitigen. Diese Art der Impulsformung bezeichnet man in der Literatur als *"Nyquistentzerrung"*.

Der im letzten Abschnitt beschriebene *"ideale Entzerrer"* erfüllt diese Bedingung, doch ist dieser aufgrund seines Rauschverhaltens denkbar ungeeignet. Berücksichtigt man jedoch, daß das Sendesignal nicht vollständig entzerrt werden muß, sondern (unter der Voraussetzung $T_D = 0$) nur zu den Detektionszeitpunkten $\nu \cdot T$, so lautet die entsprechende Bedingung im Zeitbereich:

$$g_d(\nu \cdot T) = 0 \qquad \text{für} \quad \nu = \pm 1, \pm 2 \text{ usw.} \tag{1.20}$$

Zu den Detektionszeitpunkten $\nu \cdot T$ ist somit das Detektionsnutzsignal $d_S(\nu \cdot T) = \pm g_0$, wobei $g_0 = g_d(0)$ wieder den Hauptwert des Detektionsgrundimpulses angibt. Aufgrund der äquidistanten Nulldurchgänge von $g_d(t)$ ist die vertikale Augenöffnung gemäß (1.11) maximal (vgl. Bild 1.5): $\ddot{o}(T_D) = 2 \cdot g_0$. Daraus folgt für die mittlere und die ungünstigste Fehlerwahrscheinlichkeit:

$$p_B = p_U = Q\left(\frac{g_0}{\sigma_d}\right) . \tag{1.21}$$

Hierbei sind wieder Gaußsche Störungen und optimale Schwellenwerte vorausgesetzt.

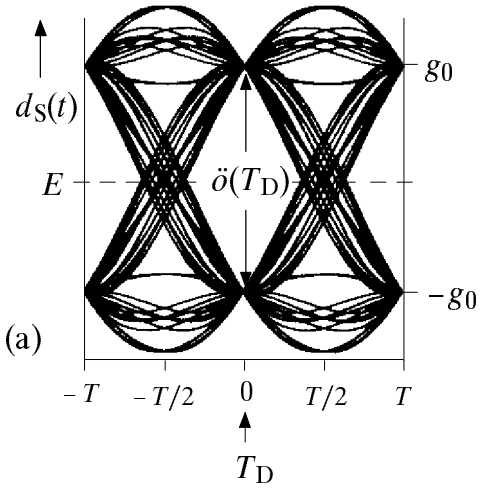


Bild 1.5: Augendiagramm bei Nyquistentzerrung mit r = 0.5 gemäß Bild 1.6(b).

Formuliert man die Bedingung (1.20) im Frequenzbereich, so erhält man für das Spektrum $G_d(f) = G_s(f) \cdot H_K(f) \cdot H_E(f)$ des Detektionsgrundimpulses:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_d\left(f - \frac{k}{T}\right) = \text{const.} . \tag{1.22}$$

Diese Bedingung wurde von Nyquist [13] im Jahre 1928 angegeben und wird häufig als das erste Nyquistkriterium bezeichnet.

Dieses besagt, daß äquidistante Nulldurchgänge des Grundimpulses $g_d(t)$ im Symbolabstand T nur dann möglich sind, wenn die mit der (Frequenz–)Periode $f_P = 1/T$ periodische Fortsetzung $P\{G_d(f)\}$ des dazugehörigen Spektrums einen konstanten Wert ergibt.

Besondere Bedeutung für die Digitalsignalübertragung besitzen Nyquistspektren, die auf den Frequenzbereich $|f| \le 1/T$ beschränkt und zusammenhängend sind. Durch diese Beschränkung überlappen sich bei der periodischen Fortsetzung lediglich benachbarte Frequenzbereiche, so daß man für reelle Funktionen das erste Nyquistkriterium mit der Nyquistfrequenz $f_N = 1/(2 \cdot T)$ und der Bedingung $|f| < f_N$ wie folgt vereinfachen kann:

$$G_d(f_N - f) + G_d(f_N + f) = G_d(0) = \text{const.} \tag{1.23}$$

Ein reelles Nyquistspektrum nach dem 1. Kriterium ist demnach stets punktsymmetrisch um die Nyquistfrequenz f_N. Bild 1.6 zeigt drei mögliche Spektren $G_d(f)$ mit oben genannten Nyquisteigenschaften, wobei die Symmetriepunkte um $\pm f_N$ hervorgehoben sind.

Alle diese Spektren lassen sich durch einen "Cosinus–Rolloff–Tiefpaß" gemeinsam beschreiben, wobei mit den in Bild 1.6(b) eingezeichneten Frequenzen f_1 und f_2 gilt:

$$G_d(f) = \begin{cases} g_0 \cdot T & \text{für } |f| \le f_1 , \\ g_0 \cdot T \cdot \cos^2\left(\dfrac{|f| - f_1}{f_2 - f_1} \cdot \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{für } f_1 \le |f| \le f_2 , \\ 0 & \text{für } |f| \ge f_2 . \end{cases} \tag{1.24}$$

Eine impulsinterferenzfreie Detektion ist nur dann gegeben, wenn $(f_1+f_2)/2 = f_N$ ist. Bei zu kleiner "Grenzfrequenz" ist das Auge geschlossen. Eine zu große "Grenzfrequenz" führt ebenfalls zu Impulsinterferenzen, wenn auch mit geringeren Auswirkungen.

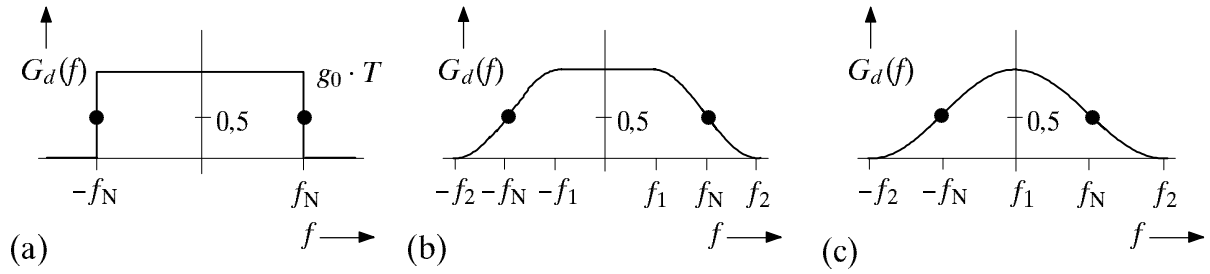


Bild 1.6: Nyquistspektren mit Cosinus–Rolloff–Charakteristik: r = 0 (a), r = 0.5 (b), r = 1 (c).

Zur Beschreibung der Flankensteilheit wird häufig der sogenannte "roll–off–Faktor"

$$r = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1} \qquad (r = 0 \ \ldots \ 1) \tag{1.25}$$

verwendet. Für $r = 0$ ($f_1 = f_2 = f_N$) ergibt sich aus der allgemeinen Darstellung (1.24) ein Rechteckspektrum (*"Küpfmüller–Tiefpaß"*), während mit $r = 1$ (d.h. $f_1 = 0$, $f_2 = 2 \cdot f_N$) das Detektionsgrundimpulsspektrum $G_d(f)$ $\cos^2$–förmig verläuft.

Für den Detektionsgrundimpuls gilt in Abhängigkeit des Rolloff–Faktors r allgemein:

$$g_d(t) = g_0 \cdot \frac{\cos(\pi \cdot r \cdot t/T)}{1 - (2 \cdot r \cdot t/T)^2} \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot \frac{t}{T}) \ . \tag{1.26}$$

Dem rechteckförmigen Spektrum von Bild 1.6(a) entspricht ein si–förmiger Impuls $g_d(t)$, der nur sehr langsam, nämlich asymptotisch mit $1/t$, abklingt und bei dem die horizontale Augenöffnung gegen Null geht. Da in diesem Fall das Auge zu einem unendlich schmalen Spalt entartet, ist in der Regel keine zufriedenstellende Detektion möglich. Ein zeitlich schwankender Takt ("*Jitter*") führt deshalb leicht zu Fehlentscheidungen.

Mit zunehmendem Rolloff–Faktor (d.h. flacherem Flankenabfall) werden die Überschwinger auch außerhalb der Detektionszeitpunkte $\nu \cdot T$ geringer, so daß sich für die horizontale Augenöffnung meist ebenfalls ein ausreichend großer Wert ergibt. Beim $\cos^2$–Nyquistspektrum ($r = 1$) klingt $g_d(t)$ asymptotisch mit $1/t^3$ ab. Aus (1.26) erhält man in diesem Sonderfall nach einigen Umformungen:

$$g_d(t) = g_0 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left[\mathrm{si}\left(\pi \cdot \left(\frac{t}{T} + \frac{1}{2}\right)\right) + \mathrm{si}\left(\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)\right)\right] \cdot \mathrm{si}\left(\pi \cdot \frac{t}{T}\right) . \tag{1.27}$$

Der Detektionsgrundimpuls gemäß (1.27) besitzt Nulldurchgänge bei allen Vielfachen der Symboldauer T und zusätzlich bei $\pm 1.5T$, $\pm 2.5T$, $\pm 3.5T$ usw.. Somit erfüllt dieser Impuls neben dem ersten auch das zweite Nyquistkriterium (vgl. [18]). Dadurch werden die Nulldurchgänge des Detektionssignals nicht aus ihren Sollagen verschoben, so daß die horizontale Augenöffnung maximal gleich der Symboldauer T wird. Dies erleichtert beispielsweise die Taktwiedergewinnung mittels einer PLL.

In Bild 1.7 ist das zum Grundimpuls von (1.27) gehörige Augendiagramm dargestellt. Es ist zu erkennen, daß dieses sowohl vertikal als auch horizontal zu 100 % geöffnet ist, und daß Impulsinterferenzen auch außerhalb des Detektionszeitpunktes von untergeordneter Bedeutung sind.

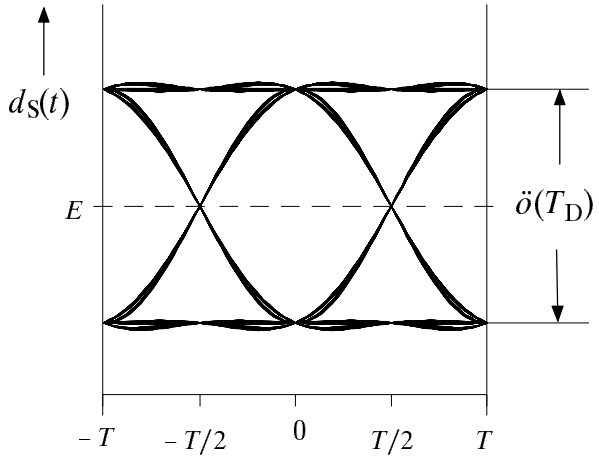


Bild 1.7: Augendiagramm bei $\cos^2$–Nyquistentzerrung ($r = 1$) gemäß Bild 1.6(c).

Der Frequenzgang des zu realisierenden Empfangsfilters beträgt

$$H_E(f) = \frac{G_d(f)}{G_s(f) \cdot H_K(f)} . \tag{1.28}$$

Dieser – und damit auch die Detektionsstörleistung – hängen also vom Rolloff–Faktor r ab. Dies bedeutet aber, daß es für jedes $H_K(f)$ einen optimalen Wert $r_{I,opt}$ gibt. Hierauf wird in der Versuchsdurchführung D3 noch ausführlich eingegangen.

1.3 Entscheidungsrückkopplung

Bisher wurde zur Amplituden– und Zeitregenerierung stets ein einfacher Schwellenwertentscheider verwendet. Im folgenden werden nun solche Empfänger vorgestellt, die bei verzerrendem Kanal das Digitalsignal mit kleinerer Fehlerwahrscheinlichkeit entscheiden. Zu diesen gehört beispielsweise der Empfänger mit Entscheidungsrückkopplung, bei dem die Entzerrung durch eine nichtlineare und somit quasistörungsfreie Kompensation der Impulsnachläufer erfolgt. In der Literatur wird die Entscheidungsrückkopplung manchmal auch als *"Quantisierte Rückkopplung"* (QR) bezeichnet.

1.3.1 Prinzip und Blockschaltbild

In den Abschnitten 1.1 und 1.2 bestand der Empfänger aus einem linearen Empfangsfilter und einem nichtlinearen Entscheider (vgl. Bild 1.1). Letzterer hatte nur die Aufgabe der Amplituden– und Zeitregenerierung, während das Empfangsfilter neben der Rauschleistungsbegrenzung auch für die Entzerrung des Digitalsignals verantwortlich war.

Bei dieser Art der Entzerrung wird jedoch nicht nur das Nutzsignal in der Amplitude verstärkt, sondern auch das unerwünschte Störsignal angehoben. Im folgenden wird nun mit der Entscheidungsrückkopplung ein nichtlineares Entzerrungsverfahren vorgestellt, bei dem dieser Nachteil nicht auftritt (vgl. z.B. [9], [20]).

Bild 1.8 zeigt das Blockschaltbild eines solchen Empfängers. Vom Ausgang des Schwellenwertentscheiders wird über ein lineares Netzwerk mit dem Frequenzgang $H_{QR}(f)$ ein Kompensationssignal $w(t)$ an seinen Eingang zurückgeführt und vom Detektionssignal $d(t)$ subtrahiert. Das Differenzsignal $k(t) = d(t) - w(t)$ bezeichnen wir als das korrigierte Signal. Bei geeigneter Dimensionierung des Rückkopplungsnetzwerks $H_{QR}(f)$ ist es möglich, die störenden Impulsnachläufer teilweise bzw. vollständig zu beseitigen. Die Impulsvorläufer können dagegen aus Kausalitätsgründen nicht beeinflußt werden.

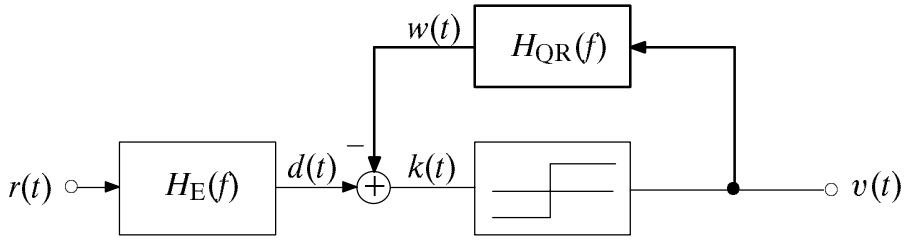


Bild 1.8: Empfänger mit Entscheidungsrückkopplung.

Die prinzipielle Wirkungsweise der Entscheidungsrückkopplung soll zunächst anhand der Grundimpulse an den verschiedenen Punkten des Blockschaltbildes erläutert werden (vgl. Bild 1.9). Dabei beschränken wir uns auf binäre bipolare Systeme.

Der Grundimpuls nach dem Empfangsfilter $H_E(f)$, das wiederum zur Rauschleistungsbegrenzung notwendig ist und teilweise die Aufgabe der Vorentzerrung übernimmt, wird wie bisher mit $g_d(t)$ bezeichnet.

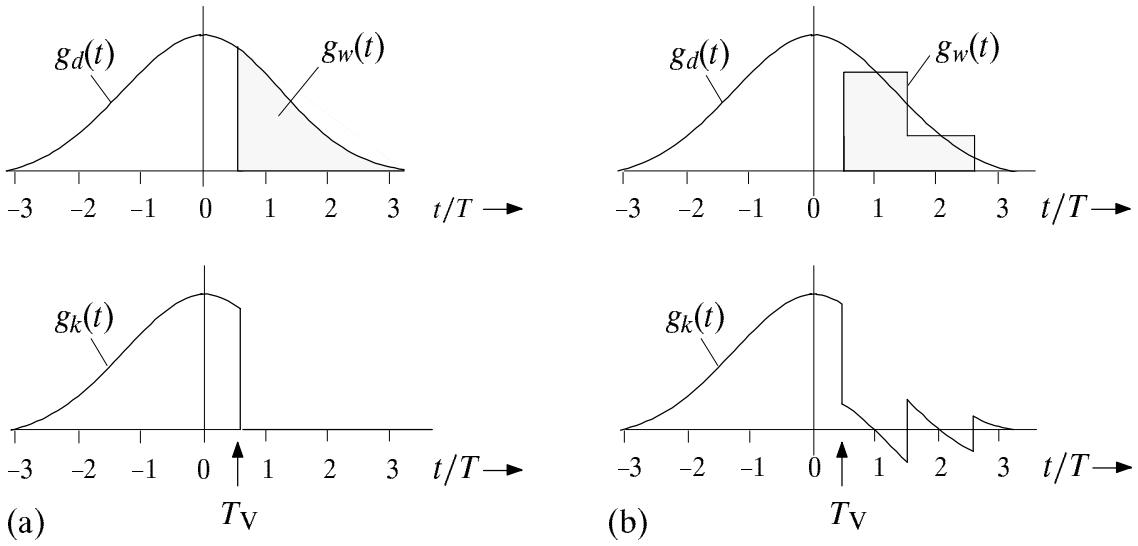


Bild 1.9: Grundimpulse $g_d(t)$, $g_w(t)$ und $g_k(t)$ bei einem Digitalempfänger mit Entscheidungsrückkopplung, ideal (a) bzw. entsprechend Bild 1.12.

Der Kompensationsgrundimpuls $g_w(t)$ wird vom rechteckförmigen Sinkengrundimpuls $g_v(t)$ abgeleitet. Im Idealfall muß $g_w(t)$, wie in Bild 1.9(a), den linear vorentzerrten Impuls $g_d(t)$ für alle Zeiten $t > T_D + T_V$ exakt nachbilden. Die aus Realisierungsgründen erforderliche Verzögerungszeit T_V muß stets kleiner als die Symboldauer T sein. Für Bild 1.9 und die weiteren Signaldarstellungen ist jeweils $T_D = 0$ und $T_V = T/2$ zugrundegelegt.

Der am Schwellenwertentscheider anliegende korrigierte Grundimpuls lautet somit bei idealer Realisierung der Entscheidungsrückkopplung (vgl. Bild 1.9(a) unten):

$$g_k(t) = \begin{cases} g_d(t) & \text{für } t < T_D + T_V \ , \\ 0 & \text{für } t \geq T_D + T_V \ . \end{cases} \tag{1.29}$$

Die vertikale Augenöffnung kann man bei bipolaren, redundanzfreien Binärsystemen analog zu (1.11) berechnen, wobei jedoch anstelle von $g_d(t)$ nun der korrigierte Grundimpuls $g_k(t)$ einzusetzen ist:

$$\ddot{o}(T_D) = 2 \cdot \left[g_k(T_D) - \sum_{\nu=1}^{n} |g_k(T_D + \nu \cdot T)| - \sum_{\nu=1}^{v} |g_k(T_D - \nu \cdot T)| \right] . \tag{1.30}$$

Für den Fall der vollständigen Kompensation entsprechend Bild 1.9(a) gilt:

$$\ddot{o}(T_D) = 2 \cdot \left[g_d(T_D) - \sum_{\nu=1}^{v} |g_d(T_D - \nu \cdot T)| \right] . \tag{1.31}$$

Die Störleistung σ_d^2 bleibt durch die Entscheidungsrückkopplung unverändert, da das Korrektursignal $w(t)$ aus dem bereits entschiedenen – und somit quasistörungsfreien – Sinkensignal $v(t)$ abgeleitet wird. Die Vergrößerung des Signalstörleistungsverhältnisses ist somit gleich dem Quadrat des Quotienten der Augenöffnungen mit bzw. ohne Entscheidungsrückkopplung, die durch (1.31) bzw. (1.11) gegeben sind.

Bild 1.10 zeigt Ausschnitte verschiedener Nutzsignalverläufen bei idealer QR. Der Gesamtfrequenzgang $H_I(f) = H_K(f) \cdot H_E(f)$ sei gaußförmig (Grenzfrequenz $f_I \cdot T = 0.3$).

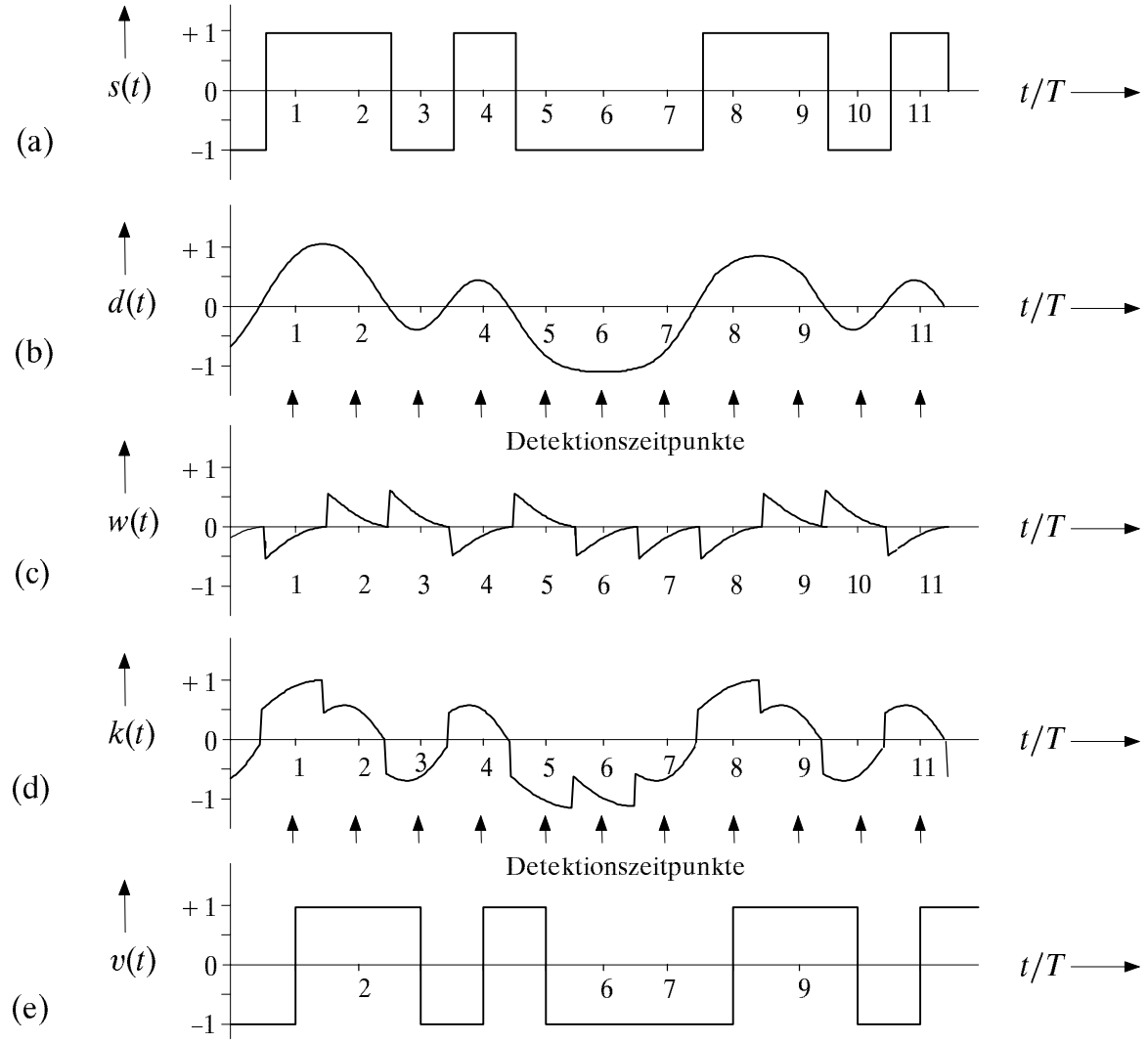


Bild 1.10: Signalverläufe (ohne Störungen) bei idealer Entscheidungsrückkopplung.

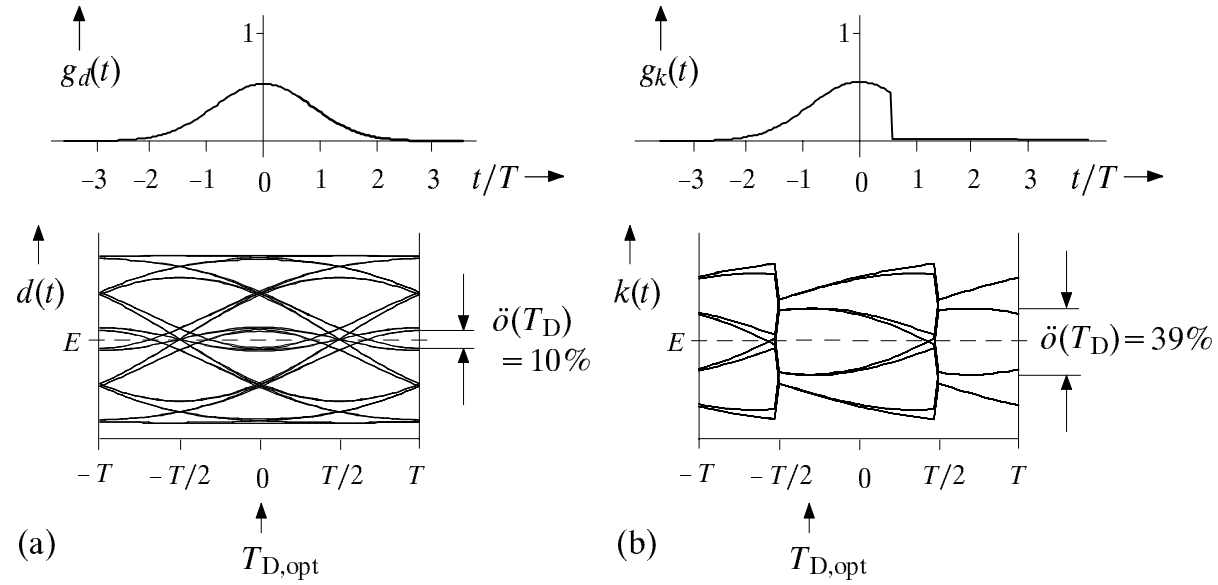


Bild 1.11: Grundimpulse und Augendiagramme (ohne Störungen) bei einem Binärempfänger ohne (a) bzw. mit idealer Entscheidungsrückkopplung (b).

Ein Vergleich der Bilder 1.10(b) und (d) macht deutlich, daß durch die Kompensation der Impulsnachläufer mittels des Korrektursignals $w(t)$ von Bild 1.10(c) sich die Abstände der Nutzabtastwerte $d_S(\nu \cdot T)$ von der Entscheiderschwelle verändern. Besonders geringe Abstände, wie z.B. zum Zeitpunkt $t = 3 \cdot T$, werden deutlich vergrößert.

In Bild 1.11 sind die Grundimpulse und Augendiagramme der Signale $d(t)$ und $k(t)$ dargestellt. Beim Empfänger ohne Entscheidungsrückkopplung ist das Auge wegen der relativ geringen Impulsformergrenzfrequenz (große Impulsinterferenzen) nur zu etwa 10 % geöffnet (vgl. Bild 1.11(a)). Beim Augendiagramm von Bild 1.11(b) ergibt sich demgegenüber ein sehr viel größerer Wert, unter der Voraussetzung $T_D = 0$ etwa 32 %.

Aus Bild 1.11(b) geht weiter hervor, daß bei einem Empfänger mit (idealer) QR der Detektionszeitpunkt $T_D = 0$ nicht optimal gewählt ist, sondern zu früheren Zeiten hin verlegt werden sollte. In diesem Beispiel erhöht sich die vertikale Augenöffnung $\ddot{o}(T_D)$ von 32 % auf 40 %, wenn statt $T_D = 0$ der Detektionszeitpunkt $T_D = -0.3 \cdot T$ gewählt wird.

Bei der festen Grenzfrequenz $f_I \cdot T = 0.3$ vergrößert sich der Signalstörabstand durch Anwendung der Entscheidungsrückkopplung etwa um $20 \cdot \lg(4) \approx 12$ dB. Die Optimierung der Impulsformergrenzfrequenz bringt einen weiteren Störabstandsgewinn, wobei die optimale Grenzfrequenz deutlich niedriger liegt als bei einem Empfänger ohne QR.

1.3.2 Schaltungstechnische Realisierung

Für eine schaltungstechnische Realisierung genügt es, wenn $g_k(t)$ lediglich zu den äquidistanten Detektionszeitpunkten $T_D + \nu \cdot T$ zu Null wird. Eine Realisierungsmöglichkeit stellt somit das nichtrekursive Laufzeitfilter entsprechend Bild 1.12 dar, dessen Ordnung n und Filterkoeffizienten a_ν (mit $\nu = 1, \ldots, n$) durch den Grundimpuls $g_d(t)$ sowie den Detektionszeitpunkt T_D festgelegt sind.

Bild 1.9(b) zeigt die entsprechenden Grundimpulse für diese Realisierungsform der Entscheidungsrückkopplung am Beispiel $n = 2$. Der Kompensationsimpuls $g_w(t)$ ist in diesem Fall treppenförmig, und es gilt bei richtiger Dimensionierung der Koeffizienten: $g_w(T_D + \nu \cdot T) = g_d(T_D + \nu \cdot T)$ für $\nu = 1, \ldots, n$. Zum Detektionszeitpunkt $T_D = 0$ ist die vertikale Augenöffnung ebenso groß wie bei vollständiger Nachläuferkompensation im gesamten Zeitbereich $t \geq T_V$. Der Nachteil gegenüber der idealen Entscheidungsrückkopplung ist eine kleinere horizontale Augenöffnung.

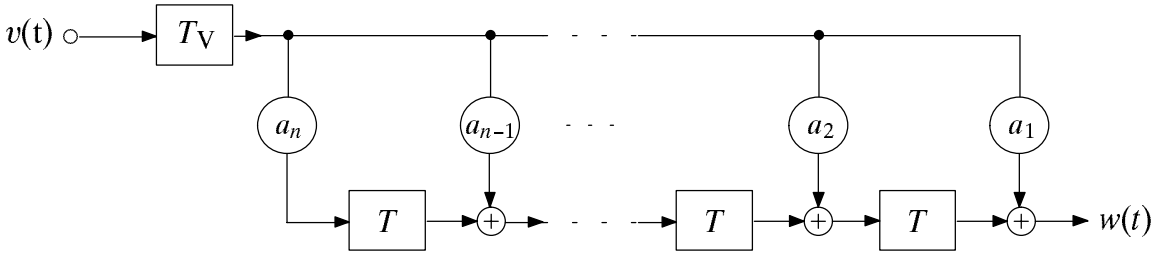


Bild 1.12: Nichtrekursives Laufzeitfilter zur Realisierung der Entscheidungsrückkopplung für einen Eingangsgrundimpuls $g_d(t)$ mit n Nachläufern.

1.4 Korrelationsempfänger

Die bisher beschriebenen Empfänger treffen symbolweise Entscheidungen. Werden demgegenüber mehrere Symbole gleichzeitig entschieden, so können bei der Detektion statistische Bindungen zwischen den Abtastwerten des Empfangssignals berücksichtigt werden, was eine Verringerung der Fehlerwahrscheinlichkeit zur Folge hat.

1.4.1 Prinzip und Entscheidungsregeln

Für das Folgende wird von dem in Bild 1.13 dargestellten Modell ausgegangen. Die redundanzfreie Quelle gibt eine Folge von N Binärsymbolen ab. Zur Unterscheidung von der zeitlich unbegrenzten Folge $\langle q_\nu \rangle$ wird die aus N Symbolen bestehende Quellensymbolfolge mit Q bezeichnet. Ebenso ist V die Sinkensymbolfolge der Länge N.

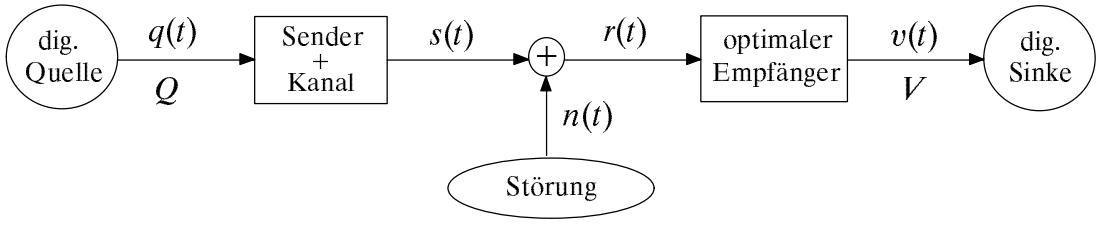


Bild 1.13: Blockschaltbild eines Übertragungssystems mit optimalem Empfänger.

Das am Empfänger anliegende Signal $r(t)$ setzt sich aus einem Nutzanteil $s(t)$ und einem Störanteil $n(t)$ zusammen, wobei die Störungen als gaußisch und weiß angenommen werden. Eventuelle lineare Verzerrungen des Kanals werden dem Signal $s(t)$ beaufschlagt.

Der optimale Empfänger sucht unter Kenntnis des anliegenden Empfangssignals $r(t)$ aus der Menge $\{Q_i\}$ der möglichen Quellensymbolfolgen (mit $i = 0,...,2^N\text{–}1$) die am wahrscheinlichsten gesendete Folge Q_j und gibt diese als Sinkensymbolfolge V aus. Zur Entscheidung müssen dazu die 2^N Rückschlußwahrscheinlichkeiten $p(Q_i|r(t))$ bestimmt werden. Diese drücken aus, mit welcher Wahrscheinlichkeit die dazugehörigen Folgen gesendet wurden, unter der Voraussetzung, daß das Signal $r(t)$ am Empfänger anliegt.

Die Entscheidungsregel des optimalen Empfängers lautet somit: Man setze $V = Q_j$, falls für alle Werte von $i = 0,...,2^N\text{–}1$ mit $i \neq j$ die Bedingung

$$p(Q_j|r(t)) > p(Q_i|r(t)) \tag{1.32}$$

erfüllt ist. Da alle 2^N möglichen Quellensymbolfolgen Q_i als gleichwahrscheinlich vorausgesetzt werden, kann (1.32) mit dem Satz von Bayes wie folgt umgeformt werden:

$$p(r(t)|Q_j) > p(r(t)|Q_i)\,. \tag{1.33}$$

Während man einen Digitalempfänger mit der allgemeineren Entscheidungsregel (1.32), die auch die unterschiedlichen Auftrittswahrscheinlichkeiten der einzelnen Symbolfolgen berücksichtigt, als einen *Maximum–Aposteriori–Empfänger* (abgekürzt *"MAP"*) bezeichnet, nennt man (1.33) die *Maximum–Likelihood–Entscheidungsregel*. Bei redundanzfreier Quelle sind das MAP– und das ML–Empfängerkonzept identisch.

Bei gaußverteilten und weißen Störungen $n(t)$ kann die ML–Entscheidungsregel (1.33) weiter vereinfacht werden. Der Empfänger muß sich in diesem Fall für die Sinkensymbolfolge $V = Q_j$ entscheiden, falls für alle $i \neq j$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r(t) \cdot s_j(t)\ \mathrm{d}t\ - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |s_j(t)|^2\ \mathrm{d}t\ > \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) \cdot s_i(t)\ \mathrm{d}t\ - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |s_i(t)|^2\ \mathrm{d}t\ . \qquad (1.34)$$

Hierbei ist $s_i(t)$ das Nutzsignal am Empfängereingang unter der Voraussetzung, daß die Symbolfolge Q_i gesendet wurde. Da alle möglichen Nutzsignale $s_i(t)$ vor einem Zeitpunkt t_1 (bevor das erste Symbol gesendet wurde) sowie ab einem bestimmten Zeitpunkt t_2 (nach dem Senden des letzten Symbols) identisch Null sind, ist die Integration über den endlichen Zeitausschnitt von t_1 bis t_2 ausreichend. In den meisten Fällen erstreckt sich somit das Integrationsintervall von 0 bis $N \cdot T$. Bei Berücksichtigung von Impulsinterferenzen muß dieses Intervall an den beiden Rändern entsprechend vergrößert werden.

Die Ableitung der obigen Entscheidungsvorschrift erfolgt über die k–dimensionale Verbundwahrscheinlichkeitsdichte der Störungen (mit $k \to \infty$) und einigen Grenzübergängen. Sie ist z.B. in [15] auch für den Fall farbiger Störungen verständlich dargelegt.

Es gibt mehrere, prinzipiell unterschiedliche Möglichkeiten für eine schaltungstechnische Implementierung der Entscheidungsregel (1.34). Beispielsweise können die benötigten Integrale durch lineare Filterung und anschließender Abtastung gewonnen werden. Man bezeichnet diese Realisierungsform als *"Matched–Filter–Empfänger"*.

Der hier beschriebene Korrelationsempfänger bildet alle 2^N möglichen Kreuzkorrelationsfunktionen zwischen dem empfangenen Signal $r(t) = s(t) + n(t)$ und den möglichen Nutzsignalen $s_i(t)$. Das bedeutet, daß in jedem der 2^N Zweige das Eingangssignal $r(t)$ mit einem der möglicherweise gesendeten Signale multipliziert und anschließend zwischen den Grenzen $t_1 = 0$ und $t_2 = N \cdot T$ integriert werden muß.

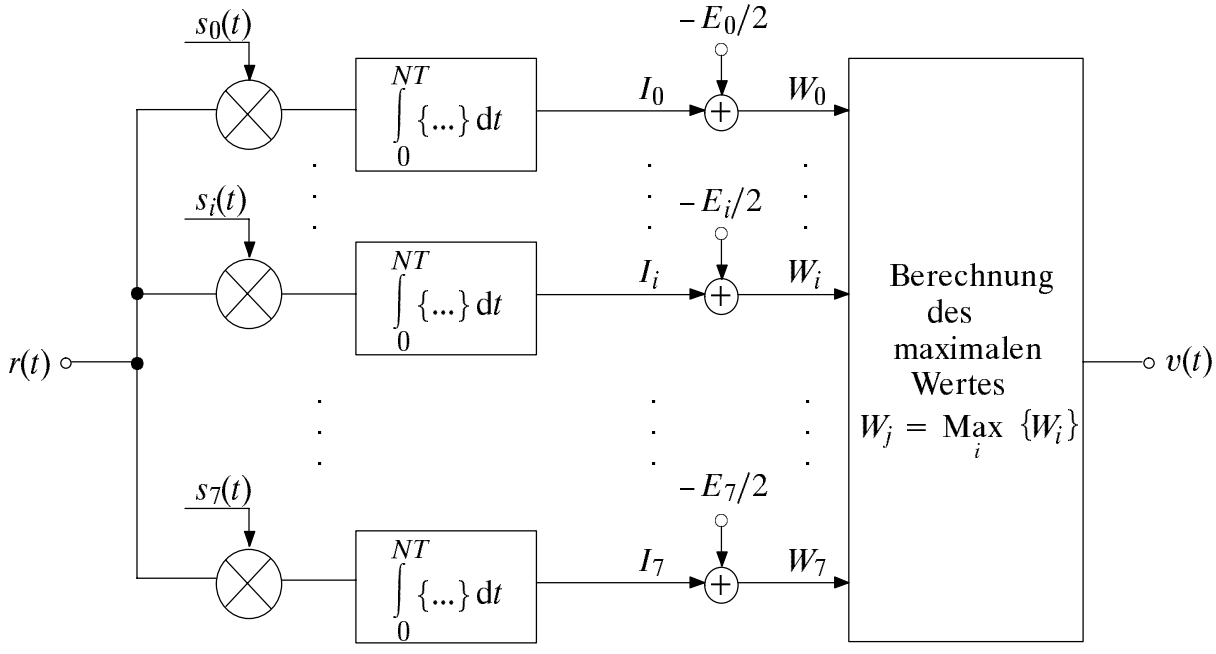


Bild 1.14: Korrelationsempfänger für eine Symbolfolge mit N = 3 Symbolen.

Bild 1.14 zeigt die entsprechende Anordnung zur optimalen Detektion einer Folge mit $N = 3$ Symbolen, so daß die parallele Realisierung von $2^N = 8$ Zweigen erforderlich ist. Dabei ist vorausgesetzt, daß der Grundimpuls $g_s(t)$ auf den Zeitbereich von 0 bis T beschränkt ist. Das Integrationsintervall liegt somit zwischen 0 und $3 \cdot T$.

Für den Ausgangswert des i–ten Integrators gilt:

$$I_i = \int_0^{N \cdot T} r(t) \cdot s_i(t)\ \mathrm{d}t\ . \tag{1.35}$$

Dieser Integralwert ist proportional zu der über das endliche Zeitintervall NT gebildeten *"Energie–Kreuzkorrelationsfunktion"*

$$\varphi_{r,s_i}(\tau) = \frac{1}{N \cdot T} \cdot \int_0^{N \cdot T} r(t) \cdot s_i(t + \tau)\ \mathrm{d}t \tag{1.36}$$

an der Stelle $\tau = 0$ ist. I_i besitzt somit die Einheit einer Energie, z.B. V^2s. Das zweite Integral in (1.34) gibt die Energie des i–ten Nutzsignals an. Mit der AKF ergibt sich

$$E_i = \varphi_{s_i}(\tau = 0) = \int_0^{N \cdot T} |s_i(t)|^2\ \mathrm{d}t\ , \tag{1.37}$$

so daß man für die zu vergleichenden Werte entsprechend Bild 1.14 auch schreiben kann:

$$W_i = I_i - \frac{E_i}{2}\ . \tag{1.38}$$

Der Korrelationsempfänger sucht nun von allen 2^N Werten W_i den maximalen Wert W_j und gibt die dazugehörige Folge Q_j als Sinkensymbolfolge V aus. Formal läßt sich die Entscheidungsregel des Maximum–Likelihood–Empfängers wie folgt ausdrücken:

$$V = Q_j\ ,\ \text{falls}\ W_j > W_i\ \text{für alle}\ i \neq j\ . \tag{1.39}$$

Für die Laufvariable ist wieder $i = 0, \ldots, 2^N\text{–}1$ einzusetzen.

1.4.2 Baumdiagramm

Die Funktionsweise und Komplexität des Korrelationsempfängers nach Bild 1.14 soll anhand eines rechteckförmigen Nutzsignals $s(t)$ verdeutlicht werden. In Bild 1.15 sind die $2^3 = 8$ möglichen Symbolfolgen Q_i und die dazugehörigen Nutzsignale $s_i(t)$ dargestellt.

Q_i	OOO	OOL	OLO	OLL	LOO	LOL	LLO	LLL
$s_i(t)$	$s_0(t)$	$s_1(t)$	$s_2(t)$	$s_3(t)$	$s_4(t)$	$s_5(t)$	$s_6(t)$	$s_7(t)$

Bild 1.15: Die 8 möglichen Symbolfolgen (Nutzsignale) zur Entscheidungsfindung.

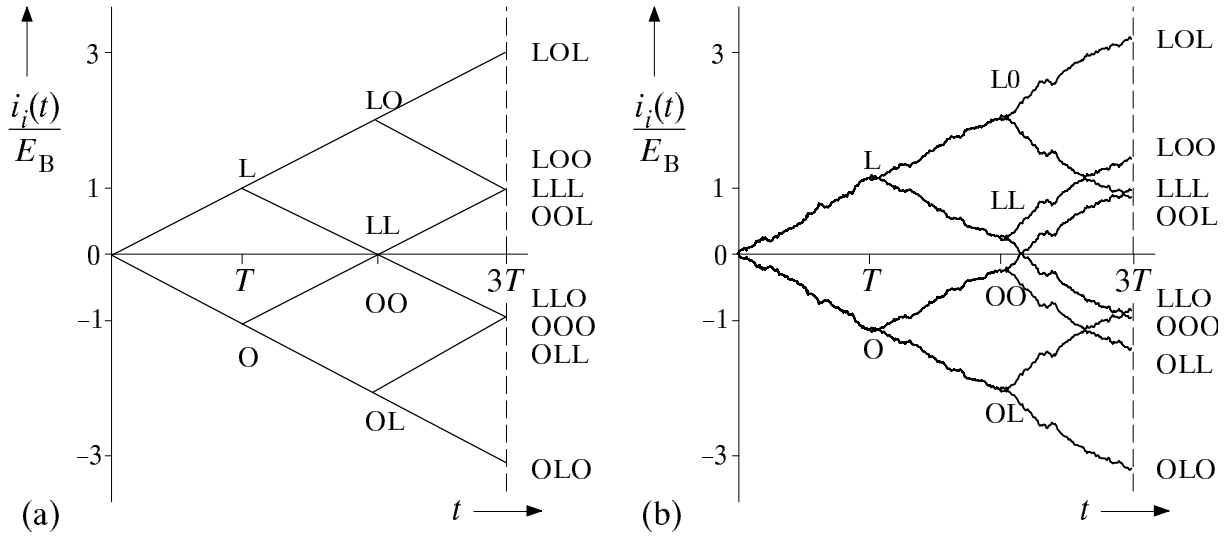


Bild 1.16: Integralverläufe $i_i(t)$ gemäß (1.40) bei einem Korrelationsempfänger für $N = 3$ Symbole, ohne Störungen (a) bzw. mit Störungen (b).

Wegen der bipolaren Amplitudenkoeffizienten (± 1) und der Rechteckform sind alle Signalenergien gleich $E_i = N \cdot E_B$, wobei $E_B = g_0^2 \cdot T$ die Energie eines Einzelimpulses angibt. Deshalb kann auf die Subtraktion des Terms $E_i/2$ in allen Zweigen verzichtet werden. Eine auf den Integralwerten I_i basierende Entscheidung liefert hier ebenso zuverlässige Ergebnisse wie die Maximierung der korrigierten Werte W_i.

Es wird angenommen, daß das Nutzsignal $s_5(t)$ gesendet wurde. Für diesen Fall sind in Bild 1.16 die Zeitverläufe der in den 8 Integratoren meßbaren Signale dargestellt:

$$i_i(t) = \int_0^t r(\tau) \cdot s_i(\tau)\, d\tau \tag{1.40}$$

Bild 1.16(a) gilt bei vernachlässigbar kleinen Störungen ($\sigma_n = 0$), während für 1.16(b) die Streuung des weißen Rauschens $\sigma_n = 2 \cdot g_0$ beträgt.

Betrachten wir zunächst den störungsfreien Fall, bei dem aufgrund der rechteckförmigen Signale alle Integrationsverläufe $i_i(t)$ geradlinig sind. Die Zeitfunktion $i_5(t)$ ist unter der getroffenen Annahme $r(t) = s_5(t)$ monoton steigend, und für den Endwert $I_5 = i_5(3 \cdot T)$ ergibt sich der maximal mögliche Wert $3 \cdot E_B$.

Dagegen liefern die Integratoren I_1, I_4 und I_7 jeweils nur den Wert E_B, da sich die zur Korrelation herangezogenen Signale $s_1(t)$, $s_4(t)$ und $s_7(t)$ vom tatsächlich gesendeten Signal $s_5(t)$ in jeweils einem Bit unterscheiden (vgl. Bild 1.15). Die weiteren Integratorausgangswerte $I_0 = I_3 = I_6 = -E_B$ bzw. $I_2 = -3 \cdot E_B$ sind noch deutlich kleiner. Die richtige Entscheidung für das Signal $s_5(t)$ ist somit im störungsfreien Fall sehr einfach.

Bei Berücksichtigung von Störungen sind die Integralverläufe im Baumdiagramm nicht mehr linear. Aus dem Simulationsbeispiel von Bild 1.16(b) geht jedoch hervor, daß hier der Korrelationsempfänger mit großer Wahrscheinlichkeit eine richtige Entscheidung trifft. Die Differenz zwischen I_5 und dem nächstgrößeren Wert I_7 ist mit $1.65 \cdot E_B$ verhältnismäßig groß, so daß die Entscheidung auch relativ sicher ist.

Tabelle 1.2: Integratorausgangswerte I_i und korrigierte Werte W_i bei unipolarem rechteckförmigen Nutzsignal und vernachlässigbaren Störungen.

tatsächliches Nutzsignal	I_0 / W_0	I_1 / W_1	I_2 / W_2	I_3 / W_3	I_4 / W_4	I_5 / W_5	I_6 / W_6	I_7 / W_7
$s_0(t)$	0 / 0	0 / –0,5	0 / –0,5	0 / –1	0 / –0,5	0 / –1	0 / –1	0 / –1,5
$s_1(t)$	0 / 0	1 / 0,5	0 / –0,5	1 / 0	0 / –0,5	1 / 0	0 / –1	1 / –0,5
$s_2(t)$	0 / 0	0 / –0,5	1 / 0,5	1 / 0	0 / –0,5	0 / –1	1 / 0	1 / –0,5
$s_3(t)$	0 / 0	1 / 0,5	1 / 0,5	2 / 1	0 / –0,5	1 / 0	1 / 0	2 / 0,5
$s_4(t)$	0 / 0	0 / –0,5	0 / –0,5	0 / –1	1 / 0,5	1 / 0	1 / 0	1 / –0,5
$s_5(t)$	0 / 0	1 / 0,5	0 / –0,5	1 / 0	1 / 0,5	2 / 1	1 / 0	2 / 0,5
$s_6(t)$	0 / 0	0 / –0,5	1 / 0,5	1 / 0	1 / 0,5	1 / 0	2 / 1	2 / 0,5
$s_7(t)$	0 / 0	1 / 0,5	1 / 0,5	2 / 1	1 / 0,5	2 / 1	2 / 1	3 / 1,5

Besitzen die einzelnen Nutzsignale $s_i(t)$ unterschiedliche Energien, so ist eine Korrektur entsprechend (1.38) unverzichtbar. Tabelle 1.2 soll dies am Beispiel eines unipolaren rechteckförmigen Nutzsignals verdeutlichen, wobei die Zahlenwerte den störungsfreien Fall repräsentieren. Wird z.B. das Nutzsignal $s_0(t)$ gesendet, so sind alle Integratorausgangswerte gleich: $I_0 = ... = I_7 = 0$. Dagegen ist anhand der korrigierten Werte W_i auch in diesem Fall eine eindeutige und richtige Entscheidung möglich.

Dieses Beispiel sollte die für die Entscheidungsregel (1.34) erforderlichen Integrale verdeutlichen und wurde deshalb bewußt einfach gewählt. Zu diesem Beispiel ist jedoch kritisch anzumerken, daß der Korrelationsempfänger in diesem Sonderfall die gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit aufweist wie ein Übertragungssystem mit Matched–Filter und symbolweiser Entscheidung ($N = 1$). Somit erhält man für die (mittlere) Bitfehlerwahrscheinlichkeit entsprechend der bekannten Gleichung unabhängig von N:

$$p_B = Q(\sqrt{2 \cdot E_B/N_0}) \quad = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{erfc}(\sqrt{E_B/N_0}) \ . \tag{1.41}$$

Dagegen führt der Korrelationsempfänger immer dann zu einer spürbaren Verbesserung hinsichtlich Fehlerwahrscheinlichkeit, wenn der Nutzanteil $s(t)$ des Eingangssignals statistische Bindungen aufweist. Diese können beispielsweise durch sendeseitige Codierung bewußt erzeugt werden, oder auch auf lineare Kanalverzerrungen (Impulsinterferenzen) zurückzuführen sein. Diese Verbesserung ist darauf zurückzuführen, daß der Korrelationsempfänger diese statistische Bindungen bei der Entscheidung berücksichtigt.

Bei Vorhandensein von Impulsinterferenzen ist die Fehlerwahrscheinlichkeitsberechnung deutlich schwieriger. Es können jedoch vergleichbare Näherungen wie beim Viterbi–Empfänger angegeben werden, die am Ende von Abschnitt 1.5 zu finden sind.

1.5 Viterbi-Empfänger

Im letzten Abschnitt wurde davon ausgegangen, daß die Sinkensymbolfolge in einem einzigen Entscheidungsprozeß gewonnen wird. Der Aufwand für die Realisierung eines solchen Empfängers steigt exponentiell mit der Länge N der zu detektierenden Symbolfolge. Dagegen erlaubt der im folgenden beschriebene Viterbi–Empfänger die optimale Detektion von Teilen der empfangenen Nachricht, so daß sich der Realisierungsaufwand auch bei unendlich langen Folgen in Grenzen hält.

1.5.1 Blockschaltbild und Prinzip

Die nachfolgende Beschreibung des Viterbi–Empfängers erfolgt entsprechend der in [9] gewählten Darstellung. Bild 1.17 zeigt das dazugehörige Blockschaltbild.

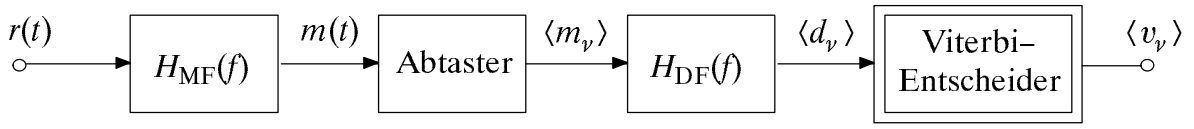


Bild 1.17: Optimaler Empfänger, bestehend aus Matched–Filter, Abtastung, diskretem Dekorrelationsfilter und Viterbi–Entscheider.

Im Mittelpunkt der nachfolgenden Betrachtungen steht der mit *"Viterbi–Entscheider"* bezeichnete Block. Dieser gewinnt aus der Folge $\langle d_\nu \rangle$ der analogen Eingangswerte die Ausgangsfolge $\langle v_\nu \rangle$ entsprechend der Maximum–Likelihood–Entscheidungsregel mit minimaler Fehlerwahrscheinlichkeit. Pro Entscheidung benötigt der Viterbi–Algorithmus einen Eingangswert d_ν, der aus dem anliegenden Empfangssignal $r(t) = s(t)+n(t)$ durch lineare Filterung und Abtastung abgeleitet wird. Alle Eingangswerte setzen sich wieder je aus einem Nutz– und einem Störanteil zusammen: $d_\nu = d_{S\nu} + d_{N\nu}$.

Das an den Empfangsgrundimpuls $g_r(t)$ und das Störleistungsspektrum $\Phi_n(f)$ angepaßte Matched–Filter $H_{MF}(f)$ dient im wesentlichen zur Störleistungsbegrenzung. Dessen Ausgangssignal $m(t)$ besitzt das bestmögliche momentane Signalstörleistungsverhältnis, während Impulsinterferenzen durch den Tiefpaß $H_{MF}(f)$ sogar noch vergrößert werden.

Die Störanteile der Folge $\langle m_\nu \rangle$ nach der Abtastung sind im allgemeinen korreliert. Da der Viterbi–Entscheider seine volle Leistungsfähigkeit jedoch nur dann zur Geltung bringen kann, wenn die Störanteile $d_{N\nu}$ unkorreliert sind, beinhaltet der Empfänger von Bild 1.17 zusätzlich ein digitales Dekorrelationsfilter mit dem Frequenzgang $H_{DF}(f)$. Hinweise über die Dimensionierung dieses Filters, das auch als *"Whitening–Filter"* bekannt ist, finden sich u.a. in [9].

Die Nutzanteile $d_{S\nu}$ der Eingangsfolge $\langle d_\nu \rangle$ können aus den Amplitudenkoeffizienten a_ν und dem Detektionsgrundimpuls berechnet werden. Für das Folgende wird angenommen, daß der Grundimpuls $g_d(t)$ allein durch den Hauptwert $g_d(T_D)$ sowie v Vorläufer $g_d(T_D - T)$ ... $g_d(T_D - v \cdot T)$ beschrieben werden kann. Die Vernachlässigung von Nachläufern stellt keine grundlegende Einschränkung dar, weil jeder Impuls $g_d(t)$ diese Bedingung durch geeignete Wahl des Detektionszeitpunktes T_D erfüllen kann.

Mit der Definition der Detektionsgrundimpulswerte

$$g_{-\kappa} = g_d(T_D - \kappa \cdot T) \ , \tag{1.42}$$

wobei der Laufindex κ alle ganzzahligen Werte zwischen 0 und v annehmen kann, erhält man für den Nutzanteil des ν–ten Eingangswertes:

$$d_{S\nu} = \sum_{\kappa=0}^{v} a_{\nu+\kappa} \cdot g_{-\kappa} \ . \tag{1.43}$$

Dieser hängt außer vom aktuellen, mit dem Hauptwert g_0 gewichteten Koeffizienten a_ν auch von den Amplitudenkoeffizienten $a_{\nu+1} \ldots a_{\nu+v}$ der v nachfolgenden Symbole ab. Der Einfluß dieser Nachfolgesymbole auf das zu detektierende Symbol wird durch die Grundimpulswerte $g_{-1} \ldots g_{-v}$ bestimmt.

In Bild 1.18 sind die Detektionsnutzabtastwerte $d_{S\nu}$ für eine unipolare Beispielfolge als Kreuze eingetragen. Die Anzahl der Vorläufer beträgt hier $v = 1$, die (normierten) Grundimpulswerte sind zu $g_0 = 0.7$ und $g_{-1} = 0.3$ angenommen. Es ist zu erkennen, daß $d_{S\nu}$ nur vier verschiedene Werte, nämlich 0, g_0, g_{-1} sowie $g_0 + g_{-1}$, annehmen kann.

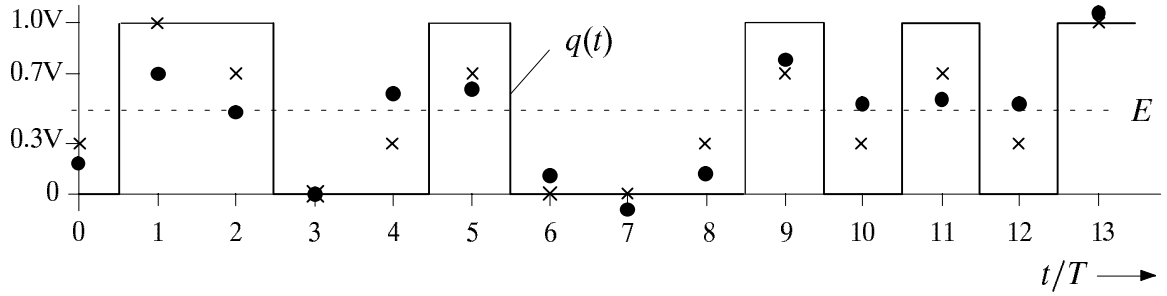


Bild 1.18: Eingangswerte d_ν des Viterbi–Entscheiders (Punkte) und zugehörige Nutzanteile $d_{S\nu}$ (Kreuze) bei unipolaren Amplitudenkoeffizienten und $v = 1$.

Diesen Nutzabtastwerten $d_{S\nu}$ sind nun jeweils additive Störanteile $d_{N\nu}$ überlagert, woraus sich die tatsächlich am Viterbi–Entscheider anstehenden Werte d_ν ergeben. Diese sind in Bild 1.18 durch Punkte markiert, wobei für die Störung eine Gaußverteilung mit der (normierten) Streuung $\sigma_d = 0.2$ zugrundegelegt wurde.

Ein Vergleich der Eingangswerte d_ν mit dem unipolaren Quellensignal $q(t)$ zeigt, daß aufgrund der starken Impulsinterferenzen eine Schwellenwertentscheidung zu unzulässig vielen Fehlentscheidungen führen würde. Abhilfe schafft der Viterbi–Entscheider.

Dieser arbeitet nach der Maximum–Likelihood–Entscheidungsregel (vgl. Abschnitt 1.5.1). Zur optimalen Detektion vergleicht er die entsprechend Bild 1.17 abgeleiteten Detektionsabtastwerte d_ν (Punkte) mit allen möglichen Nutzabtastwerten $d_{S\nu}$ (Kreuze) und entscheidet sich für die Symbolfolge mit der kleinsten quadratischen Abweichung.

In der nachfolgenden Beschreibung kennzeichnet $Q \in \{Q_i\}$ wieder die aus N Binärsymbolen bestehende Quellensymbolfolge. Die Anzahl der möglichen Symbolfolgen beträgt somit 2^N. Ebenso ist V die Sinkensymbolfolge der Länge N, die vom Viterbi–Entscheider gleich der wahrscheinlichsten Folge Q_j gesetzt wird.

1.5.2 Fehlergrößen und Trellisdiagramm

Im folgenden bezeichnet die *Fehlergröße* $\varepsilon_\nu^{(i)}$ die quadratische Abweichung zwischen dem tatsächlichen Abtastwert d_ν und dem zur Folge Q_i gehörenden Nutzabtastwert $d_{S\nu}^{(i)}$:

$$\varepsilon_\nu^{(i)} = |d_\nu - d_{S\nu}^{(i)}|^2 = |d_{N\nu}^{(i)}|^2 \; . \qquad . \tag{1.44}$$

Entsprechend kennzeichnet die *Gesamtfehlergröße* (häufig auch *Metrik* genannt)

$$\gamma_\nu^{(i)} = \sum_{k=1-v}^{\nu} \varepsilon_k^{(i)} \tag{1.45}$$

die Summe aller Fehlergrößen bis einschließlich zum Zeitpunkt ν. Die untere Grenze $1-v$ in dieser Summe ist so gewählt, daß bereits für das erste Symbol der Einfluß der Impulsvorläufer vollständig erfaßt wird.

Der Viterbi–Empfänger entscheidet sich von allen 2^N möglichen Folgen Q_i für die Folge Q_j mit der geringsten Gesamtfehlergröße und gibt diese als Sinkensymbolfolge V aus. Somit lautet seine Entscheidungsregel: Man setze $V = Q_j$, falls die Relation

$$\gamma_N^{(j)} < \gamma_N^{(i)} \tag{1.46}$$

für alle $i \neq j$ gültig ist. Die Laufvariable ist hierbei wieder $i = 0, \ldots, 2^N-1$ zu setzen.

Wie aus (1.45) zu ersehen ist, kann die Gesamtfehlergröße iterativ berechnet werden:

$$\gamma_\nu^{(i)} = \gamma_{\nu-1}^{(i)} + \varepsilon_\nu^{(i)} \; . \tag{1.47}$$

Bei jedem Iterationsschritt wird somit die Anzahl der Gesamtfehlergrößen um den Faktor 2 größer. Für die neu hinzugekommene Fehlergröße gilt entsprechend (1.43):

$$\varepsilon_\nu^{(i)} = |d_\nu - \sum_{\kappa=0}^{v} a_{\nu+\kappa}^{(i)} \cdot g_{-\kappa}|^2 \; . \tag{1.48}$$

Daraus wird deutlich, daß zu jedem Zeitpunkt ν die Fehlergröße ε_ν höchstens 2^{v+1} verschiedene Werte annehmen kann, wobei v wieder die Anzahl der Vorläufer angibt.

In Bild 1.19 ist Gleichung (1.47) für einen Grundimpuls mit einem Vorläufer ($v = 1$) veranschaulicht. Es ergibt sich eine Baumstruktur, in der den Fehlergrößen ε_ν Zweige zugeordnet sind und den Gesamtfehlergrößen γ_ν Knoten. Die zu γ_ν gehörigen Symbolfolgen ergeben sich, wenn man den Weg vom Anfangsknoten bis zum betrachteten Knoten verfolgt. Es wird vereinbart, daß einem Zweig, der nach oben gerichtet ist, das Symbol "L" und einem nach unten gerichteten Zweig das Symbol "O" zugeordnet wird.

Betrachten wir den Zeitpunkt $\nu = 2$. Hier gibt es genau $2^{\nu+1} = 8$ Knoten. Beispielsweise kennzeichnet der grau hinterlegte Knoten γ_2(OLO) die Gesamtfehlergröße unter der Annahme, daß die Quellensymbole $q_1 = $ O, $q_2 = $ L und $q_3 = $ O gesendet wurden. Die Zuordnung dieses Knotens zu der Folge "OLO" kann aus den Richtungen der Pfeile vom Anfangs– bis zum Endpunkt abgelesen werden: "nach unten – nach oben – nach unten".

Da vereinbarungsgemäß alle möglichen Quellensymbolfolgen mit gleicher Wahrscheinlichkeit gesendet werden, benötigt der Viterbi–Entscheider auch die restlichen sieben Gesamtfehlergrößen γ_2(OOO), γ_2(OOL), ..., γ_2(LLL).

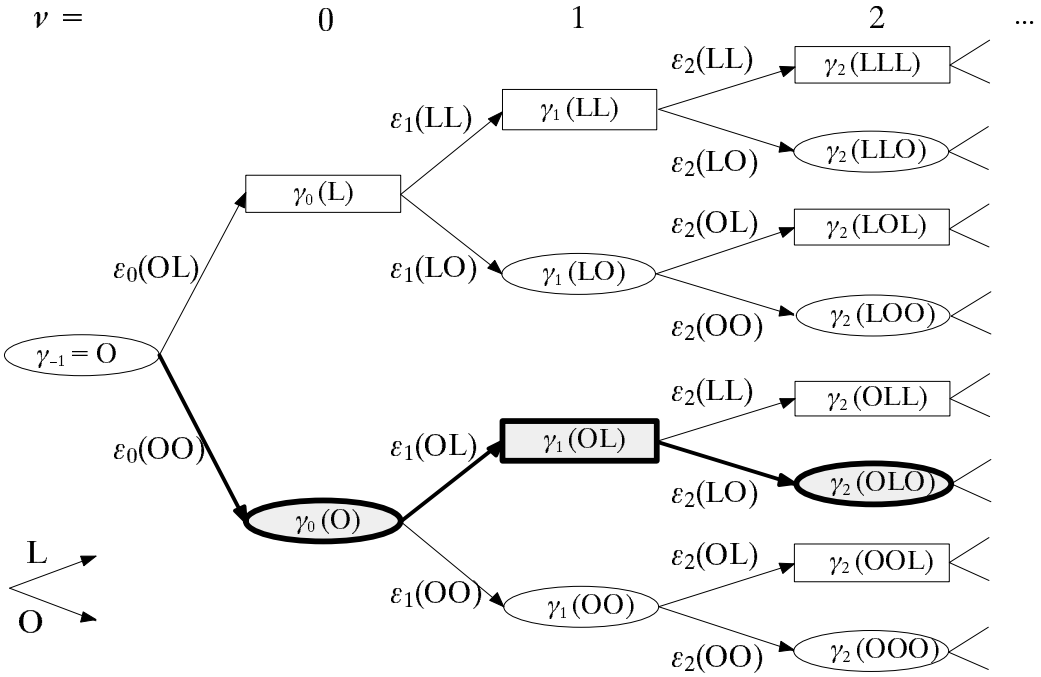


Bild 1.19: Darstellung der Fehlergrößen ε_ν und der Gesamtfehlergrößen γ_ν in einer Baumstruktur (Anmerkung: Diese Struktur gilt nur für den Fall $v = 1$).

Aufgrund des Vorläufers muß bereits zum Zeitpunkt $\nu = 2$ das Quellensymbol q_3 mitberücksichtigt werden. Die Knoten γ_ν, die unter der Voraussetzung $q_{\nu+1} = \mathrm{O}$ berechnet werden, sind in Bild 1.19 durch Ovale dargestellt, während die Hypothese $q_{\nu+1} = \mathrm{L}$ durch ein Rechteck symbolisiert ist. Entsprechend dieser Nomenklatur ist $\gamma_2(\mathrm{OLO})$ ein Oval.

Die Anzahl der unterschiedlichen Fehlergrößen ε_ν ist zu jedem Zeitpunkt mit Ausnahme des Startzeitpunktes ($\nu = 0$) gleich 2^{v+1}, im betrachteten Beispiel mit $v = 1$ also vier (vgl. (1.48) und Bild 1.18). Diese Fehlergrößen sind in Bild 1.19 mit $\varepsilon_\nu(00)$, $\varepsilon_\nu(\mathrm{OL})$, $\varepsilon_\nu(\mathrm{LO})$ und $\varepsilon_\nu(\mathrm{LL})$ bezeichnet. Die Fehlergröße $\varepsilon_2(\mathrm{LO})$ wird beispielsweise unter der Voraussetzung berechnet, daß $q_2 = \mathrm{L}$ und $q_3 = \mathrm{O}$ seien.

Für den Anfangsknoten wird vorausgesetzt, daß vor der eigentlichen Übertragung der Nachricht das Symbol $q_0 = \mathrm{O}$ gesendet wurde. Deshalb gibt es zum Zeitpunkt $\nu = 0$ nur die beiden Fehlergrößen $\varepsilon_0(\mathrm{OO})$ und $\varepsilon_0(\mathrm{OL})$. Zur Festlegung eines definierten Anfangszustandes wird weiterhin $\gamma_{-1} = 0$ gesetzt.

Falls die Abtastwerte ungestört sind (d.h. es ist $d_{\mathrm{N}\nu} = 0$ für alle ν), gibt es zu jedem Zeitpunkt ν genau eine Fehlergröße, für die $\varepsilon_\nu^{(i)} = 0$ gilt. Die dazugehörige Symbolfolge entspricht dann mit Sicherheit der gesendeten Folge, und die Entscheidung ist trotz des Impulsvorläufers sicher.

Aus Bild 1.19 geht weiter hervor, daß die Gesamtfehlergröße γ_ν gleich der Summe des vorausgegangenen Knotens ($\gamma_{\nu-1}$) und des dazwischenliegenden Zweiges (ε_ν) ist. Beispielsweise gilt für den hervorgehobenen Knoten:

$$\gamma_2(\mathrm{OLO}) = \gamma_1(\mathrm{OL}) + \varepsilon_2(\mathrm{LO}) \; . \tag{1.49}$$

Beispiel: Die Nachricht bestehe aus $N=3$ Binärsymbolen, nämlich q_1, q_2 und q_3, die über einen verzerrenden Kanal übertragen werden. Diese seien unipolar codiert, d.h. die dazugehörigen Amplitudenkoeffizienten seien 0 oder 1. Der Grundimpuls $g_d(t)$ besitze nur zwei von Null verschiedene Abtastwerte ($v=1$), die aus Gründen einer vereinfachten Darstellung als dimensionslos betrachtet werden: $g_0 = 0.7$ und $g_{-1} = 0.3$.

Weiterhin wird angenommen, daß zu den Abtastzeitpunkten $v = 0, \ldots, 3$ folgende (gestörte) Abtastwerte am Entscheider anliegen: $d_0 = 0.2; d_1 = 0.7; d_2 = 0.5; d_3 = 0$ (vgl. Bild 1.18). Der Zeitpunkt $v = 0$ muß wegen des Vorläufers in die Entscheidung miteinbezogen werden. Somit ergeben sich folgende Fehlergrößen:

$v = 0$ $\quad \varepsilon_0(\mathrm{OO}) = [0.2-(0\cdot 0.7+0\cdot 0.3)]^2 = 0.04 \quad \varepsilon_0(\mathrm{OL}) = [0.2-(0\cdot 0.7+1\cdot 0.3)]^2 = 0.01$

$v = 1$: $\quad \varepsilon_1(\mathrm{OO}) = [0.7-(0\cdot 0.7+0\cdot 0.3)]^2 = 0.49 \quad \varepsilon_1(\mathrm{OL}) = [0.7-(0\cdot 0.7+1\cdot 0.3)]^2 = 0.16$

$\quad \varepsilon_1(\mathrm{LO}) = [0.7-(1\cdot 0.7+0\cdot 0.3)]^2 = 0.00 \quad \varepsilon_1(\mathrm{LL}) = [0{,}7-(1\cdot 0.7+1\cdot 0.3)]^2 = 0.09$

$v = 2$: $\quad \varepsilon_2(\mathrm{OO}) = [0.5-(0\cdot 0.7+0\cdot 0.3)]^2 = 0.25 \quad \varepsilon_2(\mathrm{OL}) = [0.5-(0\cdot 0.7+1\cdot 0.3)]^2 = 0.04$

$\quad \varepsilon_2(\mathrm{LO}) = [0.5-(1\cdot 0.7+0\cdot 0.3)]^2 = 0.04 \quad \varepsilon_2(\mathrm{LL}) = [0{,}5-(1\cdot 0{,}7+1\cdot 0{,}3)]^2 = 0.25$

$v = 3$: $\quad \varepsilon_3(\mathrm{OO}) = [0-(0\cdot 0.7+0\cdot 0.3)]^2 = 0.00 \quad \varepsilon_3(\mathrm{OL}) = [0-(0\cdot 0.7+1\cdot 0.3)]^2 = 0.09$

$\quad \varepsilon_3(\mathrm{LO}) = [0-(1\cdot 0.7+0\cdot 0.3)]^2 = 0.49 \quad \varepsilon_3(\mathrm{LL}) = [0-(1\cdot 0.7+1\cdot 0.3)]^2 = 1.00$

In Bild 1.20 sind diese Fehlergrößen und die daraus resultierenden Gesamtfehlergrößen eingetragen. Es gilt die gleiche Zuordnung der Knoten zu den Folgen wie in Bild 1.19.

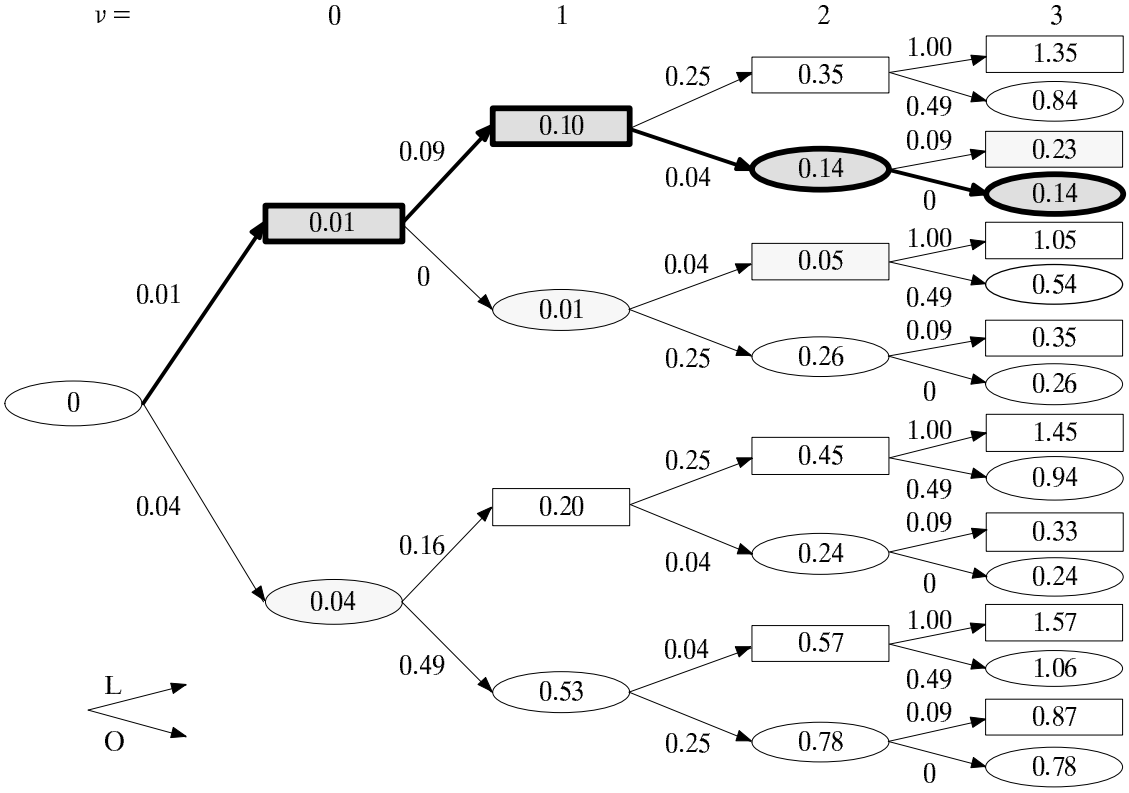


Bild 1.20: Fehlergrößen ε_v und Gesamtfehlergrößen γ_v im Baumdiagramm für das angegebene Beispiel mit den Parameterwerten $v = 1$ und $N = 3$.

Zum Zeitpunkt $\nu = 3$ beträgt die minimale Gesamtfehlergröße $\gamma_3(\mathrm{LLOO}) = 0.14$. Daraus ergeben sich die Symbole der nach den vorliegenden Abtastwerten mit größter Wahrscheinlichkeit gesendeten Folge zu $q_1 = \mathrm{L}$, $q_2 = \mathrm{L}$ und $q_3 = \mathrm{O}$. Die Entscheidung $q_4 = \mathrm{O}$ ist mit Sicherheit die richtige, da in diesem Beispiel eine Symbolfolge der Länge $N = 3$ betrachtet wird, und alle nachfolgenden Symbole als O vorausgesetzt sind.

Betrachten wir nun das Baumdiagramm zum Zeitpunkt $\nu = 2$. Hier ist die minimale Gesamtfehlergröße $\gamma_2(\mathrm{LOL}) = 0.05$. Das bedeutet: Eine Entscheidung zu diesem Zeitpunkt – basierend auf den Abtastwerten d_0, d_1 und d_2 – wäre zugunsten der Folge "LOL" anstelle der gesendeten Folge "LLO" ausgegangen. Erst durch Berücksichtigung des Abtastwertes $d_3 = 0$ kann "LOL" als wahrscheinlichste Folge ausgeschlossen werden.

Abschließend soll an diesem Beispiel noch eine äußerst wichtige Eigenschaft des Viterbi–Entscheiders angesprochen werden. Aus $\gamma_2(\mathrm{LLO}) = 0.14$ entstehen zum nächsten Zeitpunkt die zwei Gesamtfehlergrößen $\gamma_3(\mathrm{LLOO}) = 0.14$ durch Addition von $\varepsilon_3(\mathrm{OO}) = 0$ sowie $\gamma_3(\mathrm{LLOL}) = 0.23$ durch Addition von $\varepsilon_3(\mathrm{OL}) = 0.09$.

Zu $\gamma_2(\mathrm{OOO}) = 0.78$, $\gamma_2(\mathrm{OLO}) = 0.24$, und $\gamma_2(\mathrm{LOO}) = 0.26$ werden jeweils genau die gleichen Fehlergrößen hinzuaddiert wie zu $\gamma_2(\mathrm{LLO}) = 0.14$. Da diese Gesamtfehlergrößen alle größer als $\gamma_2(\mathrm{LLO})$ sind, steht bereits zum Zeitpunkt $\nu = 2$ fest, daß "OOO", "OLO" und "LOO" nicht Bestandteil der wahrscheinlichsten Folge sein können. Von den für $\nu = 2$ insgesamt vier als Ovale eingezeichneten Knoten muß deshalb nur der Knoten mit der kleinsten Gesamtfehlergröße weiter betrachtet werden.

Gleiches gilt für die durch Rechtecke markierten Knoten, die alle unter der Voraussetzung berechnet sind, daß das nächste Symbol $q_3 = \mathrm{L}$ ist. Auch zu diesen Gesamtfehlergrößen werden stets die gleichen Werte $\varepsilon_3(\mathrm{LO}) = 0.49$ bzw. $\varepsilon_3(\mathrm{LL}) = 1.00$ addiert, so daß man allein $\gamma_2(\mathrm{LLO}) = 0.05$ für die nachfolgende Entscheidung berücksichtigen muß.

Das Verfahren der Gesamtfehlerminimierung läßt sich im Trellisdiagramm anschaulich darstellen, das für vorliegendes Beispiel in Bild 1.21(a) dargestellt ist. Ein Vergleich mit Bild 1.20 zeigt, daß immer jene zwei Gesamtfehlergrößen einander gegenübergestellt werden, zu denen die gleichen Fehlergrößen hinzuaddiert werden. Von diesen wählt man jeweils die minimale Gesamtfehlergröße aus, die im folgenden mit Γ_ν bezeichnet wird.

$\Gamma_\nu(0)$ ist hierbei der minimale Wert aller Gesamtfehlergrößen $\gamma_\nu(...0)$, die in den Bildern 1.19 und 1.20 jeweils als Ovale dargestellt sind, und die jeweils unter der Voraussetzung berechnet werden, daß das nachfolgende Symbol $q_{\nu+1} = \mathrm{O}$ ist. Entsprechend gibt $\Gamma_\nu(\mathrm{L})$ das Minimum aller Rechtecke $\gamma_\nu(...\mathrm{L})$ an.

Für die beiden minimalen Gesamtfehlergrößen zum Zeitpunkt ν kann somit formal geschrieben werden:

$$\Gamma_\nu(\mathrm{O}) = \mathrm{Min}\left((\Gamma_{\nu-1}(\mathrm{O}) + \varepsilon_\nu(\mathrm{OO})),\ (\Gamma_{\nu-1}(\mathrm{L}) + \varepsilon_\nu(\mathrm{LO}))\right), \tag{1.50}$$

$$\Gamma_\nu(\mathrm{L}) = \mathrm{Min}\left((\Gamma_{\nu-1}(\mathrm{O}) + \varepsilon_\nu(\mathrm{OL})),\ (\Gamma_{\nu-1}(\mathrm{L}) + \varepsilon_\nu(\mathrm{LL}))\right). \tag{1.51}$$

Diese Gleichungen gelten wieder nur unter der Voraussetzung eines Vorläufers ($v = 1$). Bei größeren Werten von v gibt es entsprechend mehr minimale Gesamtfehlergrößen.

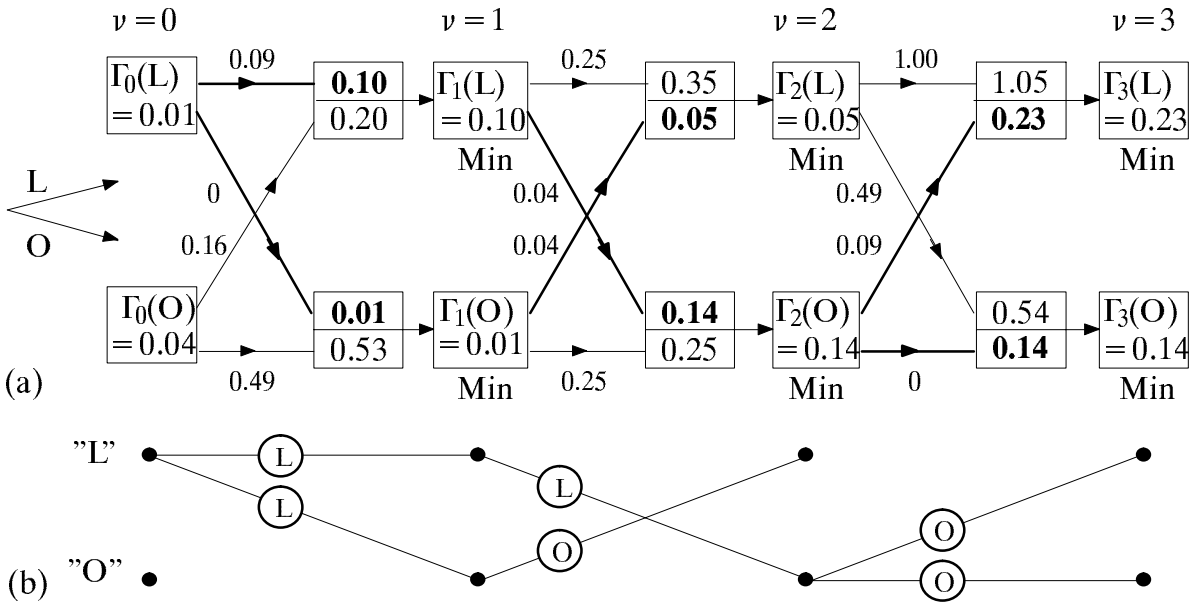


Bild 1.21: Trellisdiagramm für das betrachtete Beispiel in zwei verschiedenen Variationen.

Außer den minimalen Gesamtfehlergrößen müssen auch die dazugehörigen Symbolfolgen ("*Pfade*") abgespeichert werden. Diese sind in Bild 1.21(a) hervorgehoben. Ist der Vorgänger von Γ_ν im ausgewählten Zweig $\Gamma_{\nu-1}(\mathrm{O})$, so ist das dazugehörige Symbol "O". In Bild 1.21(a) ist dies daran zu erkennen, daß der hervorgehobene Pfad der untere der beiden ankommenden Pfeile ist. Im anderen Fall ist das ausgewählte Symbol "L".

Zur Zeit $\nu = 3$ ergeben sich z.B. sowohl $\Gamma_3(\mathrm{O}) = 0.14$ als auch $\Gamma_3(\mathrm{L}) = 0.23$ aus dem Vorgänger $\Gamma_2(\mathrm{O}) = 0.14$, so daß die beiden ausgewählten Zweige jeweils dem Symbol "O" zugeordnet sind. Dagegen ist für $\nu = 2$ ein Pfad mit "O", der andere mit "L" belegt.

Das Trellisdiagramm von Bild 1.21(a) läßt sich noch weiter vereinfachen, indem man nur noch die ausgewählten Zweige einzeichnet, die zu minimalen Gesamtfehlergrößen führen. Im Fall $v = 1$ bleiben also zu jedem Zeitpunkt nur noch zwei ausgewählte Zweige übrig. Diesen Zweigen wird – wie oben beschrieben – ein "O" zugeordnet, wenn die zugehörige Fehlergröße $\varepsilon_\nu(\mathrm{OO})$ bzw. $\varepsilon_\nu(\mathrm{OL})$ ist, und ein "L" bei $\varepsilon_\nu(\mathrm{LO})$ bzw. $\varepsilon_\nu(\mathrm{LL})$. Das vereinfachte Trellisdiagramm für dieses Beispiel zeigt Bild 1.21(b).

Die beiden zum Zeitpunkt $\nu = 3$ wahrscheinlichsten Symbolfolgen ergeben sich, indem man von $\nu = 0$ ab die beiden durchgehenden Pfade vorwärts bis zum Ende liest. Dies besagt, daß die ersten drei Symbole auf jeden Fall als "LLO" entschieden werden, unabhängig davon, ob das vierte Symbol "O" oder "L" ist.

Der Vorteil des Trellisdiagramms besteht darin, daß sich die Anzahl der Knoten und Zweige nicht bei jedem Iterationsschritt um den Faktor 2 vergrößert. Durch die Auswahl der minimalen Gesamtfehlergrößen werden nur noch diejenigen Symbolfolgen weiter betrachtet, die als Teil der wahrscheinlichsten Folge überhaupt noch in Frage kommen. Daraus folgt das allgemeingültige und wichtige Ergebnis, daß bei einem Grundimpuls mit v Vorläufern von den insgesamt $2^{\nu+v}$ verschiedenen Gesamtfehlergrößen zu jedem Zeitpunkt nur jeweils 2^v minimale Gesamtfehlergrößen berechnet und abgespeichert werden müssen, wodurch sich der Aufwand für eine Realisierung stark reduziert.

1.5.3 Ablaufdiagramm eines Viterbi–Entscheiders

Die einzelnen Schritte des Viterbi–Entscheiders werden nun stichpunktartig zusammengefaßt. Bild 1.22 zeigt das zugehörige Ablaufdiagramm (gültig für $v = 2$). Im folgenden wird vorausgesetzt, daß der Grundimpuls nicht mehr als v Vorläufer aufweist und daß die Grundimpulswerte $g_0, \ldots, g_{-v}$ bekannt seien. Desweiteren wird angenommen, daß die Startphase abgeschlossen ist. Die notwendigen Voreinstellungen zum Zeitpunkt $\nu = 1$ (vgl. [37]) werden hier nicht beschrieben.

Zu jedem Zeitpunkt gibt es 2^v minimale Gesamtfehlergrößen. Γ_ν(LO) kennzeichnet z.B. die minimalen Gesamtfehler unter der Voraussetzung, daß $v = 2$ ist und daß die bei der Entscheidung des Symbols q_ν zu berücksichtigenden Symbole $q_{\nu+1}$= L und $q_{\nu+2}$= O sind. Zu jedem Zeitpunkt ν sind folgende Einzelschritte durchzuführen (vgl. [15]):

(a) Berechnung der 2^{v+1} Fehlergrößen $\varepsilon_\nu^{(i)}$ entsprechend Gl. (1.44) aus dem aktuellen Detektionsabtastwert d_ν und den möglichen Detektionsnutzabtastwerten $d_{S\nu}$.

(b) Berechnung der 2^{v+1} Gesamtfehlergrößen $\gamma_\nu^{(i)}$ entsprechend (1.45) aus $\gamma_{\nu-1}^{(i)}$ und $\varepsilon_\nu^{(i)}$.

(c) Auswahl der 2^v minimalen Gesamtfehlergrößen $\Gamma_\nu^{(i)}$ aus jeweils zwei Gesamtfehlergrößen entsprechend Bild 1.22. Γ_ν(LO) ergibt sich beispielsweise als der kleinere Wert von γ_ν(OLO) und γ_ν(LLO).

(d) Ermittlung der 2^v bedingt detektierbaren Teilsymbolfolgen $V_\nu^{(i)}$ aus den zusammenhängenden Pfaden im vereinfachten Trellisdiagramm (vgl. nachfolgendes Beispiel).

(e) Bestimmung der Anzahl Z_ν der übereinstimmenden Symbole in den 2^v Teilsymbolfolgen $V_\nu^{(i)}$ und Ausgabe der endgültig entschiedenen Symbole (falls $Z_\nu > 0$).

(f) Bestimmung der Anzahl $L_\nu = L_{\nu-1} + 1 - Z_\nu$ noch nicht entschiedener Symbole, die zum nächsten Zeitpunkt $(\nu+1)$ noch betrachtet werden müssen.

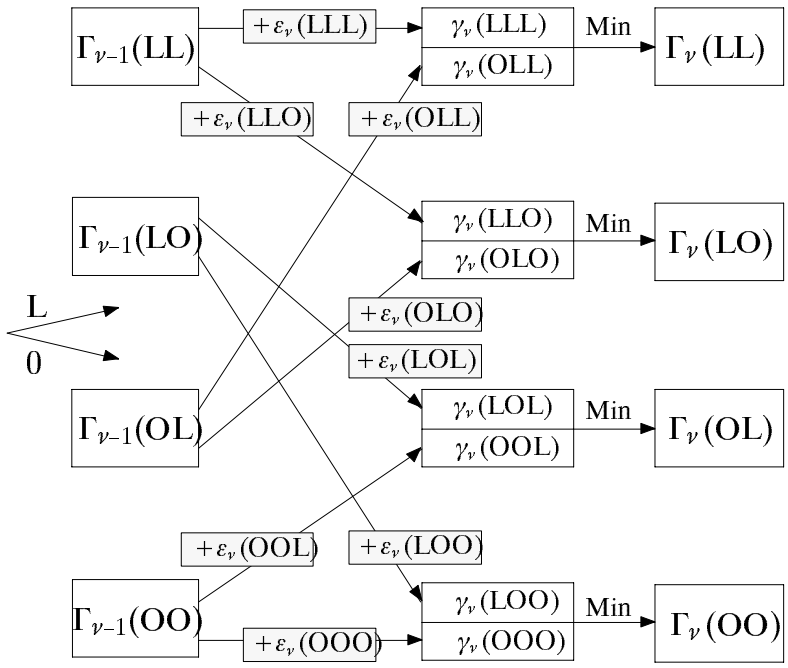


Bild 1.22: Berechnung der minimalen Gesamtfehlergrößen bei zwei Vorläufern.

Beispiel: Bild 1.23 zeigt ein Trellisdiagramm für den Sonderfall $v = 2$ und entsprechend $2^v = 4$ Zuständen. Diese sind mit "OO", "OL", "LO" und "LL" bezeichnet. Die vier zum Zeitpunkt $\nu = 10$ ausgewählten Pfade sind hervorgehoben. In Tabelle 1.3 sind die dazugehörigen bedingt detektierbaren Teilsymbolfolgen angegeben. Stimmen zu einem Zeitpunkt ν alle vier Teilsymbolfolgen überein wie z.B. bei $\nu = 5$, so ist die Detektion der Symbole $v_1 \ldots v_\nu$ abgeschlossen. Ist dies nicht der Fall, so muß die Entscheidung zu einem späteren Zeitpunkt erfolgen, wobei nur noch der rechts von der Pfeilmarkierung stehende Teil der Symbolfolgen zu analysieren ist. Z_ν und L_ν geben die Anzahl der aktuell entscheidbaren bzw. noch nicht entscheidbaren Symbole an (vgl. Versuch D9).

Tabelle 1.3: Teilsymbolfolgen und Symbolausgabe für das Trellisdiagramm von Bild 1.23.

	bedingt detektierbare Teilsymbolfolgen						
ν	V_ν(LL)	V_ν(L0)	V_ν(0L)	V_ν(00)	Z_ν	L_ν	auszugebende Symbole
1	L	L	L	L	1	0	$v_1 = \mathrm{L}$
2	L 0	L 0	L 0	L L	0	1	
3	L 0L	L 0L	L 0L	L 0L	2	0	$v_2 = 0;\ v_3 = \mathrm{L}$
4	L0L L	L0L L	L0L L	L0L L	1	0	$v_4 = \mathrm{L}$
5	L0LL 0	L0LL 0	L0LL 0	L0LL 0	1	0	$v_5 = 0$
6	L0LL0 0	L0LL0 L	L0LL0 0	L0LL0 L	0	1	
7	L0LL0 L0	L0LL0 L0	L0LL0 L0	L0LL0 L0	2	0	$v_6 = \mathrm{L};\ v_7 = 0$
8	L0LL0L0 0	L0LL0L0 L	L0LL0L0 L	L0LL0L0 L	0	1	
9	L0LL0L0 L0	L0LL0L0 L0	L0LL0L0 L0	L0LL0L0 L0	2	0	$v_8 = \mathrm{L};\ v_9 = 0$
10	L0LL0L0L0 0	L0LL0L0L0 0	L0LL0L0L0 0	L0LL0L0L0 0	1	0	$v_{10} = 0$

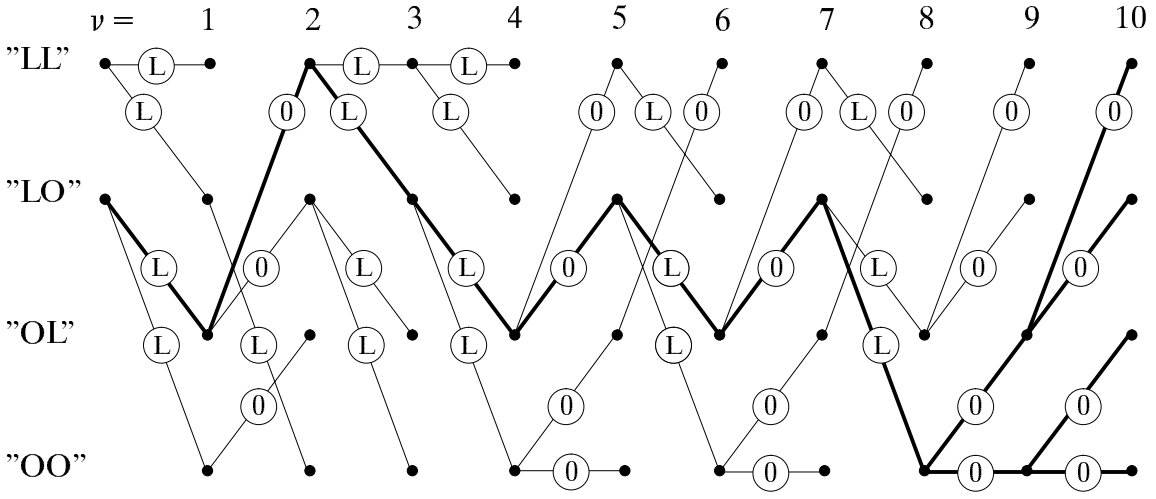


Bild 1.23: Beispiel eines Trellisdiagramms für einen Grundimpuls mit 2 Vorläufern.

1.5.4 Fehlerwahrscheinlichkeit bei Viterbi–Entscheidung

Die exakte Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit p_B eines Übertragungssystems mit Viterbi–Entscheidung ist i.a. sehr aufwendig (vgl. z.B. [15]). Hier muß die Differenzenergie zwischen allen zulässigen Folgen ermittelt werden, wobei p_B im wesentlichen durch die minimale Differenzenergie bestimmt wird.

Weiterhin ist bei der Fehlerwahrscheinlichkeitsberechnung auch der Einfluß der beiden in Bild 1.17 angegebenen Filter zu berücksichtigen. Während das Matched–Filter $H_{MF}(f)$ das Eingangsrauschen $n(t)$ in bestmöglicher Weise unterdrückt, bewirkt das Dekorrelationsfilter $H_{DF}(f)$ i.a. einen Anstieg der Störleistung σ_d^2 vor dem Viterbi–Entscheider. Dieses Filter ist jedoch unbedingt erforderlich, da der Viterbi–Algorithmus seine volle Leistungsfähigkeit nur dann erreicht, wenn die Störanteile $d_{N\nu}$ der einzelnen Abtastwerte unkorreliert sind.

Zur Abschätzung einer groben Näherung für die (mittlere) Fehlerwahrscheinlichkeit wird die Unkorreliertheit der gaußverteilten Störungen am Entscheider vorausgesetzt. Der Effektivwert σ_d des Detektionsstörsignals sei ebenso bekannt wie die Grundimpulswerte $g_0, \ldots g_{-v}$ gemäß (1.42). Der Viterbi–Entscheider sei so dimensioniert, daß alle von Null verschiedenen Grundimpulswerte berücksichtigt werden.

Bezeichnet man mit g_{max} den größten aller Grundimpulswerte, so lautet die Näherung für die Fehlerwahrscheinlichkeit des Viterbi–Entscheiders:

$$p_{VE} \approx Q\left(\frac{g_{max}}{\sigma_d}\right) . \tag{1.52}$$

Dieses Ergebnis wird nun anhand einiger typischer Beispiele diskutiert und mit den entsprechenden Fehlerwahrscheinlichkeiten p_{SE} (gültig für den Schwellenwertentscheider) bzw. p_{QR} (bei Entscheidungsrückkopplung) verglichen. Zur Vereinfachung werden alle Größen normiert betrachtet.

Sind alle Grundimpulswerte mit Ausnahme von g_0 identisch Null (z.B. bei Nyquistentzerrung), so weist der Viterbi–Entscheider die gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit wie der einfache Schwellenwertentscheider auf. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da auch der Viterbi–Empfänger mit $v = 0$ eine symbolweise Entscheidung trifft. Das bedeutet, daß der Einsatz eines Viterbi– bzw. eines Korrelationsempfängers nur bei Vorhandensein von Impulsinterferenzen von Vorteil ist. Ebenso ist der Viterbi–Entscheider gut geeignet, anders geartete statistische Bindungen im Nutzsignal zu detektieren. Ausgenutzt wird dies beispielsweise bei der Decodierung von Faltungscodes.

Betrachten wir nun die normierten Grundimpulswerte $g_0 = 0.6, g_{-1} = 0.1$ und $g_1 = 0.3$, d.h. $v = 2$. Bei Schwellenwertentscheidung ergibt sich entsprechend Abschnitt 1.1:

$$\begin{aligned} p_B = p_{SE} = \frac{1}{4}\cdot Q\left(\frac{g_0 + g_1 + g_{-1}}{\sigma_d}\right) + \frac{1}{4}\cdot Q\left(\frac{g_0 + g_1 - g_{-1}}{\sigma_d}\right) \\ + \frac{1}{4}\cdot Q\left(\frac{g_0 - g_1 + g_{-1}}{\sigma_d}\right) + \frac{1}{4}\cdot Q\left(\frac{g_0 - g_1 - g_{-1}}{\sigma_d}\right) . \end{aligned} \tag{1.53}$$

Mit dem (normierten) Störeffektivwert $\sigma_d = 0.1$ erhält man $p_{SE} \approx Q(2)/4 \approx 0.57\%$.

Bei einem Empfänger mit idealer Entscheidungsrückkopplung ergibt sich unter Berücksichtigung von $g_1 = 0$ (Kompensation des Nachläufers):

$$p_B = p_{QR} = \frac{1}{2} \cdot Q(\frac{g_0 + g_{-1}}{\sigma_d}) + \frac{1}{2} \cdot Q(\frac{g_0 - g_{-1}}{\sigma_d}) . \tag{1.54}$$

Daraus folgt mit obigen Zahlenwerten $p_{QR} \approx Q(5)/2 \approx 0.14 \cdot 10^{-6}$.

Die Fehlerwahrscheinlichkeit bei Anwendung des Viterbi–Entscheiders (mit $v = 2$) kann mit (1.52) angenähert werden. Man erhält $p_{VE} \approx Q(6) \approx 10^{-9}$. Dies entspricht gegenüber dem Schwellenwertentscheider einem Störabstandsgewinn von mehr als 7 dB.

Weiterhin ist diesem Zahlenbeispiel zu entnehmen, daß beim Viterbi–Empfänger (oder bei Maximum–Likelihood–Decodierung allgemein) "Vorläufer" durchaus auch größer als der Hauptwert sein können. Nach (1.52) richtet sich die Fehlerwahrscheinlichkeit allein nach dem größten aller Grundimpulswerte. Eine Zeitverschiebung gegenüber dem aus Darstellungsgründen gewählten Koordinatensystem um Vielfache der Symboldauer T ändert die Leistungsmerkmale der Viterbi–Entscheidung nicht. Um den in Abschnitt 1.5.3 angegebenen Algorithmus direkt anwenden zu können, müssen folgende Grundimpulswerte eingestellt werden: $g_0 = 0.3$, $g_{-1} = 0.6$ und $g_{-2} = 0.1$.

Dieser (sehr grobe) Systemvergleich wurde unter der stark vereinfachenden Annahme $\sigma_d = \text{const.}$ durchgeführt. Berücksichtigt man weiterhin, daß eine Gesamtoptimierung des Systems mit Viterbi–Entscheidung (vgl. Bild 1.17) zu wesentlich schmalbandigeren Filtern führt als die Optimierung des herkömmlichen Systems, so ist bei Viterbi–Entscheidung unter der Voraussetzung einer konstanten Rauschleistungsdichte N_0 (am Empfängereingang) für den Störeffektivwert σ_d (vor dem Entscheider) eigentlich ein deutlich kleinerer Wert einzusetzen als bei Schwellenwertentscheidung. Das bedeutet, daß der Störabstandsgewinn u.U. noch größer ist, als es die genannten Werte vermitteln.

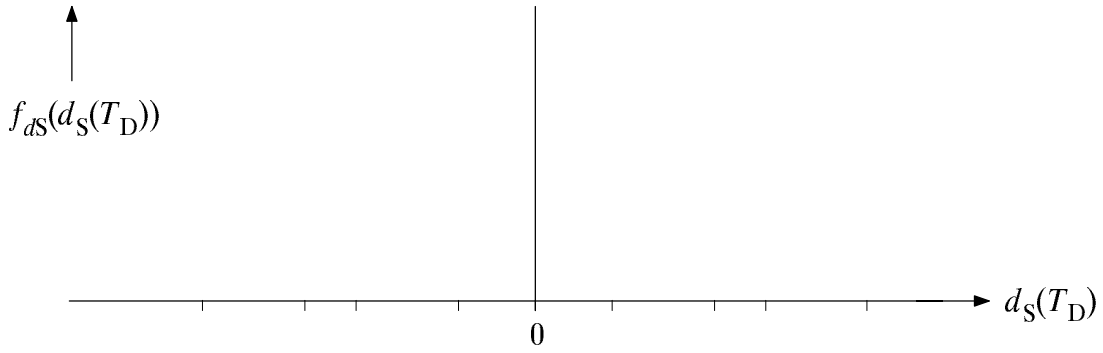
Weitere Zahlenbeispiele finden Sie in der Versuchsdurchführung D10.

2 Vorbereitungsfragen

V1 Bitfehlerwahrscheinlichkeit

Betrachtet wird ein binäres bipolares Übertragungssystem entsprechend Bild 1.1. Der Detektionsgrundimpuls $g_d(t)$ vor dem Schwellenwertentscheider ist durch seine Abtastwerte $g_{-1} = g_d(-T)$, $g_0 = g_d(0)$ und $g_1 = g_d(T)$ vollständig beschrieben; alle anderen Abtastwerte sind gleich 0. Der Störeffektivwert des Detektionssignals sei σ_d.

a) Skizzieren Sie die WDF der Detektionsnutzabtastwerte $d_S(T_D)$ für den Sonderfall $g_0 > g_1 > g_{-1} > 0$ und beschriften Sie die Abszisse in unterem Diagramm. Geben Sie die mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_B sowie die ungünstigte Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_U allgemein an. Berücksichtigen Sie die Symmetrie bezüglich der Entscheiderschwelle $E = 0$ in geeigneter Weise. Wie groß ist die Augenöffnung?



b) Berechnen Sie p_B und p_U für $g_0 = 0.6$ V, $g_{-1} = g_1 = 0.2$ V und $\sigma_d = 0.2$ V. Verwenden Sie hierzu die Tabelle im Anhang. Wie groß ist die Augenöffnung?

c) Berechnen Sie die Signalstörleistungsverhältnisse ϱ_d und ϱ_U in dB.

d) Welche Werte erhält man bei sonst gleichen Verhältnissen mit $g_{-1} = g_1 = 0$?

V2 Gaußförmiges Empfangsfilter

Gegeben sei ein redundanzfreies binäres bipolares Basisbandsystem mit der Bitrate R_B = 100 Mbit/s. Die Sendeimpulse seien "NRZ–rechteckförmig" und besitzen die möglichen Amplitudenwerte ±1V. Die Rauschleistungsdichte des AWGN–Kanals sei $N_0 = 10^{-9}$ V^2/Hz. Als Empfangsfilter wird ein Gauß–Tiefpaß mit dem Frequenzgang

$$H_E(f) = \exp\left(-\pi \cdot \left(\frac{f}{2 \cdot f_E}\right)^2\right) \tag{2.1}$$

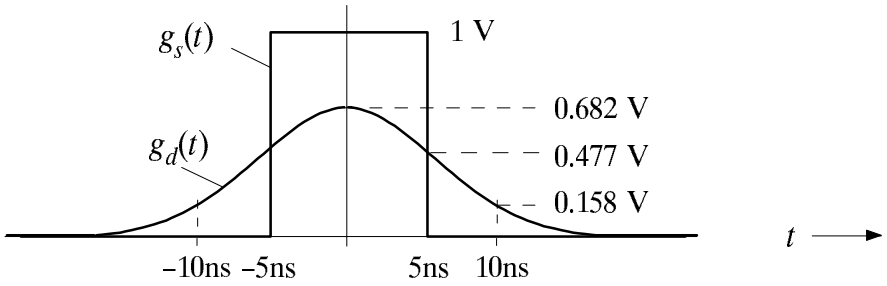
verwendet, wobei f_E die Grenzfrequenz bezeichnet. Der Detektionsgrundimpuls ist dann

$$g_d(t) = g_s(t) * h_E(t) = 2 \cdot f_E \cdot s_0 \cdot \int_{t-T/2}^{t+T/2} e^{-\pi(2f_E \cdot \tau)^2} \, d\tau \ . \tag{2.2}$$

Mit dem komplementären Gaußschen Fehlerintegral Q(x), das im Anhang tabelliert ist, kann hierfür auch geschrieben werden:

$$g_d(t) = s_0 \cdot \left[Q\left(2\sqrt{2\pi} \cdot f_E \cdot \left(t - \frac{T}{2}\right)\right) - Q\left(2\sqrt{2\pi} \cdot f_E \cdot \left(t + \frac{T}{2}\right)\right)\right] \ . \tag{2.3}$$

Dieser Impuls ist in nachfolgender Skizze für f_E = 40 MHz dargestellt.



a) Wie groß ist die die Energie pro Bit (E_B) sowie E_B/N_0 (in dB)?

b) Berechnen Sie $g_d(0)$. Welche Werte ergeben sich für f_E = 40 MHz und f_E = 80 MHz? Verwenden Sie dabei die Tabelle im Anhang. Überprüfen Sie ersteren Wert anhand obiger Skizze.

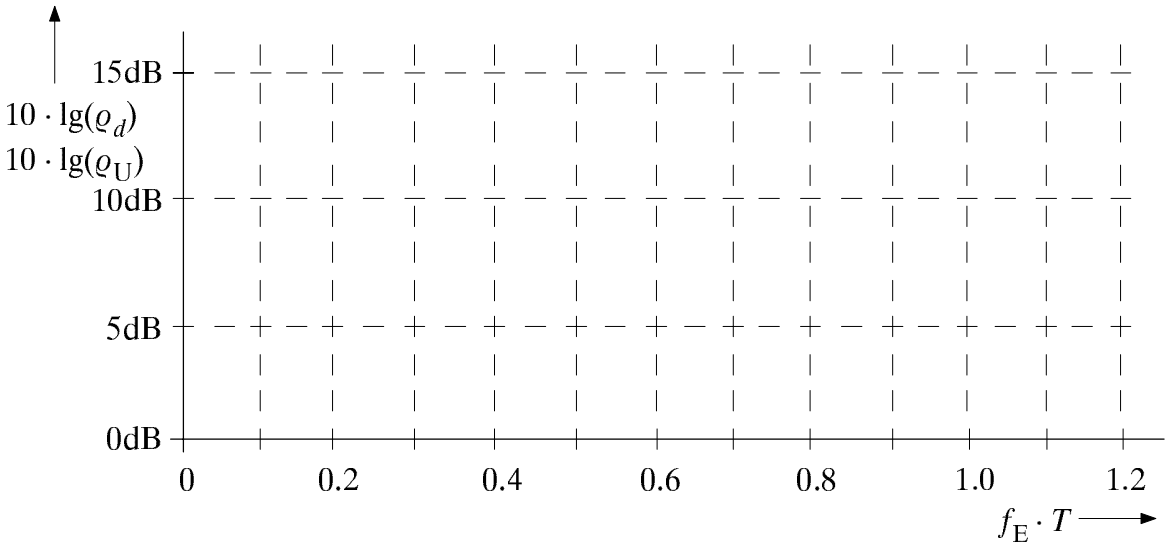
c) Begründen Sie, daß bei gaußförmigem Empfangsfilter die halbe Augenöffnung entsprechend folgender Gleichung berechnet werden kann:

$$\frac{\ddot{o}(T_D)}{2} = 2 \cdot g_d(0) - s_0 \ . \tag{2.4}$$

Berechnen Sie $\ddot{o}(T_D)$ für $f_E = 40$ MHz und $f_E = 80$ MHz und vergleichen Sie die Werte mit den Ergebnissen von Tabelle 1.1 in Abschnitt 1.1.2.

d) Im Versuch *"Digitale Modulationsverfahren"* (Abschnitt 1.1.3) wurde gezeigt, daß bei der vorliegenden Konstellation für die Detektionsstörleistung gilt: $\sigma_d^2 = N_0 \cdot f_E / \sqrt{2}$. Überprüfen Sie die Werte von Tabelle 1.1 anhand dieser Gleichung für $f_E = 40$ MHz und $f_E = 80$ MHz.

e) Skizzieren Sie die in Tabelle 1.1 angegebenen Störabstände $10 \cdot \lg(\varrho_d)$ und $10 \cdot \lg(\varrho_U)$ in Abhängigkeit der normierten Grenzfrequenz $f_E \cdot T$ und diskutieren Sie die Kurven.



V3 Entscheidungsrückkopplung

Gegeben sind die Abtastwerte eines gaußförmigen Detektionsgrundimpulses

$$g_d(t) = 1\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{-\pi \cdot \left(\frac{t}{1.5 \cdot T}\right)^2} \tag{2.5}$$

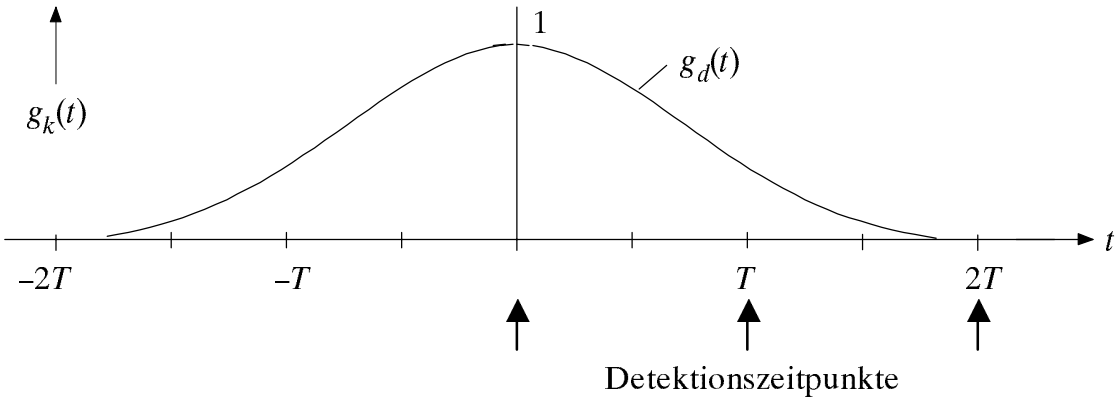
zu einigen Zeitpunkten durch nachfolgende Tabelle.

t/T	0.00	0.25	0.50	1.00	1.25	1.50	2.00
$g_d(\pm\, t)/1\mathrm{V}$	1.000	0.916	0.705	0.248	0.113	0.043	0.004

a) Vergleichen Sie die Augenöffnungen für ein Binärsystem (Symboldauer T) ohne bzw. mit idealer Entscheidungsrückkopplung (QR), und zwar unter der Voraussetzung, daß der Detektionszeitpunkt $T_\mathrm{D} = 0$ ist. Für $t > 2T$ kann der Impuls näherungsweise zu Null angenommen werden.

b) Um welchen Faktor G_QR verbessert demnach die ideale Entscheidungsrückkopplung das Signalstörleistungsverhältnis? Welchem Wert entspricht dies in dB?

c) Wie müssen die Koeffizienten a_1 und a_2 eines Laufzeitfilters gewählt werden, damit es zur Kompensation der Impulsnachläufer geeignet ist? Die Amplitude des Sinkensignals sei hierbei ± 1V. Skizzieren Sie den korrigierten Impuls $g_k(t)$ für $T_D = 0$ und $T_V = T/2$ in das nachfolgende Diagramm. Zum Vergleich ist der Detektionsgrundimpuls $g_d(t)$ bereits eingezeichnet.



d) Kann beim System mit (idealer) QR durch eine Vorverlegung des Detektionszeitpunktes T_D eine weitere Verbesserung erzielt werden? Berechnen Sie die Augenöffnungen sowie den Gewinn G_{QR} (in dB) gegenüber einem System ohne QR für die Werte $T_D = -T/4$ und $T_D = -T/2$.

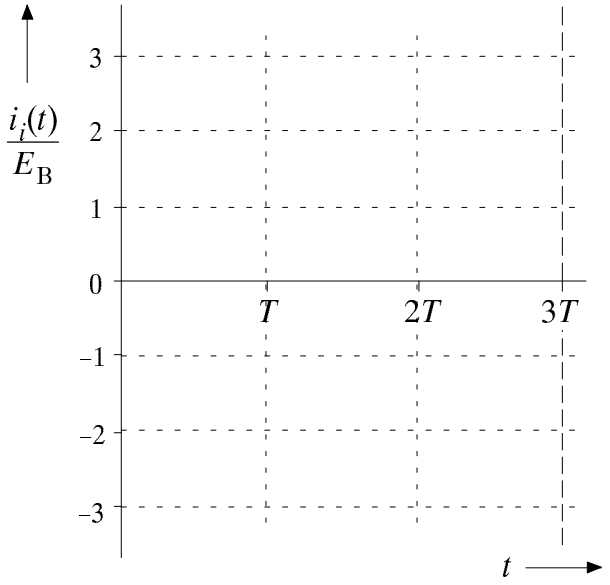
e) Fassen Sie Ihre Ergebnisse in nachfolgender Tabelle zusammen.

	ohne QR	ideale QR ($T_D = 0$)	ideale QR ($T_D = -T/4$)	ideale QR ($T_D = -T/2$)
$ö(T_D)$				
$10 \cdot \lg(G_{QR})$				

V4 Korrelationsempfänger

Betrachtet wird ein Digitalempfänger, der eine $N = 3$ Bit lange Binärfolge gleichzeitig entscheidet. Das Nutzsignal sei rechteckförmig, Störungen werden nicht berücksichtigt.

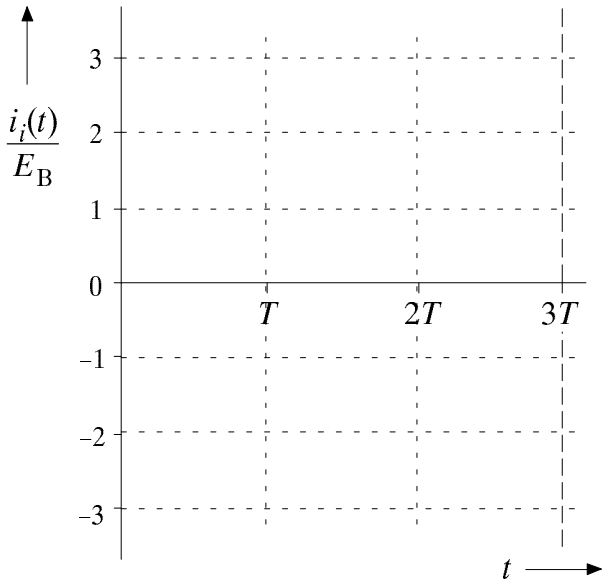
a) Gehen Sie zunächst davon aus, daß das Signal $s_3(t)$, d.h. die Symbolfolge "OLL", gesendet wurde. Zeichnen Sie analog zu Bild 1.16 das Baumdiagramm in nachfolgendes Diagramm. Gehen Sie dabei von der Voraussetzung aus, daß die Symbole bipolar (antipodisch) dargestellt sind, und zwar das Symbol "O" mit $-s_0$ und das Symbol "L" mit $+s_0$. E_B bezeichnet den Wert $s_0^2 \cdot T$, also die "Energie pro Bit".
Ist eine genaue Voraussage möglich, in welche Symbolfolgen die gesendete Folge "OLL" bei Vorhandensein von Störungen am wahrscheinlichsten verfälscht werden?



b) Wie unterscheidet sich das Baumdiagramm, wenn die Impulse nicht rechteckförmig sind, sich aber auch nicht überlappen (d.h. keine Impulsinterferenzen vorliegen)?

c) Wie unterscheidet sich das Baumdiagramm (insbesondere hinsichtlich der Endwerte) bei Vorhandensein von Impulsinterferenzen? Genügt dann das in obiger Skizze dargestellte Integrationsintervall?

d) Zeichnen Sie nun das Baumdiagramm unter der Voraussetzung, daß das Signal $s_0(t)$, d.h. die Symbolfolge "OOO", gesendet wurde. Gehen Sie hierbei wie im Punkt a) von störungsfreien Rechteckimpulsen aus.



e) Welchen Verlauf haben die im Baumdiagramm dargestellten Integrale bei unipolaren Signalen? Hierbei soll dem Symbol O V die Amplitude "0" und dem Symbol "L" die Amplitude $+s_0$ zugeordnet werden. Gehen Sie wie bei Punkt d) davon aus, daß das Signal $s_0(t)$, d.h. die Symbolfolge "OOO", gesendet wurde.

f) Warum trifft der Korrelationsempfänger auch hier eine richtige Entscheidung?

V5 Viterbi-Empfänger

Gegeben sei ein bipolar codiertes Binärsystem, das eine Nachricht der Länge $N = 5$ überträgt. Die Eigenschaft "bipolar" gibt an, daß das Symbol "O" mit –1 und das Symbol "L" mit +1 dargestellt wird (alle Werte sind normiert). Zur Detektion der Nachricht wird ein Viterbi–Empfänger benutzt. Der Grundimpuls besitze nur 2 von 0 verschiedene Abtastwerte, nämlich $g_0 = 0.6$ und $g_{-1} = 0.4$. Zu den Detektionszeitpunkten ν treten folgende gestörten Abtastwerte auf: $r_1 = -0.8$; $r_2 = 0.1$; $r_3 = 0.5$; $r_4 = -0.7$; $r_5 = -2.0$. Somit erhält man für die Fehlergrößen zu den Zeitpunkten $\nu = 1 \ldots 3$:

$\nu = 1$: $\varepsilon_1(\mathrm{LL}) = [-0.8 - ((+1)\cdot 0.6 + (+1)\cdot 0.4)]^2 = [-0.8 - 1]^2 = 3.24$

$\varepsilon_1(\mathrm{LO}) = [-0.8 - ((+1)\cdot 0.6 + (1)\cdot 0.4)]^2 = [-0.8 - 0.2]^2 = 1.00$

$\varepsilon_1(\mathrm{OL}) = [-0.8 - ((-1)\cdot 0.6 + (+1)\cdot 0.4)]^2 = [-0.8 + 0.2]^2 = 0.36$

$\varepsilon_1(\mathrm{OO}) = [-0.8 - ((-1)\cdot 0.6 + (-1)\cdot 0.4)]^2 = [-0.8 + 1]^2 = 0.04$

$\nu = 2$: $\varepsilon_2(\mathrm{LL}) = [0.1 - 1]^2 = 0.81$

$\varepsilon_2(\mathrm{LO}) = [0.1 - 0.2]^2 = 0.01$

$\varepsilon_2(\mathrm{OL}) = [0.1 + 0.2]^2 = 0.09$

$\varepsilon_2(\mathrm{OO}) = [0.1 + 1]^2 = 1.21$

$\nu = 3$: $\varepsilon_3(\mathrm{LL}) = [0.5 - 1]^2 = 0.25$

$\varepsilon_3(\mathrm{LO}) = [0.5 - 0.2]^2 = 0.09$

$\varepsilon_3(\mathrm{OL}) = [0.5 + 0.2]^2 = 0.49$

$\varepsilon_3(\mathrm{OO}) = [0.5 + 1]^2 = 2.25$

a) Berechnen Sie Fehlergrößen zu den Zeitpunkten $\nu = 4$ und $\nu = 5$.

$\nu = 4$: $\varepsilon_4(\mathrm{LL}) =$

$\varepsilon_4(\mathrm{LO}) =$

$\varepsilon_4(\mathrm{OL}) =$

$\varepsilon_4(\mathrm{OO}) =$

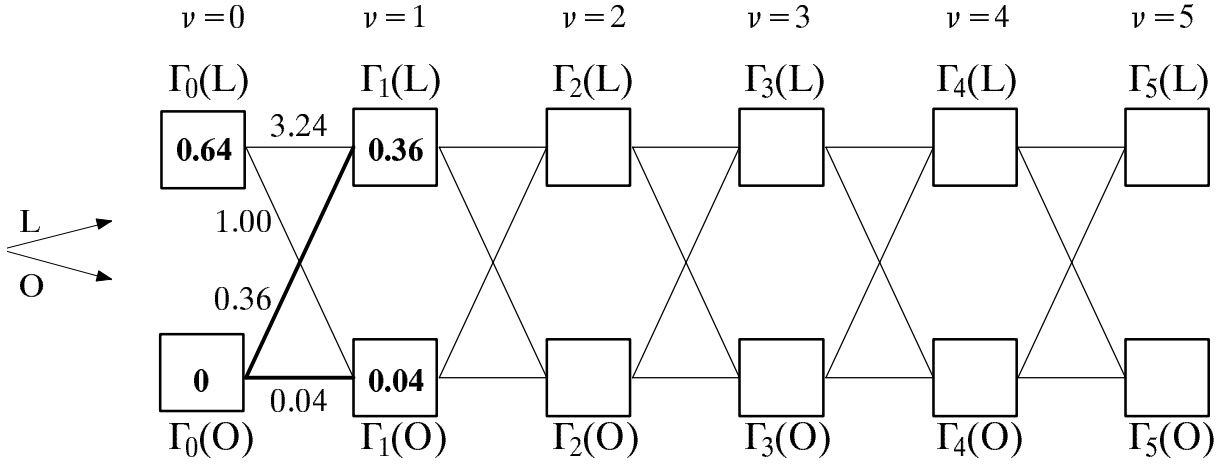
$\nu = 5$: $\varepsilon_5(\mathrm{LL}) =$

$\varepsilon_5(\mathrm{LO}) =$

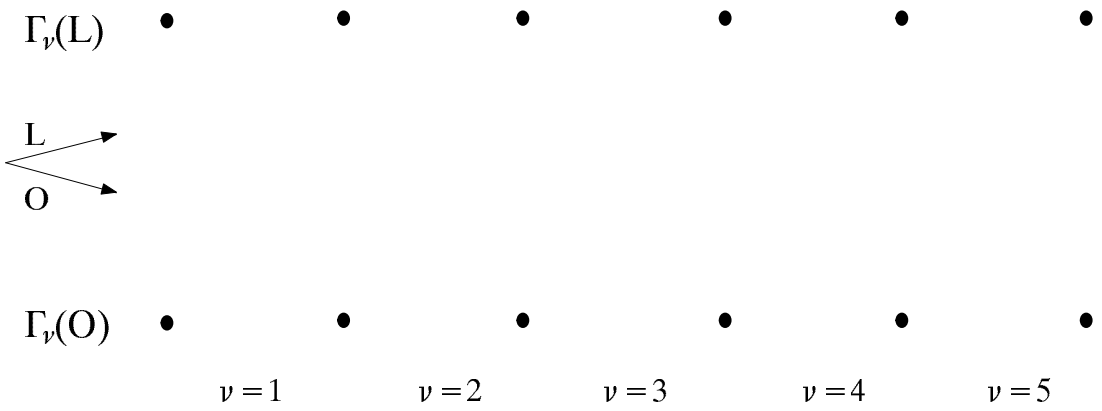
$\varepsilon_5(\mathrm{OL}) =$

$\varepsilon_5(\mathrm{OO}) =$

b) Vervollständigen Sie das nachfolgende Trellisdiagramm.



c) Zeichnen Sie das vereinfachte Trellisdiagramm. Ordnen Sie dabei den ausgewählten Zweigen die entsprechenden Symbole "O" bzw. "L" zu.



d) Vervollständigen Sie nachfolgende Tabelle, indem Sie die durchgehenden Pfade verfolgen.

ν	bedingt detektierbare Teilsymbolfolgen $V_\nu(\mathrm{O})$	$V_\nu(\mathrm{L})$	Z_ν	L_ν	ausgegebene Sinkensymbole
1					
2					
3					
4					
5					

3 Versuchsdurchführung

D1 Nyquistkriterien

Diesen ersten Versuch sollen Sie mit dem Programm *"nyq"* durchführen. Unter dem Menüpunkt 1 können die Spektren und zugehörigen Zeitfunktionen sowie die Augendiagramme eines Trapez– und eines Cosinus–Rolloff–Tiefpasses betrachtet werden.

Sie haben sowohl bezüglich der Grenzfrequenz f_G als auch des Rolloff–Faktors r freie Wahl. Gehen Sie davon aus, daß $H_N(0) = 1$ ist. Dies entspricht für das Spektrum des Detektionsgrundimpulses: $G_d(0) = s_0 \cdot T$.

a) Betrachten Sie zunächst das rechteckförmige Spektrum (z.B. einzustellen als Trapez–Tiefpaß mit Rolloff–Faktor $r = 0$) mit der (normierten) Grenzfrequenz $f_G \cdot T = 0.5$. Welchen Verlauf hat hier die Zeitfunktion $g_d(t)$?

b) Interpretieren Sie das Augendiagramm (des Binärsystems). Besteht eine Diskrepanz zwischen Theorie und Simulation hinsichtlich der horizontalen Augenöffnung?

c) Es sei weiterhin $r = 0$. Wählen Sie nun die (normierte) Grenzfrequenz $f_G \cdot T = 0.3$ bzw. $f_G \cdot T = 0.4$. Interpretieren und verallgemeinern Sie die Ergebnisse. Warum besteht bei $f_G \cdot T = 0.4$ eine Diskrepanz zwischen Theorie und Simulation?

d) Wählen Sie nun die Grenzfrequenzen $f_G \cdot T = 0.6$ bzw. $f_G \cdot T = 0.9$. Interpretation.

e) Vergleichen Sie nun die normierten Grenzfrequenzen $f_G \cdot T = 0.5$ bzw. $f_G \cdot T = 1.0$. Ist bei rechteckförmigem Impuls eine Nyquistentzerrung mit $f_G \cdot T = 1$ sinnvoll?

Vergleichen Sie abschließend den Trapez– und den Cosinus–Rolloff–Tiefpaß jeweils bei fester Grenzfrequenz $f_G \cdot T = 0.5$ und verschiedenen Rolloff–Faktoren ($r = 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75$ und 1) hinsichtlich Abklingverhalten, Überschwinger und vertikaler Augenöffnung. Beantworten Sie abschließend folgende Fragen:

f) Wann ist das erste Nyquistkriterium erfüllt, wann das zweite?

g) Wie ändert sich bei beiden Spektren das Abklingverhalten in Abhängigkeit von r? Bei welchem Tiefpaß ergibt sich für $r = 0.5$ das bessere Abklingverhalten, meßbar durch eine größere horizontale Augenöffnung?

D2 Nyquistfilter beim AWGN-Kanal

Die nächsten Aufgaben sollen mit dem Programm *"bas"* durchgeführt werden. Wählen Sie – ausgehend vom "*Standardsystem B*" – zunächst folgende Einstellungen:

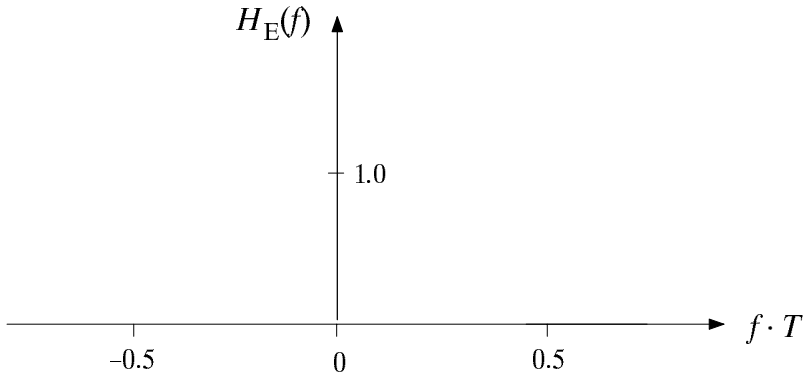
- zufällige Quellensymbolfolge,
- binäre bipolare NRZ–Rechtecksendeimpulse (normierte Impulsdauer $T_s/T = 1$),
- idealer Kanalfrequenzgang ($H_K(f) = 1$),
- weißes Rauschen mit der normierten Bandbreite $B_n \cdot T = 5$ und der
- normierten Rauschleistungsdichte $N_0/T = 0.2$ (entsprechend $10 \cdot \lg(E_B/N_0) \approx 7$ dB),
- Nyquistentzerrer gemäß Bild 1.6 mit Rolloff–Faktor $r = 0$,
- optimale Entscheiderschwelle $E = 0$ und optimaler Detektionszeitpunkt $T_D = 0$.

a) Betrachten Sie die Zeitsignale $s(t)$, $r(t)$ und $d(t)$, sowie das Augendiagramm des Detektionssignals (sowohl mit als auch ohne Störungen). Geben Sie die Charakteristika an. Wählen Sie hier und im folgenden die Anzahl der zu berücksichtigenden Nachläufer (gleich der Anzahl v der Vorläufer) zu $n = 2$.

b) Ermitteln Sie mit dem Programm *"bas"* die in der nachfolgenden Tabelle angegebenen Kenngrößen und interpretieren Sie diese. *Anmerkung:* Die gewünschten Zahlenwerte werden angezeigt, wenn Sie nur ein Augendiagramm darstellen lassen.

$H_E(f)$	$\ddot{o}(T_D)$	σ_d	p_B	$10 \cdot \lg(\varrho_d)$	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$
wie angegeben						
optimal (Integrator)	2.000	0.316	$0.78 \cdot 10^{-3}$	10.00 dB	$0.78 \cdot 10^{-3}$	10.00 dB

c) Zum Vergleich sind in obiger Tabelle auch die Werte für das optimale Empfangsfilter (Matched–Filter bzw. Integrator) angegeben. Warum ist der hier eingestellte Empfänger nicht optimal? Betrachten Sie hierzu auch das Leistungsdichtespektum $\Phi_{dN}(f)$. Welche Form hat hier das Empfangsfilter $H_E(f)$? Skizze.



d) Ermitteln Sie die Systemkenngrößen in Abhängigkeit des Rolloff–Faktors r und geben Sie den optimalen Rolloff–Faktor r_{opt} an. Betrachten Sie auch jeweils das entsprechende Leistungsdichtespektum $\Phi_{dN}(f)$.

Rolloff–Faktor	$\ddot{o}(T_D)$	σ_d	p_B	$10 \cdot \lg(\varrho_d)$
$r = 0$ (Punkt b)				
$r = 0.25$				
$r = 0.50$				
$r = 0.75$				
$r = 1$				
Integrator	2.000	0.316	$0.78 \cdot 10^{-3}$	10.00 dB

Interpretieren Sie die in dieser Tabelle zusammengestellten Größen und stellen Sie einen Vergleich mit dem Integrator an.

D3 Nyquistentzerrung

Wählen Sie weiterhin die Einstellungen von D2 (z.B. auch $N_0/T = 0.2, r = 0$), nun jedoch anstelle des idealen Kanalfrequenzgangs ($H_K(f) = 1$) ein Koaxialkabel mit der Kabeldämpfung (bei der halben Bitrate) von 40 dB.

a) Betrachten Sie das Augendiagramm des Detektionssignals (mit Störungen) und ermitteln Sie die Kenngrößen. Begründen Sie das unzureichende Ergebnis.

Parameter	$\ddot{o}(T_D)$	σ_d	p_B	$10 \cdot \lg(\varrho_d)$
AWGN–Kanal $N_0/T = 0.2$				
Koaxialkabel (40dB) $N_0/T = 0.2$				
Koaxialkabel (40dB) $N_0/T = 0.00002$				

b) Ändern Sie nun – bei sonst gleichen Einstellungen – die (normierte) Rauschleistungsdichte auf $N_0/T = 0.00002$ (entsprechend $10 \cdot \lg(E_B/N_0) \approx 47$ dB) und tragen Sie die Systemkenngrößen in die letzte Zeile obiger Tabelle ein. Interpretieren Sie die Werte im Vergleich zu den Simulationsergebnissen von Punkt a). Welches Sinken–SNR würde sich nun beim AWGN–Kanal einstellen?

c) Ermitteln Sie die Systemkenngrößen in Abhängigkeit des Rolloff–Faktors r und geben Sie (näherungsweise) den optimalen Rolloff r_{opt} an. Interpretation. Betrachten Sie auch jeweils das Leistungsdichtespektum $\Phi_{d\text{N}}(f)$.

Rolloff–Faktor	$\ddot{o}(T_{\text{D}})$	σ_d	p_{B}	$10 \cdot \lg(\varrho_d)$
$r = 0$ (Punkt b)				
$r = 0.25$				
$r = 0.50$				
$r = 1$				

d) Wie unterscheiden sich die im Punkt c) betrachteten Systeme bezüglich der horizontalen Augenöffnung? Wie groß ist diese insbesondere für $r = 0$ und $r = 1$?

e) Betrachten und beschreiben Sie die Zeitsignale $s(t)$, $r(t)$ und $d(t)$ für die momentane Einstellung mit optimalem Rolloff–Faktors r_{opt}. Betrachten Sie weiterhin die auf dem Kanal entstandenen Impulsinterferenzen anhand des Empfangsgrundimpulses $g_r(t)$. Diesen können Sie z.B. im Fenster "$r(t)$" anzeigen, wenn Sie eine unipolare Codierung einstellen und für die Quellensymbolfolge gilt: " ... 0 0 0 1 0 0 0 ..." .

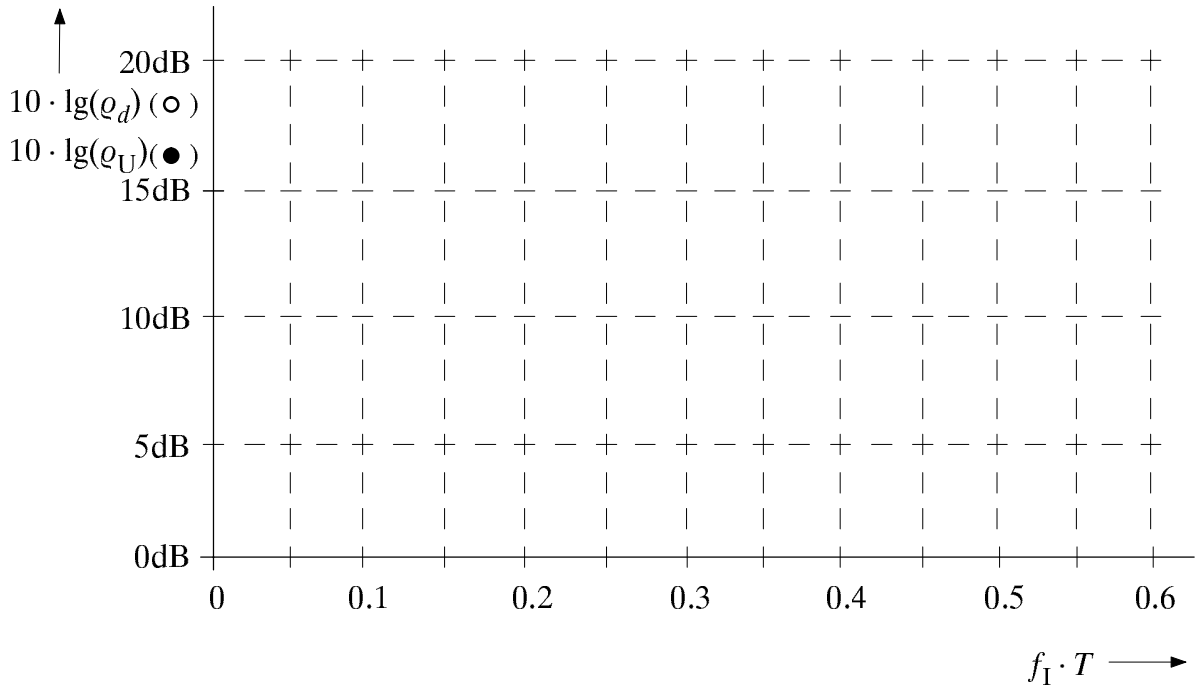
D4 Gaußförmiger Impulsformer

Wählen Sie weiterhin die Einstellungen wie in D3 (z.B. $N_0/T = 0.00002$, $a_K = 40$ dB), nun jedoch anstelle des idealen Nyquistentzerrers ein Empfangsfilter gemäß Bild 1.4 und einen gaußförmigen Impulsformer entsprechend (1.18) mit der Grenzfrequenz f_I.

a) Ermitteln Sie mit dem Programm *"bas"* die in der nachfolgenden Tabelle angegebenen Größen in Abhängigkeit der normierten Impulsformer–Grenzfrequenz $f_I \cdot T$.

$f_I \cdot T$	$\ddot{o}(T_D)$	σ_d	p_B	$10 \cdot \lg(\varrho_d)$	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$
0.2						
0.3						
0.4						
0.5						
0.6						

b) Skizzieren Sie die oben ermittelten Störabstände $10 \cdot \lg(\varrho_d)$ und $10 \cdot \lg(\varrho_U)$ ahängig von der normierten Grenzfrequenz $f_I \cdot T$.



c) Interpretieren Sie den Kurvenverlauf. Wie groß ist $f_{\mathrm{I,opt}}$? Welche Verschlechterung ergibt sich bei optimaler Grenzfrequenz gegenüber der Nyquistentzerrung?

d) Interpretieren Sie den Kurvenverlauf auch im Vergleich zu den Ergebnissen der Vorbereitungsfrage V2 (gültig für den AWGN–Kanal). Auf welchen grundsätzlichen Zusammenhang zwischen der Kabeldämpfung a_{K} und der optimalen Grenzfrequenz $f_{\mathrm{I,opt}}$ kann daraus geschlossen werden?

e) Betrachten Sie nun bei optimaler Grenzfrequenz das Detektionsstörsignal $d_{\mathrm{N}}(t)$ und dessen LDS $\Phi_{d\mathrm{N}}(f)$. Wie unterscheidet sich dieses gegenüber einem Übertragungssystem mit AWGN–Kanal?

D5 Entscheidungsrückkopplung

Die nächsten beiden Aufgaben werden mit dem Programm *"qrk"* durchgeführt. Wählen Sie hierbei das *"Standardsystem"* mit folgenden Einstellungen:

- binäre bipolare NRZ–Rechtecksendeimpulse (normierte Impulsdauer $T_s/T = 1$),
- gaußförmiger Impulsformer mit der (normierten) Grenzfrequenz $f_\mathrm{I} \cdot T = 0.3$,
- ideale Entscheidungsrückkopplung ("QR"),
- optimale Entscheiderschwelle $E = 0$ und Detektionszeitpunkt $T_\mathrm{D} = 0$.

a) Betrachten Sie alle für die Schwellenwertentscheidung relevanten Signale und die entsprechenden Augendiagramme und beschreiben Sie diese, und zwar sowohl für ein System ohne QR (Menüpunkt 1) als auch für ein System mit idealer QR (Menüpunkt 2). Welcher Wert ergibt sich dabei jeweils für die Augenöffnung $\ddot{o}(T_\mathrm{D})$ bei Detektion zum Zeitpunkt des Impulsmaximums ($T_\mathrm{D} = 0$)? Wählen Sie $v = 2$.

b) Ergänzen Sie die nachfolgende Tabelle für ein System mit idealer QR; der Detektionszeitpunkt sei weiterhin $T_\mathrm{D} = 0$. Verwenden Sie hierfür außer dem Programm *"qrk"* auch noch die Ergebnisse von D4 (Störeffektivwert) und die Aussagen von Bild 1.11 (Abschnitt 1.3.1). Wie groß ist nun die optimale Impulsformergrenzfrequenz $f_\mathrm{I,opt}$?

$f_\mathrm{I} \cdot T$	$10 \cdot \lg(\varrho_\mathrm{U})$ ohne QR	σ_d ohne/mit QR	$\ddot{o}(T_\mathrm{D})$ mit QR	G_QR	$10 \cdot \lg(\varrho_\mathrm{U})$ mit QR
0.2					
0.3					
0.4					

c) Optimieren Sie nun für das System mit idealer QR den Detektionszeitpunkt T_D (Grenzfrequenz $f_I \cdot T = 0.3$). Tragen Sie dazu für verschiedene T_D–Werte jeweils die Augenöffnung $\ddot{o}(T_D)$ in nachfolgende Tabelle ein und bestimmen Sie $T_{D,opt}$. Welchen Störabstandsgewinn erhält man beim Optimum?

$T_D/T =$	0	–0.1	–0.2	–0.3	–0.4	–0.5
$\ddot{o}(T_D) =$						

d) Zeigen Sie nun, daß mit der Grenzfrequenz $f_I \cdot T = 0.2$ und dem dazu optimalem $T_{D,opt} = -0.5T$ ein weiterer Störabstandsgewinn möglich ist. Wie groß ist dieser?

	σ_d	$\ddot{o}(T_D)$	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$	Verbesserung gegenüber c)
$f_I \cdot T = 0.2$ $T_D/T = -0.5$				

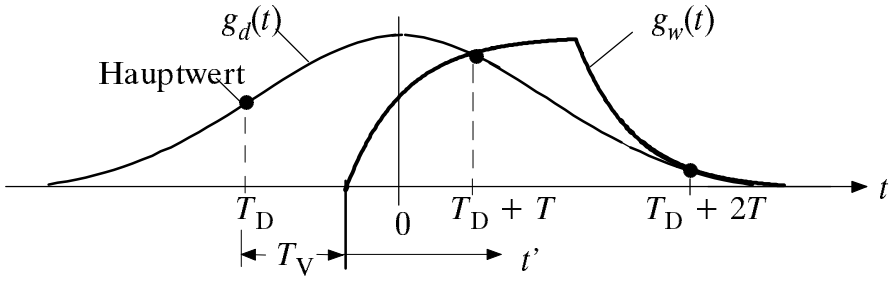
e) Wählen Sie wieder $f_I \cdot T = 0.3$. Zeigen Sie, daß sich für ein Laufzeitfilter mit optimal gewählten Filterkoeffizienten a_1 und a_2 die gleiche Augenöffnung ergibt. Bestimmen Sie die dazu optimalen Filterkoeffizienten für die Fälle $T_D = 0$ und $T_D = T_{D,opt}$. Betrachten Sie für diese Fälle auch die Zeitsignale $d(t)$, $w(t)$ und $k(t)$ sowie das Augendiagramm. *Hinweis:* Die Abtastwerte des Detektionsgrundimpulses werden mit dem Hauptmenüpunkt *"Abtastwerte des Detektionsgrundimpulses"* angezeigt.

	a_1	a_2	$\ddot{o}(T_D)$
$T_D = 0$			
$T_D = T_{D,opt}$			

D6 Entscheidungsrückkopplung mit RC-Tiefpaß

Ist der Detektionsgrundimpuls $g_d(t)$ gaußähnlich, so kann man als QR–Netzwerk auch ein RC–Tiefpaß verwenden. Bei rechteckförmigem Sinkensignal ist somit der Grundimpuls $g_w(t)$ des Korrektursignals gleich der Rechteckantwort des RC–Tiefpasses:

$$g_w(t) = \begin{cases} w_0 \cdot \left(1 - e^{-4f_G \cdot t'}\right) & \text{für } 0 \le t' \le T \,, \\ w_0 \cdot \left(e^{4f_G \cdot T} - 1\right) \cdot e^{-4f_G \cdot t'} & \text{für } t' > T \,. \end{cases} \tag{3.1}$$



Der Nullpunkt der Zeitvariablen t' liegt bei $T_D + T_V$ (siehe obige Skizze); die QR wird erst zum Zeitpunkt $t' = 0$ wirksam. Es besteht nun die Möglichkeit, die beiden Parameter (nämlich die 3dB–Grenzfrequenz f_G und die Amplitude w_0) so zu bestimmen, daß zu den Detektionszeitpunkten der nachfolgenden Impulse, also bei $T_D + T$ und $T_D + 2T$, $g_w(t) = g_d(t)$ gilt, und dadurch die beiden ersten Impulsnachläufer kompensiert werden.

a) Betrachten Sie die Zeitsignalverläufe von $d(t)$, $w(t)$ und $k(t)$ für die gleichen Randbedingungen wie in D5.

b) Zeigen Sie für die zwei Detektionszeitpunkte $T_D = 0$ und $T_D = T_{D,opt}$, daß sich bei dieser Art der QR die gleiche Augenöffnung ergibt wie bei idealer QR. Wie groß sind in beiden Fällen die vom Programm "*qrk*" selbst ermittelten optimalen Parameter f_G und w_0? Tragen Sie auch diese in die Tabelle ein. Zeigen Sie die Gültigkeit von (3.2).

	$f_G \cdot T$	w_0	$\ddot{o}(T_D)$
$T_D = 0$			
$T_D = T_{D,opt}$			

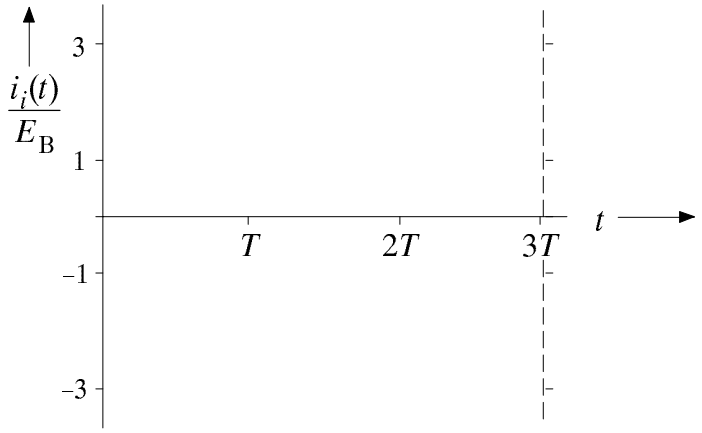
Hinweis: Die optimalen Werte für f_G und w_0 ergeben sich aus (3.1). Für $T_D = 0$ erhält man mit $g_1 = g_d(T_D + T)$ und $g_2 = g_d(T_D + 2T)$ folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} g_1 &= w_0 \cdot \left(1 - e^{-2f_G \cdot T}\right) \,, \\ g_2 &= w_0 \cdot \left(1 - e^{-4f_G \cdot T}\right) \cdot e^{-2f_G \cdot T} \,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

D7 Korrelationsempfänger

Benutzen Sie zur Durchführung aller weiteren Aufgaben das Programm *"kve"*. In diesem ersten Versuch soll die Wirkungsweise eines Korrelationsempfängers am Beispiel einer Binärfolge mit $N = 3$ Symbolen verdeutlicht werden. Wählen Sie zunächst die Einstellung *"ohne Impulsformer/Korrelationsempfänger"*, d.h. Rechteckimpulse.

a) Gehen Sie wie in in der Vorbereitungsfrage V4 davon aus, daß das Signal $s_3(t)$, d.h. die Symbolfolge "OLL", gesendet wurde (diese Folge wird bei den im Programm voreingestellten Werten als erste angeboten) und betrachten Sie das Baumdiagramm für rechteckförmige bipolare Sendeimpulse und den störungsfreien Fall ($\sigma_n = 0$). Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse von V4. Interpretieren Sie die ausgegebenen Größen.

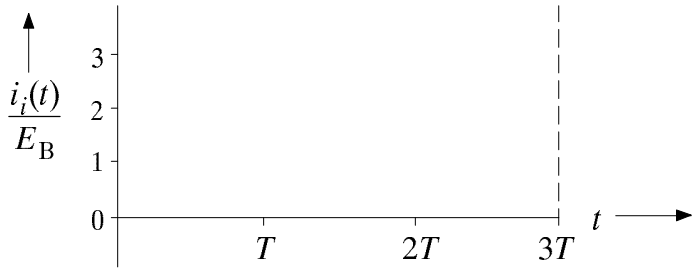


b) Untersuchen Sie, für welche Symbolfolge i sich der Korrelationsempfänger bei Vorhandensein von Störungen jeweils entscheidet und wie sicher diese Entscheidung ist. Gehen Sie wie in in a) davon aus, daß das Signal $s_3(t)$ gesendet wurde. Als Maß für die "Sicherheit" der Entscheidung soll dabei die Differenz $D_{\min}$ zwischen dem Integralwert $W_{\max} = W_3$ des tatsächlich gesendeten Signals $s_3(t)$ und dem nächstgrößeren Wert dienen. Tragen Sie die Ergebnisse für verschiedene Streuungen σ_n in nachfolgende Tabelle ein und interpretieren Sie das Ergebnis.

	$\sigma_n = 0$	$\sigma_n = 1$	$\sigma_n = 5$	$\sigma_n = 10$	$\sigma_n = 50$
Rechteck (bipolar)	$D_{\min}$= richtig/falsch	$D_{\min}$= richtig/falsch	$D_{\min}$= richtig/falsch	$D_{\min}$= richtig/falsch	$D_{\min}$= richtig/falsch
Rechteck (unipolar)	$D_{\min}$= richtig/falsch	$D_{\min}$= richtig/falsch	$D_{\min}$= richtig/falsch	$D_{\min}$= richtig/falsch	$D_{\min}$= richtig/falsch

c) Betrachten Sie für $\sigma_n = 10$ die (bipolaren) Signale $s(t)$ und $r(t)$. Können Sie hier die Symbolfolge "OLL" im Empfangssignal $r(t)$ erkennen?

d) Wiederholen Sie nun bei sonst gleichen Einstellungen (Symbolfolge "OLL", $\sigma_n = 0$) den Unterpunkt a) mit unipolaren Rechteck–Sendeimpulsen. Betrachten und interpretieren Sie das Baumdiagramm.



e) Bearbeiten Sie nun die zweite Zeile der Tabelle zu Punkt b), gültig für unipolare Signale. Untersuchen Sie, für welche Symbolfolge i sich der Korrelationsempfänger nun bei Vorhandensein von Störungen jeweils entscheidet und wie sicher diese Entscheidung ist. Als Maß hierfür dient wieder die Differenz $D_{\min}$ zwischen dem (maximalem) Integralwert $W_{\max} = W_3$ des tatsächlich gesendeten Signals $s_3(t)$ und dem nächstgrößeren Wert. Interpretieren Sie das Ergebnis im Vergleich zu Punkt b).

f) Gehen Sie weiterhin vom Sendesignal $s_3(t)$ aus. Betrachten Sie nun den Einfluß des gaußförmigen Impulsformers. Wählen Sie hierfür die normierte Grenzfrequenz zu $f_I \cdot T = 0.5$. Untersuchen Sie am Beispiel bipolarer Signale, für welche Symbolfolge sich der Korrelationsempfänger jeweils entscheidet und wie sicher diese Entscheidung ist (Kenngröße $D_{\min}$). Tragen Sie die Ergebnis für den Interationsbereich von 0 ... $3T$ und verschiedene Streuungen σ_n in die erste Zeile der nachfolgenden Tabelle ein und vergleichen Sie die Werte mit den Ergebnissen von b). Bei welcher Impulsform ist die Entscheidungssicherheit im allgemeinen größer?

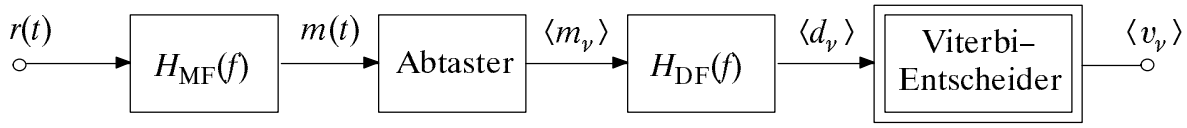
Gauß $f_I \cdot T = 0.5$	$\sigma_n = 0$	$\sigma_n = 1$	$\sigma_n = 5$	$\sigma_n = 10$	$\sigma_n = 50$
Integration: $0 \ldots 3T$	$D_{\min}=$ richtig/falsch	$D_{\min}=$ richtig/falsch	$D_{\min}=$ richtig/falsch	$D_{\min}=$ richtig/falsch	$D_{\min}=$ richtig/falsch
Integration: $-T \ldots 4T$	$D_{\min}=$ richtig/falsch	$D_{\min}=$ richtig/falsch			

g) Aufgrund der ansteigenden und abfallenden Impulsflanken erhält man ein besseres Detektionsergebnis, wenn man den Integrationsbereich $0 \ldots 3T$ an den Rändern erweitert, z.B. auf den Bereich von $-T \ldots 4T$. Vervollständigen Sie obige Tabelle mit den Differenzwerten $D_{\min}$ für $\sigma_n = 0$ und $\sigma_n = 1$. Analysieren Sie die Ergebnisse für $\sigma_n = 0$ auch anhand der nachfolgenden Tabelle. Gehen Sie wieder davon aus, daß das Signal $s_3(t)$, d.h. die Symbolfolge "OLL", gesendet wurde.

Gauß $f_I \cdot T = 0.5$ $\sigma_n = 0$	Differenz bzgl. der Folge "LLL"	Differenz bzgl. der Folge "OOL"	Differenz bzgl. der Folge "OLO"
Integration: $0 \ldots 3T$	$D_{\mathrm{LLL}}=$	$D_{\mathrm{OOL}}=$	$D_{\mathrm{OLO}}=$
Integration: $-T \ldots 4T$	$D_{\mathrm{LLL}}=$	$D_{\mathrm{OOL}}=$	$D_{\mathrm{OLO}}=$

D8 Viterbi-Empfänger

Wählen Sie im Hauptmenü des Programms *"kve"* die Kombination Gauß–Impulsformer/ Viterbi–Empfänger. Zunächst sollen verschiedene Zeitsignale betrachtet werden. Dabei ist zu beachten, daß im Programm *"kve"* der Impulsformer bereits dem Sendesignal $s(t)$ zugeordnet ist. Weiterhin sind im Programm das Empfangssignal $r(t) = s(t) + n(t)$, das Signal $m(t)$ nach dem Matched–Filter, dessen Abtastwerte m_ν sowie die Eingangswerte d_ν des Viterbi–Entscheiders darstellbar (siehe nachfolgende Skizze).



a) Stellen Sie als Quellensignal zunächst einen Einzelimpuls (z.B. bei Bit–Nummer 11) ein. Die (normierte) Impulsformer–Grenzfrequenz sei $f_\mathrm{I} \cdot T = 0.5$, der Störeffektivwert vorerst $\sigma_n = 0$. Betrachten und beschreiben Sie die einzelnen Signalverläufe.

b) Schätzen Sie anhand der Folge der Abtastwerte den erforderlichen Parameter v des Viterbi–Entscheiders ab. Wieviele Zustände wären demnach im Trellisdiagramm zu berücksichtigen?

c) Betrachten Sie nun die einzelnen Signalverläufe für eine beliebige Zufallsfolge und den Störeffektivwert $\sigma_n = 1$. Was ist zu erkennen?

d) Nun soll die Berechnung der Fehlergrößen ε_ν und der Gesamtfehlergrößen γ_ν für $v = 1$ an einem einfachen Beispiel veranschaulicht werden. Wie in Vorbereitungsfrage V5 gelte $g_0 = 0.60$ und $g_{-1} = 0.40$. Überprüfen Sie mit dem Programm *"kve"* Ihre Ergebnisse von V5. Die entsprechenden Eingangswerte r_ν lassen sich im Programm über den Startwert "0" eingestellen (in diesem Sonderfall hat der Parameter σ_d keinen Einfluß). Wird die gesendete Nachricht fehlerfrei detektiert? Vergleichen Sie dazu das Quellensignal $q(t)$ mit dem vom Viterbi–Empfänger ausgewählten Sinkensignal $v(t)$.

e) Verdeutlichen Sie sich die Berechnung von ε_ν und γ_ν für $v = 1$ auch am Beispiel

$$g_0 = 0.6, g_{-1} = 0.4, \sigma_d = 0$$ (gleichzeitig einen Startwert $\neq 0$ einstellen).

Welche Aussagen sind in diesem Sonderfall (kein Rauschen) für die Gesamtfehlergrößen γ_ν möglich?

f) Wie unterscheidet sich hiervon der Parametersatz

$$g_0 = 1, g_{-1} = 0, \sigma_d = 0.5$$ (gleichzeitig einen Startwert $\neq 0$ einstellen)?

Welche Verbesserungen werden in diesem Sonderfall (keine Impulsinterferenzen) gegenüber der Schwellenwertentscheidung erzielt?

g) Wählen Sie nun abschließend

$$g_0 = 0.6, g_{-1} = 0.4, \sigma_d = 0.5$$ (gleichzeitig einen Startwert $\neq 0$ einstellen)

und interpretieren Sie das Ergebnis.

D9 Auswahl der Symbolfolge beim Viterbi-Empfänger

Betrachtet wird nun ein Binärsystem mit $v = 2$ Vorläufern. Somit ergeben sich zu jedem Zeitpunkt acht Fehlergrößen ε_ν und vier Gesamtfehlergrößen γ_ν (*"Memory 4"*). Die Grundstruktur des allgemeinen Trellisdiagramms zeigt Bild 1.22 (Abschnitt 1.5.3).

a) Wählen Sie nun den Menüpunkt 2 (*"Viterbi–Algorithmus mit 2 Vorläufern"*) sowie die folgenden Parameterwerte:

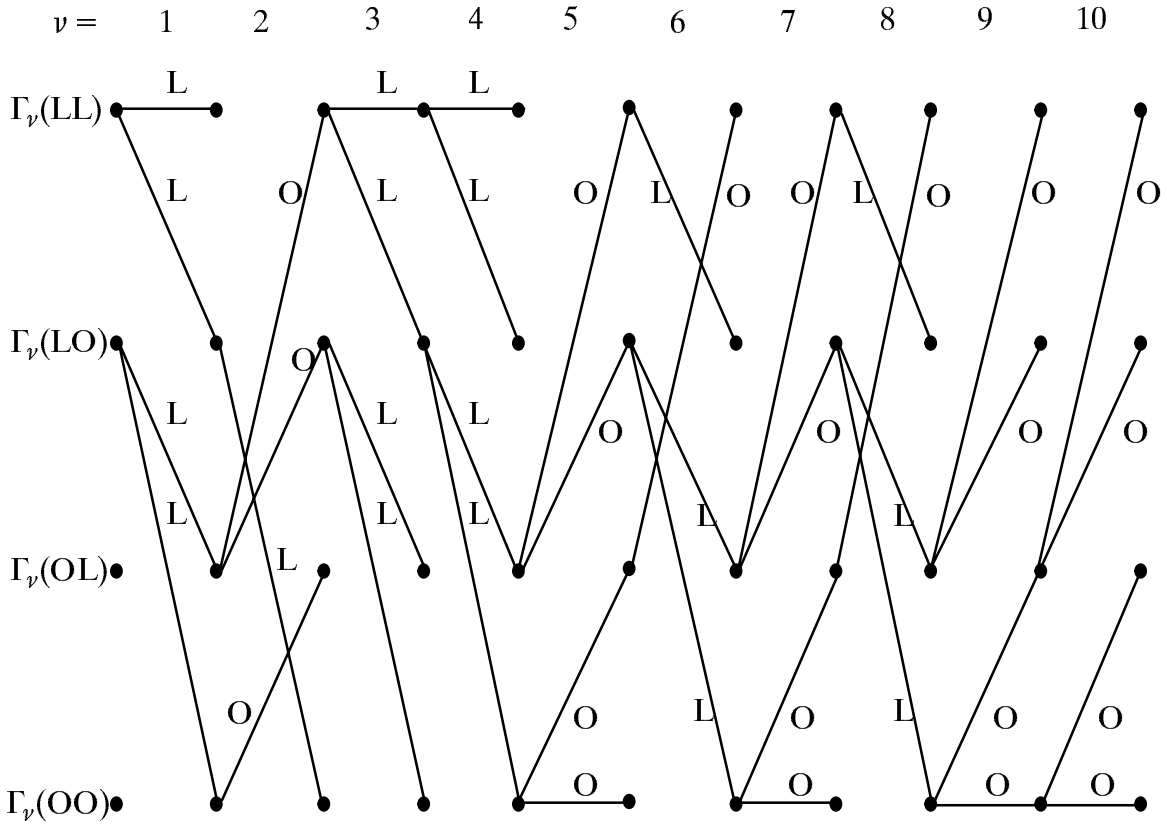
$$\text{Startwert} = 0,\ g_0 = 0.6, g_{-1} = 0.3, g_{-2} = 0.1,\ \sigma_d = 0.25.$$

Verdeutlichen Sie sich die Berechnung der Fehlergrößen ε_ν sowie der dazugehörigen Gesamtfehlergrößen γ_ν anhand der ausgegebenen Zahlenwerte. Beschreiben Sie den Algorithmus mit eigenen Worten.

b) Verdeutlichen Sie sich nun für den gleichen Parametersatz die Bedeutung der "bedingt detektierbaren Teilsymbolfolge" sowie die (asynchrone) Ausgabe der Sinkensymbole. Liefern Sie eine stichpunktartige verbale Beschreibung der Symbolausgabe. Prüfen Sie insbesondere, ob die Symboldetektion fehlerfrei ist.

c) Erhöhen Sie nun bei ansonsten gegenüber Punkt b) unveränderten Systemparametern den (Detektions–)Störeffektivwert auf $\sigma_d = 1$. Ist die Detektion weiterhin fehlerfrei?

d) Ein mögliches Trellisdiagramm für $v = 2$ und $N = 10$ zeigt die nachfolgende Skizze. Markieren Sie die Zeitpunkte, zu denen eine endgültige Detektion einzelner Symbole möglich ist, mit Pfeilen.



e) Welche Symbole werden zu den gekennzeichneten Zeitpunkten detektiert? Tragen Sie diese in folgende Tabelle ein.

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v_ν										

D10 Vergleich der Fehlerwahrscheinlichkeiten

Abschließend wollen wir die Leistungsfähigkeit des Viterbi–Empfängers untersuchen, indem wir ihn für eine stochastische bipolare Quellensymbolfolge der Länge $N = 1000$ mit einem Schwellenwertentscheider vergleichen. Dieser Vergleich wird mit dem Menüpunkt "*V*" durchgeführt; der Viterbi–Entscheider ist hierbei für $v = 2$ ausgelegt. Ausgegeben werden die Fehlerhäufigkeiten h_{SE} und h_{VE} als Maß für die entsprechenden Fehlerwahrscheinlichkeiten p_{SE} und p_{VE}.

a) Zunächst soll der Vergleich für folgende Parameterwerte erfolgen:

$$g_0 = 1,\ g_1 = 0,\ g_{-1} = 0,\ \sigma_d = 0.5 \text{ (Nyquistsystem).}$$

Vergleichen Sie die Simulationsergebnisse mit den theoretischen Werten von p_{SE} und p_{VE}. Verwenden Sie zu deren Berechnung die Fehlertabellen im Anhang. Worauf sind eventuelle Fehler zurückzuführen? *Hinweis:* Geben Sie den Wert des Koeffizienten g_1 bei g_{-2} ein.

$h_{\mathrm{SE}} =$ $h_{\mathrm{VE}} =$

b) Betrachten und interpretieren Sie nun den folgenden Parametersatz:

$$g_0 = 0.6,\ g_1 = 0.3,\ g_{-1} = 0.1,\ \sigma_d = 0.25.$$

$h_{\mathrm{SE}} =$ $h_{\mathrm{VE}} =$

c) Zeigen Sie weiterhin, daß es für den Viterbi–Entscheider – im Gegensatz zum Schwellenwertentscheider – unerheblich ist, in welcher Reihenfolge die Grundimpulswerte vorliegen. Wählen Sie hierzu folgende Parameter:

$$g_0 = 0.3,\ g_1 = 0.6,\ g_{-1} = 0.1,\ \sigma_d = 0.25.$$

Interpretieren Sie das Ergebnis.

$h_{\mathrm{SE}} =$ $h_{\mathrm{VE}} =$

d) Es sei nun

$$g_0 = 0.4,\ g_1 = 0.3,\ g_{-1} = 0.3,\ \sigma_d = 0.2.$$

Dem Schwellenwertentscheider wird somit ein "geschlossenes Auge" angeboten. Vergleichen Sie auch hier die Simulationsergebnisse mit den theoretischen Werten.

$h_{\mathrm{SE}} =$ $h_{\mathrm{VE}} =$

e) Begründen Sie, warum der Parametersatz

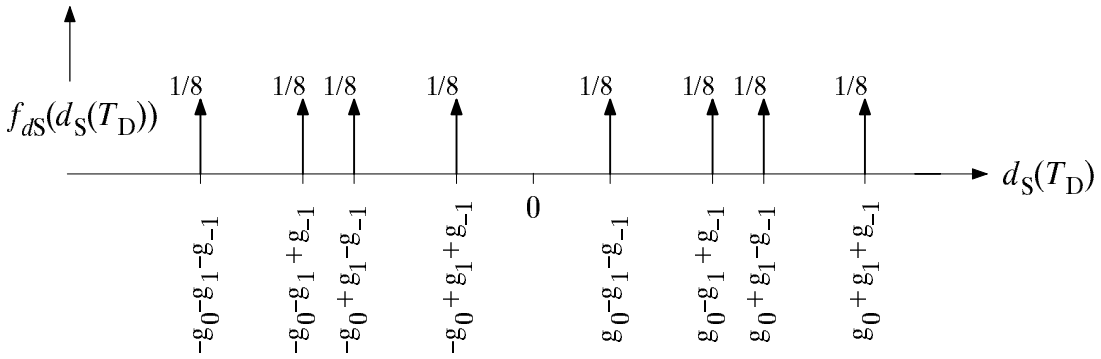
$$g_0 = 0.4,\ g_1 = 0.3,\ g_{-1} = 0.3,\ \sigma_d = 0$$

beim Schwellenwertentscheider zu einer größeren Fehlerwahrscheinlichkeit führt als der Parametersatz d).

4 Musterlösungen der Vorbereitungsfragen

V1 Bitfehlerwahrscheinlichkeit

a)



$$p_B = \frac{1}{4}\cdot Q\left(\frac{g_0+g_1+g_{-1}}{\sigma_d}\right)+\frac{1}{4}\cdot Q\left(\frac{g_0+g_1-g_{-1}}{\sigma_d}\right)$$

$$+\frac{1}{4}\cdot Q\left(\frac{g_0-g_1+g_{-1}}{\sigma_d}\right)+\frac{1}{4}\cdot Q\left(\frac{g_0-g_1-g_{-1}}{\sigma_d}\right)$$

$$p_U = Q\left(\frac{g_0-g_1-g_{-1}}{\sigma_d}\right);\quad \ddot{o}(T_D) = 2\cdot\left[g_0-g_1-g_{-1}\right].$$

b) $$p_B = \frac{1}{4}\cdot Q(5)+\frac{1}{2}\cdot Q(3)+\frac{1}{4}\cdot Q(1) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 0.287\cdot 10^{-6}+\frac{1}{2}\cdot 0.135\cdot 10^{-2}+\frac{1}{4}\cdot 0.1586 \approx 0.04$$

$$p_U = Q(1) \approx 0.1586\ ;\ \ddot{o}(T_D) = 0.4\,V$$

c) $$\varrho_d = [Q^{-1}(p_B)]^2 \approx 0.175^2 \approx 3.06 \quad \text{(entspricht etwa 4.8 dB)}$$

$$\varrho_U = \left(\frac{\ddot{o}(T_D)/2}{\sigma_d}\right)^2 = \left(\frac{0.2V}{0.2V}\right)^2 = 1 \quad \text{(entspricht 0 dB)}$$

d) $$p_B = p_U = Q(3) = 0.135\cdot 10^{-2} \quad \text{(beide SNR's jeweils ca. 9.55 dB)}$$

V2 Gaußförmiges Empfangsfilter

a) $$E_B = s_0^2\cdot T_B = (1V)^2\cdot\frac{1}{10^8}s = 10^{-8}\ V^2s \Rightarrow E_B/N_0 = 10 \text{ (entspricht 10 dB)}$$

b) $$g_d(t) = s_0\cdot\left[Q\left(2\sqrt{2\pi}\cdot f_E\cdot\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)-Q\left(2\sqrt{2\pi}\cdot f_E\cdot\left(t+\frac{T}{2}\right)\right)\right]$$

$$g_d(0) = s_0\cdot[Q(-x)-Q(x)] = s_0\cdot[1-2\cdot Q(x)] \quad \text{mit} \quad x = \sqrt{2\pi}\cdot f_E\cdot T$$

$$f_E\cdot T = 0.4 : x \approx 1 \Rightarrow g_d(0) = 1V\cdot[1-2\cdot 0.1587] \approx 0.682V,$$

$$f_E\cdot T = 0.8 : x \approx 2 \Rightarrow g_d(0) = 1V\cdot[1-2\cdot 0.0227] \approx 0.954V.$$

c) Hier sind alle Vor– und Nachläufer positiv, so daß auf die Betragsbildung verzichtet werden kann. Die Summe aller Abtastwerte ist gleich s_0. Damit gilt für die Summe aller Vor– und Nachläufer: $s_0 - g_d(0)$. Setzt man dieses Ergebnis in (1.11) ein, so erhält man Gl. (2.4).

$$f_E \cdot T = 0.4: \quad \ddot{o}(T_D) = 2 \cdot (2 \cdot 0.682\text{V} - 1\text{V}) \approx 0.728\text{V} ,$$

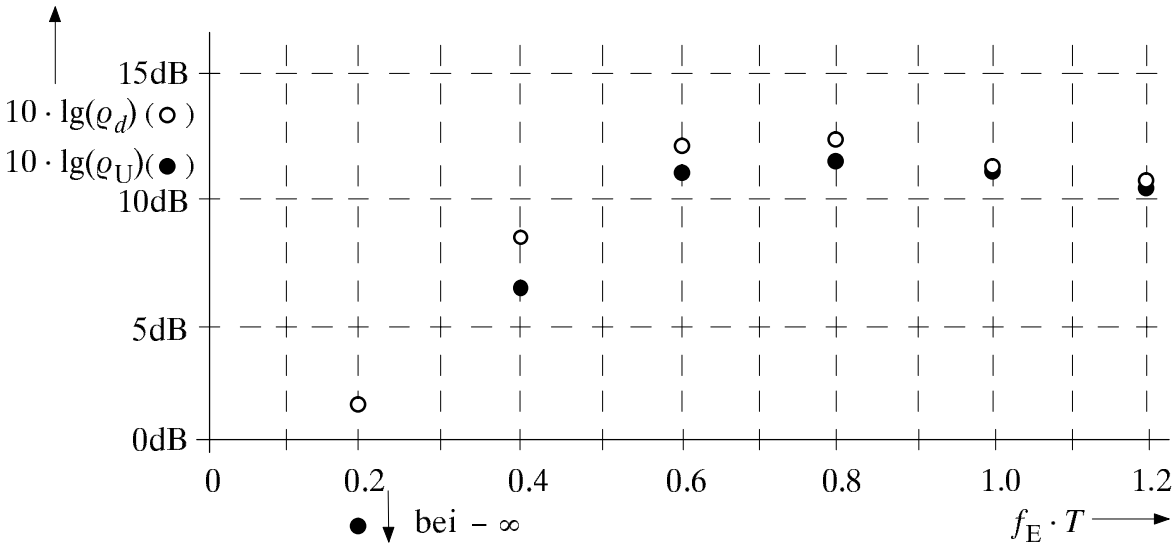
$$f_E \cdot T = 0.8: \quad \ddot{o}(T_D) = 2 \cdot (2 \cdot 0.954\text{V} - 1\text{V}) \approx 1.816\text{V} .$$

Innerhalb der Rechengenauigkeit gute Übereinstimmung mit Werten in Tabelle 1.1.

d) Werte stimmen ebenfalls mit Tabelle 1.1 überein, z.B.:

$$N_0 = 10^{-9}\frac{\text{V}^2}{Hz} , \quad f_E = 80 \cdot 10^6 \text{ Hz}: \quad \sigma_d^2 = 0.0566\text{V}^2 \Rightarrow \sigma_d = 0.238\text{V}$$

e) Bezüglich der beiden Störabstände gibt es eine optimale Grenzfrequenz, die etwa bei $f_E \cdot T = 0.8$ liegt. Ist f_E zu klein, überwiegen die Impulsinterferenzen, andernfalls die statistischen Störungen. Unabhängig davon, ob man nun ϱ_d oder ϱ_U als Optimierungskriterium zugrundelegt, ergibt sich näherungsweise das gleiche Optimum. Daraus folgt aber auch, daß man bei der Systemoptimierung die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit p_B durchaus durch die einfachere Näherung p_U ersetzen kann.



V3 Entscheidungsrückkopplung

a) <u>ohne QR:</u>

$$\ddot{o}(T_D = 0) = 2 \cdot \left[g_d(0) - \sum_{\nu=1}^{2} |g_d(\nu \cdot T)| - \sum_{\nu=1}^{2} |g_d(-\nu \cdot T)| \right]$$

$$= 2 \cdot \left[g_d(0) - 2 \cdot g_d(T) - 2 \cdot g_d(2T) \right] = 2 \cdot \left[1 - 2 \cdot 0.248 - 2 \cdot 0.004 \right] \text{V} \approx 1\text{V}.$$

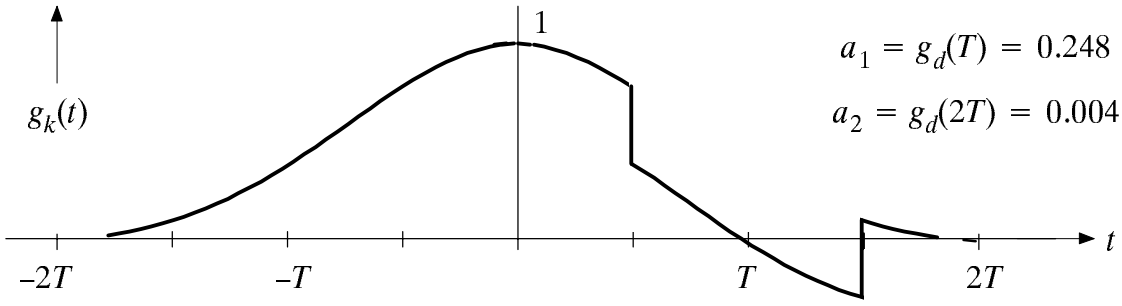
<u>ideale QR:</u>

$$\ddot{o}(T_D = 0) = 2 \cdot \left[g_d(0) - \sum_{\nu=1}^{2} |g_d(-\nu \cdot T)| \right]$$

$$= 2 \cdot \left[g_d(0) - g_d(T) - g_d(2T) \right] = 2 \cdot \left[1 - 0.248 - 0.004 \right] \text{V} \approx 1.5\text{V}.$$

b) $$G_{QR} = \left[\frac{\ddot{o}(T_D)_{\text{mit QR}}}{\ddot{o}(T_D)_{\text{ohne QR}}}\right]^2 = 1.5^2 = 2.25 \quad \Rightarrow \quad 10 \cdot \lg(G_{QR}) = 3.5\,\text{dB}$$

c)



d) $$\ddot{o}(T_D = -T/4) = 2 \cdot \left[g_d(-0.25T) - g_d(-1.25T)\right] = 2 \cdot \left[0.916 - 0.113\right]\text{V} \approx 1.61\text{V}$$

$$\Rightarrow \quad 10 \cdot \lg(G_{QR}) = 4.1\,\text{dB}$$

$$\ddot{o}(T_D = -T/2) = 2 \cdot \left[g_d(-0.5T) - g_d(-1.5T)\right] = 2 \cdot \left[0.705 - 0.043\right]\text{V} \approx 1.32\text{V}$$

$$\Rightarrow \quad 10 \cdot \lg(G_{QR}) = 2.4\,\text{dB}$$

e)

	ohne QR	ideale QR ($T_D = 0$)	ideale QR ($T_D = -T/4$)	ideale QR ($T_D = -T/2$)
$\ddot{o}(T_D)$	1.00 V	1.50 V	1.61 V	1.32 V
$10 \cdot \lg(G_{QR})$	0.0 dB	3.5 dB	4.1 dB	2.4 dB

V4 Korrelationsempfänger

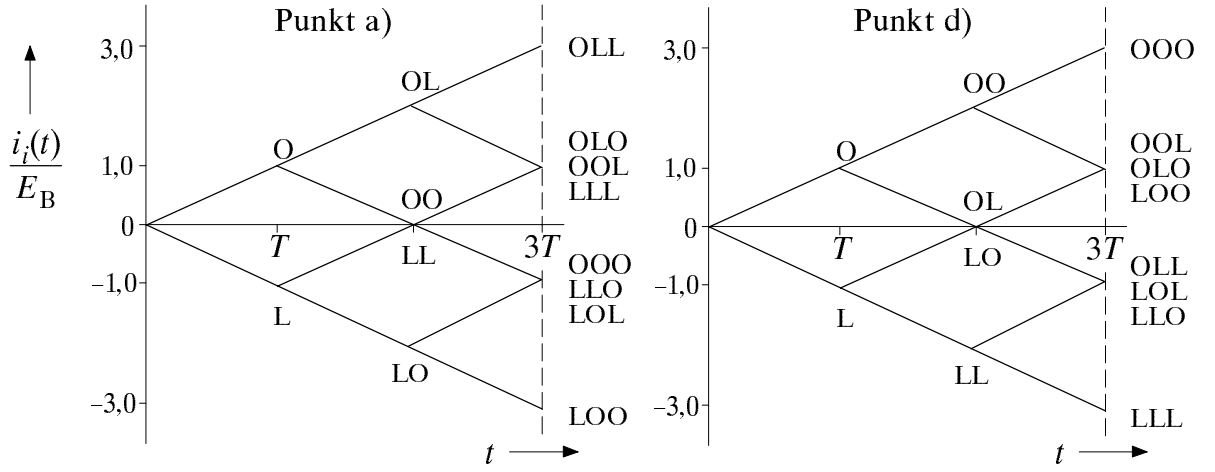
a) Am wahrscheinlichsten ist eine Verfälschung in eine Folge, die sich von "OLL" nur durch ein einziges Bit unterscheiden, also "OLO", "OOL" oder "LLL" (Baumdiagramm siehe nächste Seite oben links).

b) Der zeitliche Verlauf ist nicht mehr durch Geradenstücke beschreibbar, es ergeben sich aber aufgrund der Normierung (auf E_B) die gleichen Endwerte.

c) Die Endwerte sind nun nicht mehr äquidistant und mit großer Wahrscheinlichkeit fallen auch nicht mehr mehrere zusammen. Das Integrationsintervall müßte eigentlich an beiden Rändern vergrößert werden.

e) Alle Integralverläufe sind identisch 0.

f) Aufgrund der Korrekturterme W_i ist trotzdem eine richtige Entscheidung möglich (siehe Tabelle 1.3).

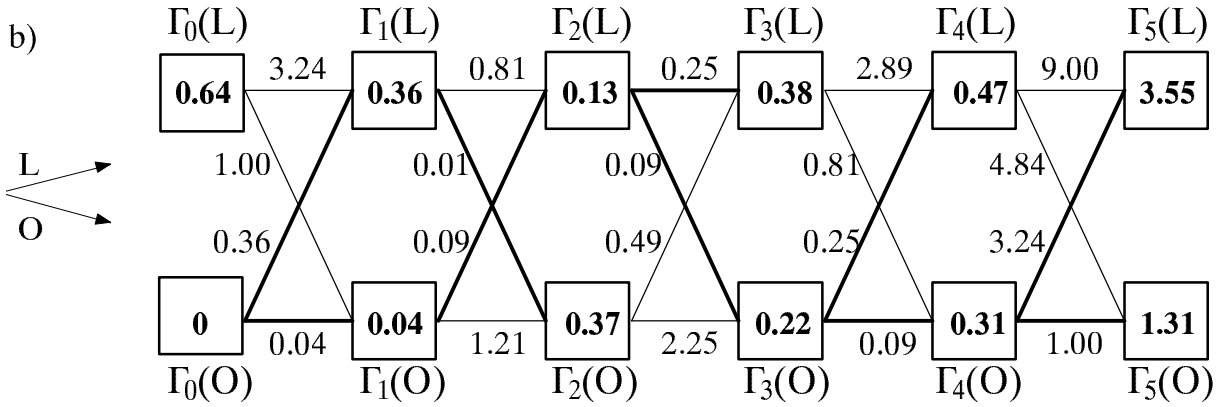


V5 Viterbi-Empfänger

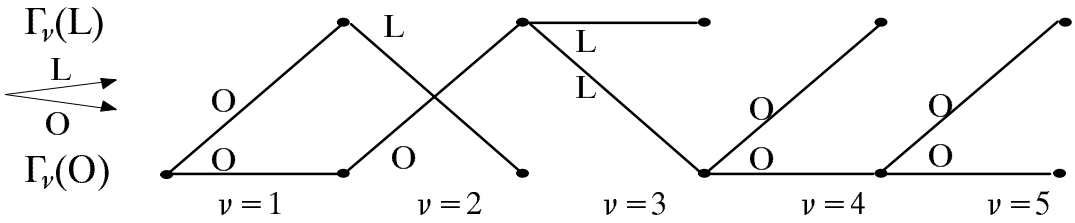
a)

$\nu = 4$:	$\varepsilon_4(\mathrm{LL})$	$= [-0.7 - 1]^2$	$= 2.89$	$\nu = 5$:	$\varepsilon_5(\mathrm{LL})$	$= [-2 - 1.0]^2$	$= 9.00$
	$\varepsilon_4(\mathrm{LO})$	$= [-0.7 - 0.2]^2$	$= 0.81$		$\varepsilon_5(\mathrm{LO})$	$= [-2 - 0.2]^2$	$= 4.84$
	$\varepsilon_4(\mathrm{OL})$	$= [-0.7 + 0.2]^2$	$= 0.25$		$\varepsilon_5(\mathrm{OL})$	$= [-2 + 0.2]^2$	$= 3.24$
	$\varepsilon_4(\mathrm{OO})$	$= [-0.7 + 1]^2$	$= 0.09$		$\varepsilon_5(\mathrm{OO})$	$= [-2 + 1]^2$	$= 1.00$

b)



c)



d)

ν	bedingt detektierbare Teilsymbolfolgen $V_\nu(\mathrm{O})$	$V_\nu(\mathrm{L})$	Z_ν	L_ν	ausgegebene Sinkensymbole
1	O	O	1	0	O
2	O L	O O	0	1	
3	O O L	O O L	2	0	O L
4	O O L O	O O L O	1	0	O
5	O O L O O	O O L O O	1	0	O

5 Musterlösungen Versuchsdurchführung

D1 Nyquistkriterien

a) $g_d(t) = 2 \cdot s_0 \cdot f_G \cdot T \cdot \mathrm{si}(\pi \cdot f_G \cdot t)$. Mit $f_G \cdot T = 0.5$: $g_d(t) = s_0 \cdot \mathrm{si}(\pi/2 \cdot t/T)$.

b) Bei $f_G \cdot T = 0.5$ ist das Auge maximal geöffnet; die vertikale Augenöffnung beträgt 2. Theoretisch müßte bei rechteckförmigem Spektrum das Auge zu einem unendlich schmalen Spalt entarten (d.h.: horizontale Augenöffnung gleich 0). Da hier jedoch nur $n = v = 2$ Vor– und Nachläufer berücksichtigt werden (und nicht unendlich viele), ergibt sich für die horizontale Augenöffnung aber ein deutlich größerer Wert.

c) Für $f_G \cdot T < 0.5$ ergibt sich theoretisch stets ein geschlossenes Auge. Bei $f_G \cdot T = 0.3$ ist dies auch im Programm sichtbar. Dagegen ist bei $f_G \cdot T = 0.4$ das Auge geöffnet. Der Grund hierfür ist wiederum die begrenzte Anzahl von Vor– und Nachläufern.

d) In beiden Fällen ergeben sich Impulsinterferenzen. Mit $f_G \cdot T = 0.9$ ist die vertikale Augenöffnung zwar größer als 2, trotzdem ist das Auge nicht maximal geöffnet.

e) Bei $f_G \cdot T = 1$ treten wie bei $f_G \cdot T = 0.5$ keine Impulsinterferenzen auf; die vertikale Augenöffnung ist 4. Trotzdem ist eine Nyquistentzerrung mit $f_G \cdot T = 1$ nicht sinnvoll: Betrachtet man einen Rechteck–Sendeimpuls $g_s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G_s(f)$ der Dauer T, so ist nämlich das Empfangsfilter $H_E(f) = G_d(f)/(G_s(f) \cdot H_K(f))$ nicht realisierbar, da $G_s(1/T) = 0$ und $G_d(1/T) = 0.5$ ist. Das Filter müßte somit bei $f = 1/T$ eine Polstelle besitzen (unendliche Verstärkung); auch die Rauschleistung wäre unendlich groß.

f) Alle Spektren (Trapez und Cosinus–Rolloff) erfüllen das erste Nyquistkriterium unabhängig vom Rolloff–Faktor r, solange $f_G \cdot T = 0.5$ ist. Das zweite Nyquistkriterium wird nur vom Cosinus–Rolloff–Tiefpaß mit $r = 1$ erfüllt. Dies entspricht dem $\cos^2$–TP.

g) Sowohl beim Trapez– als auch beim Cosinus–Rolloff–Tiefpaß hat die Vergrößerung von r ein schnelleres Abklingen (d.h. eine größere horizontale Augenöffnung) zur Folge. Für $r < 1$ zeigt der Trapez–Tiefpaß das etwas bessere Abklingverhalten.

D2 Nyquistfilter beim AWGN–Kanal

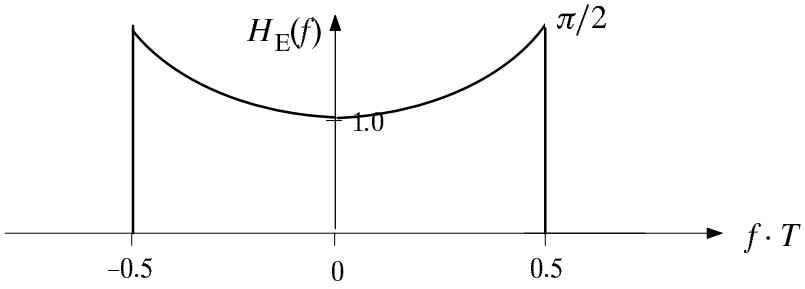
a) Die Nyquisteigenschaften sind aus dem Augendiagramm ohne Störungen deutlich zu erkennen: alle Linien gehen durch einen von 2 Punkten bei $\pm s_0$. Die horizontale Augenöffnung ist bei Berücksichtigung aller Vor– und Nachläufer wegen $r = 0$ gleich 0.

b)

$H_E(f)$	$\ddot{o}(T_D)$	σ_d	p_B	$10 \cdot \lg(\varrho_d)$	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$
wie angegeben	2.000	0.391	$0.52 \cdot 10^{-2}$	8.17 dB	$0.52 \cdot 10^{-2}$	8.17 dB
optimal (Integrator)	2.000	0.316	$0.78 \cdot 10^{-3}$	10.00 dB	$0.78 \cdot 10^{-3}$	10.00 dB

Aufgrund der Nyquisteigenschaften des Systems sind p_B und p_U (und die dazugehörigen Störabstände) gleich. Bezüglich der Rauschstörungen ist der hier betrachtete Frequenzgang gegenüber dem Integrator (Spalt–Tiefpaß) um 1.83 dB schlechter.

c) Das Spektrum $G_d(f) = G_s(f) \cdot H_E(f)$ des Detektionsgrundimpulses ist rechteckförmig, d.h. für $|f| > 1/(2T)$ gleich 0, ansonsten 1. Das bedeutet: $H_E(f)$ ist für $|f| \leq 1/(2T)$ gleich dem Kehrwert der si–Funktion. Es gilt: $H_E(f = 1/(2T)) = 1/\mathrm{si}(\pi/2) = \pi/2$.



d)

Rolloff–Faktor	$\ddot{o}(T_D)$	σ_d	p_B	$10 \cdot \lg(\varrho_d)$
$r = 0$ (Punkt b)	2.000	0.391	$0.52 \cdot 10^{-2}$	8.17 dB
$r = 0.25$	2.000	0.355	$0.24 \cdot 10^{-2}$	9.01 dB
$r = 0.50$	2.000	0.342	$0.18 \cdot 10^{-2}$	9.31 dB
$r = 0.75$	2.000	0.335	$0.14 \cdot 10^{-2}$	**9.50 dB**
$r = 1$	2.000	0.336	$0.15 \cdot 10^{-2}$	9.48 dB
Integrator	2.000	0.316	$0.78 \cdot 10^{-3}$	10.00 dB

Da der Rolloff–Faktor r den Störeffektivwert beeinflußt, gibt es für diesen einen optimalen Wert: $r_{opt} \approx 0.75$. Aber selbst mit diesem Optimum beträgt die Verschlechterung gegenüber dem Integrator noch 0.5 dB.

D3 Nyquistentzerrung

a)

Parameter	$\ddot{o}(T_D)$	σ_d	p_B	$10 \cdot \lg(\varrho_d)$
AWGN–Kanal $N_0/T = 0.2$	2.000	0.391	$0.52 \cdot 10^{-2}$	8.17 dB
Koaxialkabel (40dB) $N_0/T = 0.2$	2.000	22.548	0.48	–27.06 dB
Koaxialkabel (40dB) $N_0/T = 0.00002$	2.000	0.226	$0.46 \cdot 10^{-5}$	12.94 dB

Aufgrund der erforderlichen Entzerrung werden die Störungen sehr stark verstärkt. Die Folge ist, daß das gesamte Übertragungsstem versagt, wenn man weiterhin am Eingang gleich große Störungen wie im Versuch D2 zuläßt.

b) Senkt man das Eingangsrauschen um 40 dB, so ist auch das Ausgangsrauschen um 40 dB geringer und der Sinken–Störabstand um 40 dB größer. Das gleiche gilt auch für den AWGN–Kanal. Für diesen folgt mit D2(b) somit ein SNR von 48.17 dB.

c)

Rolloff–Faktor	$\ddot{o}(T_D)$	σ_d	p_B	$10 \cdot \lg(\varrho_d)$
$r = 0$ (Punkt b)	2.000	0.226	$0.46 \cdot 10^{-5}$	12.94 dB
$r = 0.25$	2.000	0.170	$0.20 \cdot 10^{-8}$	**15.39 dB**
$r = 0.50$	2.000	0.182	$0.19 \cdot 10^{-7}$	14.81 dB
$r = 1$	2.000	0.371	$0.35 \cdot 10^{-2}$	8.61 dB

Nun ist der optimale Rolloff–Faktor $r \approx 0.25$, also deutlich kleiner als beim AWGN–Kanal. Der Grund hierfür ist, daß mit steigendem r auch die absolute Bandbreite größer wird und damit der Störeffektivwert stark zunimmt. Je größer der Einfluß der Impulsinterferenzen ist, um so kleiner ist der optimale Rolloff–Faktor.

d) Je größer der Rolloff–Faktor r, desto größer ist die horizontale Augenöffnung. Mit $r = 1$ ("$\cos^2$–Tiefpaß") ergibt sich ein auch zeitlich voll geöffnetes Auge.

e) Im Empfangssignal $r(t)$ ist die gesendete Folge nicht mehr zu erkennen, nach der Entzerrung mittels Nyquistfilter sehr wohl. Die Impulsinterferenzen werden durch die Nyquistentzerrung vollständig eliminiert, allerdings auf Kosten einer Verstärkung der Störungen (der Rauschanteil $d_N(t)$ ist deutlich größer als $n(t)$).

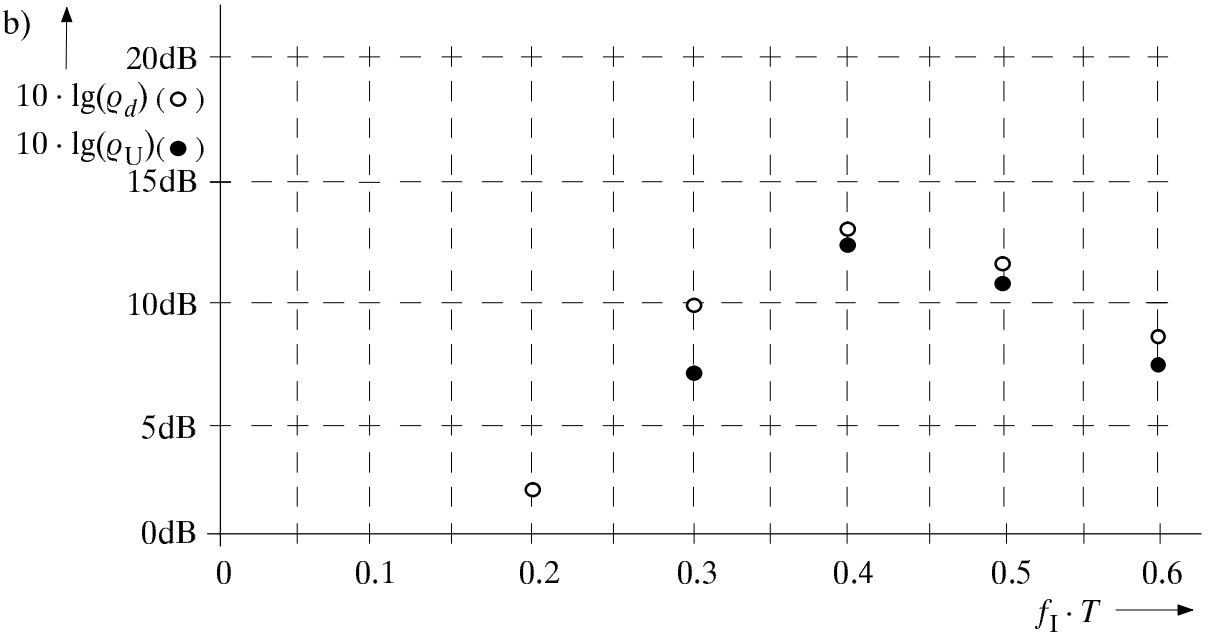
Sendet man einen Einzelimpuls der Dauer T und der Amplitude 1, so ergibt sich nach dem Koaxialkabel ein sehr langer Impuls mit einem Maximum von ca. 0.06.

D4 Gaußförmiger Impulsformer

a)

$f_I \cdot T$	$\ddot{o}(T_D)$	σ_d	p_B	$10 \cdot \lg(\varrho_d)$	p_U	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$
0.2	0	0.018	0.1	2.11 dB	0.5	———
0.3	0.192	0.042	$0.10 \cdot 10^{-2}$	9.78 dB	$0.12 \cdot 10^{-1}$	7.13 dB
0.4	0.735	0.088	$0.33 \cdot 10^{-5}$	13.08 dB	$0.15 \cdot 10^{-4}$	**12.41 dB**
0.5	1.159	0.170	$0.80 \cdot 10^{-4}$	11.54 dB	$0.32 \cdot 10^{-3}$	10.68 dB
0.6	1.469	0.309	$0.36 \cdot 10^{-2}$	8.61 dB	$0.86 \cdot 10^{-2}$	7.53 dB

b)



c) Es gibt eine optimale Grenzfrequenz des gaußförmigen Impulsformers. Diese hat hier (a_K = 40 dB) den Wert $f_{I,opt} \cdot T \approx 0.4$. Wie beim AWGN–Kanal gilt: Ist f_I zu klein, so ist das Nutzsignalverhalten unzureichend (zu kleine Augenöffnung). Dagegen werden bei zu großer Grenzfrequenz die Störungen unzureichend unterdrückt.

Der Störabstandsverlust zwischen Gauß–Impulsformer und Nyquistsystem (jeweils bezogen auf p_B, optimale Parameter) beträgt 15.39 – 13.08 = 2.31 dB.

d) Die optimale Grenzfrequenz $f_{I,opt}$ des gaußförmigen Impulsformers ist hier deutlich niedriger als beim AWGN–Kanal ($f_{I,opt} \cdot T \approx 0.4$ gegenüber 0.8). Je größer a_K, desto kleiner wird $f_{I,opt}$.

e) $\Phi_{dN}(f)$ ist nicht mehr tiefpaßartig wie beim AWGN–Kanal, sondern aufgrund des idealen Kanalentzerrers bandpaßartig. Beim betrachteten System (a_K = 40 dB) hat $\Phi_{dN}(f)$ sein Maximum bei $f \cdot T \approx 0.5$. Dieses ist ca. um den Faktor 85 höher als $\Phi_{dN}(f = 0)$.

D5 Entscheidungsrückkopplung

a) Ohne QR beträgt die normierte Augenöffnung nur 0.192. Dagegen zeigen sowohl die Signalverläufe als auch das Augendiagramm, daß bei idealer QR ein sehr viel weiter geöffnetes Auge vorliegt. Bei T_D = 0 beträgt die normierte Augenöffnung 0.644.

b)

$f_I \cdot T$	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$ ohne QR	σ_d ohne/mit QR	$\ddot{o}(T_D)$ mit QR	G_{QR}	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$ mit QR
0.2	———	0.018	0.164	———	13.22 dB
0.3	7.13 dB	0.042	0.644	10.53 dB	**17.66 dB**
0.4	12.41 dB	0.088	1.052	3.11 dB	15.52 dB

Der Störabstand mit QR kann als Summe des Störabstands ohne QR und des ausgegebenen Faktors G_{QR} (jeweils in dB) berechnet werden oder als "20 · Logarithmus" des Quotienten von halber Augenöffnung zu Störeffektivwert. Beides führt zum gleichen Ergebnis. Ist das Auge ohne QR geschlossen, so geht nur die zweite Berechnungsmöglichkeit. Das Optimum liegt bei $f_{I,opt} \cdot T \approx 0.3$ ($T_D = 0$ vorausgesetzt).

c) Das Optimum liegt etwa bei $T_D = -0.3$. Die Optimierung von T_D ergibt einen Störabstandsgewinn von $(0.779/0.644)^2$ entsprechend 1.65 dB.

T_D/T	0	–0.1	–0.2	–0.3	–0.4	–0.5
$\ddot{o}(T_D)$	0.644	0.725	0.769	**0.779**	0.764	0.735

d)

	σ_d	$\ddot{o}(T_D)$	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$	Verbesserung gegenüber c)
$f_I \cdot T = 0.2$ $T_D/T = -0.5$	0.018	0.371	20.26 dB	0.95 dB

e) Es ergeben sich in beiden Fällen identische Ergebnisse wie mit idealer QR.

	a_1	a_2	$\ddot{o}(T_D)$
$T_D = 0$	0.214	0.012	0.644
$T_D = T_{D,opt}$	0.349	0.036	0.779

D6 Entscheidungsrückkopplung mit RC–Tiefpaß

a) Das Kompensationssignal $w(t)$ verläuft hier entsprechend an– und abklingenden Exponentialfunktionen. Das korrigierte Signal $k(t)$ unterscheidet sich deutlich von dem bei idealer QR, nicht jedoch zu den Detektionszeitpunkten.

b) Man erhält wieder die Ergebnisse von D5. Die vom Programm ermittelten Parameter w_0 und f_G können z.B. durch Lösen des Gleichungssystems (3.2) bestimmt werden.

Berechnung von g_1. Mit $t' = T/2$ folgt:

$$g_1 = w_0 \cdot (1 - e^{-4f_G \cdot T/2}) = w_0 \cdot (1 - e^{-2f_G \cdot T}) .$$

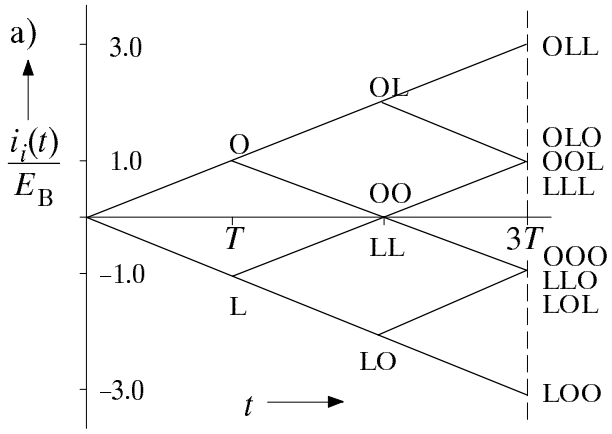
Berechnung von g_2. Mit $t' = 3 \cdot T/2$ folgt:

$$g_2 = w_0 \cdot (e^{4f_G \cdot T} - 1) \cdot e^{-4f_G \cdot 3T/2} = w_0 \cdot (1 - e^{-4f_G \cdot T}) \cdot e^{-2f_G \cdot T} .$$

	w_0	$f_G \cdot T$	$\ddot{o}(T_D)$
$T_D = 0$	0.226	1.468	0.644
$T_D = T_{D,opt}$	0.385	1.184	0.779

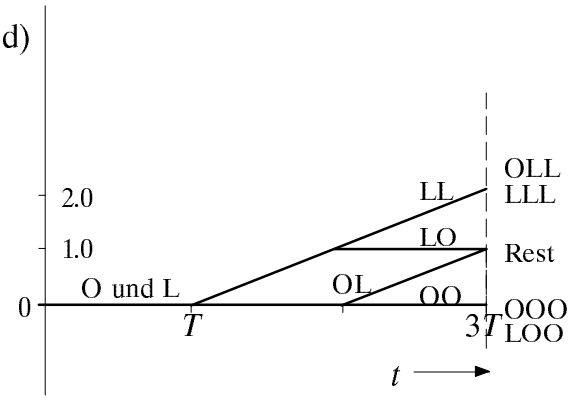
D7 Korrelationsempfänger

a)



Baumdiagramm stimmt genau überein. Da alle Sendesignale gleiche Energie besitzen, ist es egal, ob die Entscheidungen auf den Integralwerten I_i oder den korrigierten Werten W_i basieren.

d)



Bei unipolaren Signalen gibt es im Baumdiagramm immer dann horizontale Abschnitte, wenn das Symbol "O" auftritt. Im Fall bipolarer Signale ist die Entscheidung sicherer, da eine größere mittlere Impulsenergie vorhanden ist.

b)

	$\sigma_n = 0$	$\sigma_n = 1$	$\sigma_n = 5$	$\sigma_n = 10$	$\sigma_n = 50$
Rechteck (bipolar)	$D_{\min} = 2.00$ richtig/~~falsch~~	$D_{\min} = 1.89$ richtig/~~falsch~~	$D_{\min} = 1.42$ richtig/~~falsch~~	$D_{\min} = 0.89$ richtig/~~falsch~~	$D_{\min} = 3.79$ ~~richtig~~/falsch
Rechteck (unipolar)	$D_{\min} = 0.50$ richtig/~~falsch~~	$D_{\min} = 0.44$ richtig/~~falsch~~	$D_{\min} = 0.21$ richtig/~~falsch~~	$D_{\min} = 0.08$ ~~richtig~~/falsch	$D_{\min} = 2.39$ ~~richtig~~/falsch

c) Ich (G. Söder) nicht.

e) Bei bipolaren Signalen ist die Entscheidung aufgrund der größeren Impulsenergie sicherer. Dies erkennt man z.B. bei der Streuung $\sigma_n = 10$ (Fehler, falls unipolar).

f)

Gauß $f_I \cdot T = 0.5$	$\sigma_n = 0$	$\sigma_n = 1$	$\sigma_n = 5$	$\sigma_n = 10$	$\sigma_n = 50$
Integration: $0 \ldots 3T$	$D_{\min} = 1.04$ richtig/~~falsch~~	$D_{\min} = 1.02$ richtig/~~falsch~~	$D_{\min} = 0.58$ richtig/~~falsch~~	$D_{\min} = 0.02$ richtig/~~falsch~~	$D_{\min} = 4.44$ ~~richtig~~/falsch
Integration: $-T \ldots 4T$	$D_{\min} = 1.14$ richtig/~~falsch~~	$D_{\min} = 1.02$ richtig/~~falsch~~			

g) Integration: $0 \ldots 3T$: $D_{LLL} = 1.04$ $D_{OOL} = 1.14$ $D_{OLO} = 1.04$
Integration: $-T \ldots 4T$: $D_{LLL} = 1.14$ $D_{OOL} = 1.14$ $D_{OLO} = 1.14$

Integriert man nur von $0 \ldots 3T$, so sind bereits im rauschfreien Fall D_{LLL} und D_{OLO} kleiner als D_{OOL}, da sich die Folge "OOL" von der gesendeten Folge "OLL" nur im mittleren Symbol unterscheidet. Beim Integrationsbereich $-T \ldots 4T$ sind dagegen alle Werte gleich, da auch die Randbereiche richtig berücksichtigt werden.

D8 Viterbi–Empfänger

a) Das Signal $s(t)$ berücksichtigt bereits die Impulsinterferenzen. Durch diese verbreitert sich ein Einzelimpuls um ca. den Faktor 2 (absolute Dauer). Wegen $\sigma_n = 0$ gilt hier $r(t) = s(t)$. Durch das Matched–Filter wird ein solcher Einzelimpuls nochmals um ca. den Faktor 2 breiter. Das zeitdiskrete Signal m_v nach dem Dekorrelationsfilter weist deshalb etwa 5 von Null verschiedene Abtastwerte auf.

b) Aus a) folgt $v = 4$ (Detektionsabtastwerte g_0 ... g_{-4}). Daraus folgt, daß im Trellisdiagramm insgesamt 16 Zustände zu berücksichtigen wären.

c) Chaos.

d) Die in der Musterlösung zu V5 angegebenen Werte werden bestätigt. Die Folge "OOLOO ..." wird auch richtig erkannt.

e) In diesem Sonderfall (geöffnetes Auge, kein additives Rauschen) ist immer eine der beiden Gesamtfehlergrößen gleich 0 und der Viterbi–Empfänger trifft – genau wie der Schwellenwertentscheider – stets eine symbolweise Entscheidung. Bei beiden Empfängerarten ist im rauschfreien Fall die Fehlerwahrscheinlichkeit gleich 0.

f) In diesem Fall (keine Impulsinterferenzen, aber Rauschen) sind zu jedem Zeitpunkt die beiden Gesamtfehlergrößen (die unter der Voraussetzung gelten, daß das nächste Symbol "O" ist bzw. "L" ist) gleich. Auch hier trifft der Viterbi–Empfänger – wie der Schwellenwertentscheider – stets eine symbolweise Entscheidung. Bei beiden Empfängerarten ist die Fehlerwahrscheinlichkeit gleich Q(2).

g) Nun ist nicht immer eine symbolweise Entscheidung möglich. In diesem Fall wird der Viterbi–Empfänger (im Gegensatz zu Punkt e und f) eine kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit als der Schwellenwertentscheider aufweisen.

D9 Auswahl der Symbolfolge beim Viterbi–Empfänger

a) Zu jedem Zeitpunkt werden 4 Gesamtfehlergrößen aus dem Vergleich zweier Zahlenwerte ermittelt (Minimum). Die "Zustände" kennzeichnen die möglichen Werte für die nachfolgenden Symbole, also "OO", "OL", "LO" und "LL". Unter der Voraussetzung, daß die beiden nächsten Symbole wirklich dieser Kombination entsprechen, wird sich später für das zunächst vorbehaltlich ausgewählte Symbol entschieden.

b) Stimmen für alle 4 Möglichkeiten (d.h. unter allen Voraussetzungen, daß die beiden nächsten Symbole "OO", "OL", "LO" bzw. "LL" sind) die jeweils nur bedingt ausgewählten Symbolfolgen überein, so können diese sofort ausgegeben werden. Stimmen wenigstens Anfangsteile davon überein, werden zumindest diese ausgegeben.

c) Nein, es kommt nun zu Fehlern. Der Viterbi–Empfänger ist sehr gut dazu geeignet, Impulsinterferenzen zu bekämpfen, aber weniger gut bei großem Rauschen.

d) Endgültige Entscheidungen sind möglich zu den Zeitpunkten 1, 3, 4, 5, 7, 9 und 10.

e)

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v_ν	L		O L	L	O		L O		L O	O

D10 Vergleich der Fehlerwahrscheinlichkeiten

a) $g_0 = 1,\ g_1 = 0,\ g_{-1} = 0,\ \sigma_d = 0.5$ (Nyquistsystem):

$$h_{\mathrm{SE}} = 1.8\% \qquad h_{\mathrm{VE}} = 1.8\%.$$

Beide Systeme sind gleich gut (oder schlecht), da keine Impulsinterferenzen wirksam sind. Die theoretischen Werte sind jeweils gleich $\mathrm{Q}(2) \approx 2.27\ \%$. Die Abweichung ist auf die geringe Anzahl simulierter Werte zurückzuführen.

b) $g_0 = 0.6,\ g_1 = 0.3,\ g_{-1} = 0.1,\ \sigma_d = 0.25$:

$$h_{\mathrm{SE}} = 7.1\% \qquad h_{\mathrm{VE}} = 0.8\%.$$

Die Viterbi–Fehlerwahrscheinlichkeit ist näherungsweise gleich $\mathrm{Q}(0.6/0.25) = \mathrm{Q}(2.4) \approx 0.82\ \%$. Dagegen wird die Fehlerwahrscheinlichkeit beim SE im wesentlichen durch die "worst case"–Folgen bestimmt:

$$p_{\mathrm{B}} = \mathrm{Q}(0.2/0.25)/4 + \mathrm{Q}(0.4/0.25)/4 + \ldots = \mathrm{Q}(0.8)/4 + \mathrm{Q}(1.6)/4 + \ldots \approx 6.9\ \%.$$

c) $g_0 = 0.3,\ g_1 = 0.6,\ g_{-1} = 0.1,\ \sigma_d = 0.25$:

$$h_{\mathrm{SE}} = 45.3\% \qquad h_{\mathrm{VE}} = 0.9\%.$$

Beim Schwellenwertentscheider ist das Auge geschlossen und die Fehlerwahrscheinlichkeit beträgt fast 50 %. Dagegen erkennt der Viterbi–Empfänger die notwendige "Verschiebung " implizit und die Fehlerwahrscheinlichkeit ist innerhalb der Simulationsgenauigkeit gegenüber Punkt b) unverändert.

d) $g_0 = 0.4,\ g_1 = 0.3,\ g_{-1} = 0.3,\ \sigma_d = 0.2$:

$$h_{\mathrm{SE}} = 22.1\% \qquad h_{\mathrm{VE}} = 3.3\%.$$

Theoretisch ergibt sich beim Viterbi–Empfänger die Fehlerwahrscheinlichkeit Q(2), also ca. 2.27 %. Dagegen hat der Schwellenwertentscheider aufgrund des geschlossenen Auges eine sehr große Fehlerwahrscheinlichkeit.

e) $g_0 = 0.4,\ g_1 = 0.3,\ g_{-1} = 0.3,\ \sigma_d = 0$:

$$h_{\mathrm{SE}} = 25.8\% \qquad h_{\mathrm{VE}} = 0.$$

Ohne Störungen beträgt die Fehlerwahrscheinlichkeit des Schwellenwertentscheiders aufgrund des geschlossenen Auges exakt $p_{\mathrm{B}} = 1/4$. Hier hat das Rauschen sogar einen positiven Effekt. Manche Fehlentscheidungen aufgrund großer Impulsinterferenzen werden durch den Rauschanteil vermieden.

Anhang: Tabellen der Fehlerfunktionen

x	$20 \cdot \lg(x)$	$\phi(x)$	$Q(x)$	$0,5 \cdot \mathrm{erfc}(x)$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}x} e^{-x^2}$
0.0	$-\infty$ dB	0.500000	0.500000E+00	0.500000E+00	∞
0.2	-13.979 dB	0.579260	0.420740E+00	0.388649E+00	0.135517E+01
0.4	-7.959 dB	0.655422	0.344578E+00	0.285804E+00	0.600963E+00
0.6	-4.437 dB	0.725747	0.274253E+00	0.198072E+00	0.328018E+00
0.8	-1.938 dB	0.788145	0.211855E+00	0.128950E+00	0.185933E+00
1.0	0.000 dB	0.841345	0.158655E+00	0.786496E-01	0.103777E+00
1.2	1.584 dB	0.884930	0.115070E+00	0.448430E-01	0.556967E-01
1.4	2.923 dB	0.919243	0.807567E-01	0.238577E-01	0.283824E-01
1.6	4.082 dB	0.945201	0.547993E-01	0.118259E-01	0.136295E-01
1.8	5.105 dB	0.964070	0.359303E-01	0.545475E-02	0.613774E-02
2.0	6.021 dB	0.977250	0.227504E-01	0.233887E-02	0.258337E-02
2.2	6.848 dB	0.986097	0.139035E-01	0.931423E-03	0.101388E-02
2.4	7.604 dB	0.991802	0.819755E-02	0.344257E-03	0.370380E-03
2.6	8.299 dB	0.995339	0.466119E-02	0.118017E-03	0.125774E-03
2.8	8.943 dB	0.997445	0.255513E-02	0.375066E-04	0.396614E-04
3.0	9.542 dB	0.998650	0.134990E-02	0.110453E-04	0.116044E-04
3.2	10.103 dB	0.999313	0.687138E-03	0.301288E-05	0.314825E-05
3.4	10.630 dB	0.999663	0.336929E-03	0.760996E-06	0.791538E-06
3.6	11.126 dB	0.999841	0.159109E-03	0.177931E-06	0.184347E-06
3.8	11.596 dB	0.999928	0.723480E-04	0.385020E-07	0.397557E-07
4.0	12.041 dB	0.999968	0.316713E-04	0.770863E-08	0.793640E-08
4.2	12.465 dB	0.999987	0.133457E-04	0.142774E-08	0.146619E-08
4.4	12.869 dB	0.999995	0.541254E-05	0.244585E-09	0.250611E-09
4.6	13.255 dB	0.999998	0.211246E-05	0.387480E-10	0.396247E-10
4.8	13.625 dB	0.999999	0.793328E-06	0.567606E-11	0.579440E-11
5.0	13.979 dB	1.000000	0.286652E-06	0.768730E-12	0.783543E-12
5.2	14.320 dB	1.000000	0.996443E-07	0.962455E-13	0.979642E-13
5.4	14.648 dB	1.000000	0.333204E-07	0.111384E-13	0.113233E-13
5.6	14.964 dB	1.000000	0.107176E-07	0.119142E-14	0.120985E-14
5.8	15.269 dB	1.000000	0.331574E-08	0.117780E-15	0.119481E-15
6.0	15.563 dB	1.000000	0.986589E-09	0.107599E-16	0.109054E-16
6.2	15.848 dB	1.000000	0.282316E-09	0.908340E-18	0.919860E-18
6.4	16.124 dB	1.000000	0.776883E-10	0.708539E-19	0.716989E-19
6.6	16.391 dB	1.000000	0.205579E-10	0.510666E-20	0.516397E-20
6.8	16.650 dB	1.000000	0.523095E-11	0.340042E-21	0.343644E-21
7.0	16.902 dB	1.000000	0.127981E-11	0.209191E-22	0.211284E-22
7.2	17.147 dB	1.000000	0.301063E-12	0.118891E-23	0.120015E-23
7.4	17.385 dB	1.000000	0.680922E-13	0.624192E-25	0.629792E-25
7.6	17.616 dB	1.000000	0.148065E-13	0.302727E-26	0.305304E-26
7.8	17.842 dB	1.000000	0.309536E-14	0.135621E-27	0.136717E-27
8.0	18.062 dB	1.000000	0.622097E-15	0.561215E-29	0.565533E-29
8.2	18.276 dB	1.000000	0.120194E-15	0.214511E-30	0.216084E-30
8.4	18.486 dB	1.000000	0.223240E-16	0.757313E-32	0.762593E-32
8.6	18.690 dB	1.000000	0.398579E-17	0.246937E-33	0.248584E-33
8.8	18.890 dB	1.000000	0.684079E-18	0.743680E-35	0.748421E-35
9.0	19.085 dB	1.000000	0.112859E-18	0.206852E-36	0.208113E-36
9.2	19.276 dB	1.000000	0.178976E-19	0.531368E-38	0.534471E-38
9.4	19.463 dB	1.000000	0.272817E-20	0.126064E-39	0.126766E-39
9.6	19.645 dB	1.000000	0.399722E-21	0.276196E-41	0.277737E-41
9.8	19.825 dB	1.000000	0.562928E-22	0.560519E-43	0.560519E-43
10.0	20.000 dB	1.000000	0.761985E-23	0.140130E-44	0.140130E-44

Die vorherige Tabelle gilt für äquidistante x–Werte, die nachfolgende für äquidistante dB–Werte.

x	$20 \cdot \lg(x)$	$\phi(x)$	$Q(x)$	$0,5 \cdot \mathrm{erfc}(x)$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}x} e^{-x^2}$
1.000	.00 dB	0.841345	0.158655E+00	0.786496E-01	0.103777E+00
1.029	.25 dB	0.848307	0.151693E+00	0.727642E-01	0.950314E-01
1.059	.50 dB	0.855258	0.144742E+00	0.670652E-01	0.867179E-01
1.090	.75 dB	0.862184	0.137816E+00	0.615667E-01	0.788379E-01
1.122	1.00 dB	0.869073	0.130927E+00	0.562820E-01	0.713922E-01
1.155	1.25 dB	0.875910	0.124090E+00	0.512231E-01	0.643805E-01
1.189	1.50 dB	0.882682	0.117318E+00	0.464013E-01	0.578013E-01
1.223	1.75 dB	0.889374	0.110626E+00	0.418262E-01	0.516521E-01
1.259	2.00 dB	0.895971	0.104029E+00	0.375061E-01	0.459288E-01
1.296	2.25 dB	0.902458	0.975417E-01	0.334476E-01	0.406256E-01
1.334	2.50 dB	0.908820	0.911804E-01	0.296553E-01	0.357354E-01
1.372	2.75 dB	0.915040	0.849600E-01	0.261321E-01	0.312490E-01
1.413	3.00 dB	0.921104	0.788959E-01	0.228786E-01	0.271559E-01
1.454	3.25 dB	0.926997	0.730031E-01	0.198936E-01	0.234433E-01
1.496	3.50 dB	0.932704	0.672961E-01	0.171734E-01	0.200970E-01
1.540	3.75 dB	0.938211	0.617891E-01	0.147111E-01	0.171010E-01
1.585	4.00 dB	0.943505	0.564953E-01	0.125009E-01	0.144377E-01
1.631	4.25 dB	0.948573	0.514269E-01	0.105323E-01	0.120881E-01
1.679	4.50 dB	0.953405	0.465951E-01	0.879383E-02	0.100320E-01
1.728	4.75 dB	0.957990	0.420097E-01	0.727250E-02	0.824821E-02
1.778	5.00 dB	0.962321	0.376790E-01	0.595387E-02	0.671483E-02
1.830	5.25 dB	0.966390	0.336096E-01	0.482252E-02	0.540952E-02
1.884	5.50 dB	0.970194	0.298063E-01	0.386224E-02	0.430983E-02
1.939	5.75 dB	0.973728	0.262719E-01	0.305640E-02	0.339355E-02
1.995	6.00 dB	0.976993	0.230074E-01	0.238829E-02	0.263899E-02
2.054	6.25 dB	0.979989	0.200113E-01	0.184142E-02	0.202531E-02
2.113	6.50 dB	0.982720	0.172803E-01	0.139980E-02	0.153275E-02
2.175	6.75 dB	0.985192	0.148075E-01	0.104828E-02	0.114294E-02
2.239	7.00 dB	0.987413	0.125871E-01	0.772675E-03	0.839009E-03
2.304	7.25 dB	0.989391	0.106087E-01	0.560054E-03	0.605749E-03
2.371	7.50 dB	0.991139	0.886107E-02	0.398796E-03	0.429712E-03
2.441	7.75 dB	0.992669	0.733107E-02	0.278682E-03	0.299204E-03
2.512	8.00 dB	0.993996	0.600439E-02	0.190908E-03	0.204260E-03
2.585	8.25 dB	0.995134	0.486564E-02	0.128054E-03	0.136557E-03
2.661	8.50 dB	0.996101	0.389863E-02	0.839995E-04	0.892946E-04
2.738	8.75 dB	0.996913	0.308676E-02	0.538158E-04	0.570355E-04
2.818	9.00 dB	0.997587	0.241331E-02	0.336273E-04	0.355362E-04
2.901	9.25 dB	0.998138	0.186176E-02	0.204635E-04	0.215656E-04
2.985	9.50 dB	0.998584	0.141612E-02	0.121089E-04	0.127275E-04
3.073	9.75 dB	0.998939	0.106116E-02	0.695578E-05	0.729274E-05
3.162	10.00 dB	0.999217	0.782701E-03	0.387211E-05	0.404995E-05
3.255	10.25 dB	0.999432	0.567725E-03	0.208500E-05	0.217578E-05
3.350	10.50 dB	0.999595	0.404562E-03	0.108385E-05	0.112858E-05
3.447	10.75 dB	0.999717	0.282936E-03	0.542794E-06	0.564021E-06
3.548	11.00 dB	0.999806	0.193986E-03	0.261307E-06	0.270989E-06