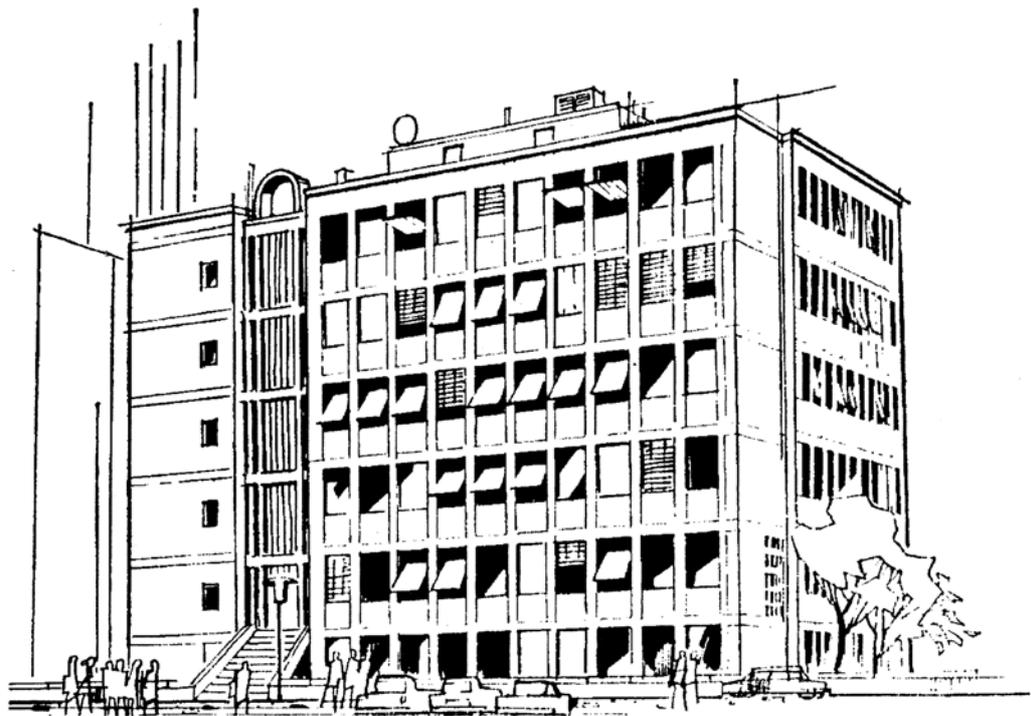


---

G. Söder: Simulation digitaler Übertragungssysteme

# Digitale Modulationsverfahren

Lehrstuhl für Nachrichtentechnik  
Technische Universität München





## Vorwort

Der Versuch "DMV" soll die charakteristischen Eigenschaften der insbesondere bei Funk- und Satellitenkanälen gängigen Modulationsverfahren *Amplitude Shift Keying* (ASK), *Frequency Shift Keying* (FSK) sowie *Phase Shift Keying* (PSK) erklären und sowohl einen Bezug zu den entsprechenden analogen Verfahren AM, FM und PM als auch zur digitalen Basisbandübertragung herstellen. Im Mittelpunkt der verwendeten Graphikprogramme "dmv" und "psk" steht oft die analytische oder simulative Bestimmung der Bitfehlerwahrscheinlichkeit, dem entscheidenden Gütekriterium der Digitalsysteme. Dabei zeigt es sich, daß hinsichtlich der Fehlerwahrscheinlichkeitsberechnung diese unterschiedlichen Verfahren viele Gemeinsamkeiten aufweisen.

Die vorliegende Anleitung gliedert sich in die drei Kapitel *Theoretische Grundlagen*, *Vorbereitungsfragen* und *Versuchsdurchführung*. Anhand dieses Heftes und der beiden Programme "dmv" und "psk" sollte ein Benutzer mit Grundkenntnissen der Nachrichtentechnik in der Lage sein, sich die wesentlichen Merkmale der Digitalsignalübertragung in etwa 8 Stunden (jeweils ca. 4 Stunden für Vorbereitung sowie Versuchsdurchführung) zu erarbeiten.

Die Musterlösungen der Vorbereitungsfragen und der Versuchsdurchführung sind am Ende des Heftes (ab Seite 63) beigefügt. Auf Seite IV finden Sie noch eine Zusammenstellung einschlägiger Literaturstellen, die für eine erfolgreiche Versuchsdurchführung durchaus nützlich sein können, jedoch nicht vorausgesetzt werden.

Die interaktiven Graphikprogramme "dmv" und "psk" wurden im Rahmen zweier von mir betreuten Diplomarbeiten von *Manfred Kugler* und *Erik Hogl* mit großer Sorgfalt konzipiert und erstellt. Bei der Konzeption der ersten Programmversion im Jahre 1986 hat mein ehemaliger Kollege, Herr *Prof. Dr.-Ing. Frowin Derr* (jetzt Professor an der Fachhochschule Ulm), tatkräftig mitgearbeitet, wofür ich mich an dieser Stelle herzlich bedanken möchte. Ich freue mich besonders, daß die Programme "dmv" und "psk" auch in seinen Lehrveranstaltungen in Ulm eingesetzt werden.

1997/98 wurden die Lehrprogramme von mir überarbeitet, insbesondere im Hinblick einer Anpassung an Inhalt und Nomenklatur der Vorlesungen von Prof. Hagenauer. Dabei wurden gleichzeitig einige Mängel früherer Versionen behoben.

Ich wünsche Ihnen nun viel Erfolg und Spaß beim Durcharbeiten dieses Versuches.

*Hinweis:* Die beiden in diesem Versuch verwendeten Lehrprogramme "dmv" und "psk" sind Bestandteil des insgesamt 24 Graphikprogramme umfassenden Softwarepaketes "LNTsim", das wir – ebenso wie die Windows-Programme der Reihe "LNTwin" – an Hochschuleinrichtungen zu günstigen Konditionen weitergeben. Bei diesbezüglichen Fragen, aber auch bei Kritik jeder Art, wenden Sie sich bitte an:

Priv.-Doz. Dr.-Ing. habil. Günter Söder  
Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Technische Universität München  
D-80290 München, Tel: (089) 289-23486, Fax: (089) 289-23490  
Email: guenter.soeder@ei.tum.de

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Allgemeines</b>	<b>1</b>
1.1.1	Digitale Basisbandübertragung	2
1.1.2	Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei Basisbandübertragung/AWGN-Kanal	4
1.1.3	Suboptimaler Digitalempfänger	6
1.1.4	Einige Eigenschaften der Digitalsignalübertragung	8
<b>1.2</b>	<b>Digitale Amplitudenmodulation (ASK)</b>	<b>11</b>
1.2.1	Blockschaltbild und Signalverläufe	11
1.2.2	Leistungsdichtespektren	13
1.2.3	Bitfehlerwahrscheinlichkeit für ASK/AWGN-Kanal	15
<b>1.3</b>	<b>Digitale Frequenzmodulation (FSK)</b>	<b>17</b>
1.3.1	Signalverläufe	17
1.3.2	Bitfehlerwahrscheinlichkeit für FSK/AWGN-Kanal	19
<b>1.4</b>	<b>Digitale Phasenmodulation (PSK)</b>	<b>21</b>
1.4.1	Signalverläufe bei binärer Phasenmodulation (BPSK)	21
1.4.2	Leistungsdichtespektren	23
1.4.3	Bitfehlerwahrscheinlichkeit für BPSK/AWGN-Kanal	24
1.4.4	Basisbandmodell für BPSK und ASK	24
1.4.5	Phasendiagramm und mehrstufige Phasenmodulation	27
1.4.6	Zweiwege-Kanalmodell	30
<b>2</b>	<b>Vorbereitungsfragen</b>	<b>31</b>
V1	Bitfehlerwahrscheinlichkeit	31
V2	Signalverläufe bei ASK, FSK und PSK	35
V3	Beschreibung von Bandpaßkanälen	36
V4	Äquivalentes Tiefpaßmodell	38
V5	Inkohärente ASK-Demodulation	41
<b>3</b>	<b>Versuchsdurchführung</b>	<b>43</b>
D1	Untersuchungen zum Basisbandsystem	43
D2	ASK-System mit Synchrondemodulation	46
D3	Untersuchungen zum Rauschen	48
D4	Untersuchungen am FSK-System	51
D5	Leistungsdichtespektren der Nutzsignale	52
D6	BPSK-System	53
D7	Quaternäre Phasenumtastung	55
D8	Zweiwegekanal	57
D9	Inkohärente Demodulation bei ASK und FSK	59
<b>4</b>	<b>Musterlösungen der Vorbereitungsfragen</b>	<b>63</b>
<b>5</b>	<b>Musterlösungen der Versuchsdurchführung</b>	<b>69</b>
	<b>Anhang: Tabellen der Fehlerfunktionen</b>	<b>83</b>

## Literaturverzeichnis

Zur Vorbereitung dieses Praktikumsversuchs genügt es durchaus, die im Abschnitt 1 dieser Anleitung zusammengestellten Theoretischen Grundlagen durcharbeiten sowie die Vorbereitungsfragen (Abschnitt 2) zu beantworten. Die nachfolgende Liste gibt eine Übersicht zusätzlicher Fachbücher, die die hier behandelte Thematik zum Inhalt haben.

- [1] Anderson, J.B.; Aulin, T.; Sundberg, C.E.: *Digital Phase Modulation*. New York: Plenum Press, 1986.
- [2] Hagenauer, J.: *Nachrichtentechnik 1*. Vorlesungsmanuskript. Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Technische Universität München, 1998.
- [3] Hagenauer, J.: *Nachrichtentechnik 2*. Vorlesungsmanuskript. Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Technische Universität München, 1998.
- [4] Hänsler, E.: *Statistische Signale*. Berlin: Springer, 1991.
- [5] Haykin, S.: *Communication Systems*. 2. Auflage. New York: J. Wiley & Sons, 1988.
- [6] Mäusl, R.: *Digitale Modulationsverfahren*. Heidelberg: Hüthig-Verlag, 1988.
- [7] Marko, H.: *Methoden der Systemtheorie*. 3. Auflage. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [8] Proakis, J. G.: *Digital Communications*. 2. Auflage. New York: Mc Graw-Hill, 1989.
- [9] Söder, G.: *Modellierung, Simulation und Optimierung von Nachrichtensystemen*. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [10] Söder, G.: *Simulation von Nachrichtensystemen*. Praktikumsanleitung, Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Technische Universität München, 1998.
- [11] Söder, G.; Tröndle, K.: *Digitale Übertragungssysteme*. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [12] Stein, S.; Stones, I.J.: *Modern Communication Principles*. New York: Mc Graw-Hill, 1967.
- [13] Ziemer, R.; Peterson, R. L.: *Digital Communication and Spread Spectrum Systems*. New York: Mc Millon, 1985.

# 1 Theoretische Grundlagen

**Inhalt:** Nach den analogen Modulationsverfahren sollen nun in diesem zweiten Versuch die Grundlagen und Eigenschaften der digitalen Modulationsverfahren ASK (*Amplitude Shift Keying*), FSK (*Frequency Shift Keying*), PSK (*Phase Shift Keying*) sowie QAM (*Quadratur-Amplitudenmodulation*) erarbeitet werden. Insbesondere werden für diese digitalen Bandpaßsysteme jeweils äquivalente Basisbandmodelle angegeben und daraus die (mittlere) Bitfehlerwahrscheinlichkeit berechnet.

## 1.1 Allgemeines

Die digitalen Modulationsverfahren ASK, FSK und PSK ergeben sich direkt aus den Analogverfahren AM, FM und PM, wenn man jeweils als Quellensignal  $q(t)$  ein Digital-signal verwendet. Bild 1.1 zeigt Ausschnitte des modulierenden binären Rechtecksignals  $q(t)$  und der für ASK-, FSK- bzw. PSK-Modulation typischen Sendesignale  $s(t)$ . Da hier das Quellensignal zweiwertig ist, können auch die Hüllkurve (ASK), die Augenblicksfrequenz (FSK) bzw. die Phasenlage (PSK) jeweils nur zwei mögliche Werte annehmen.

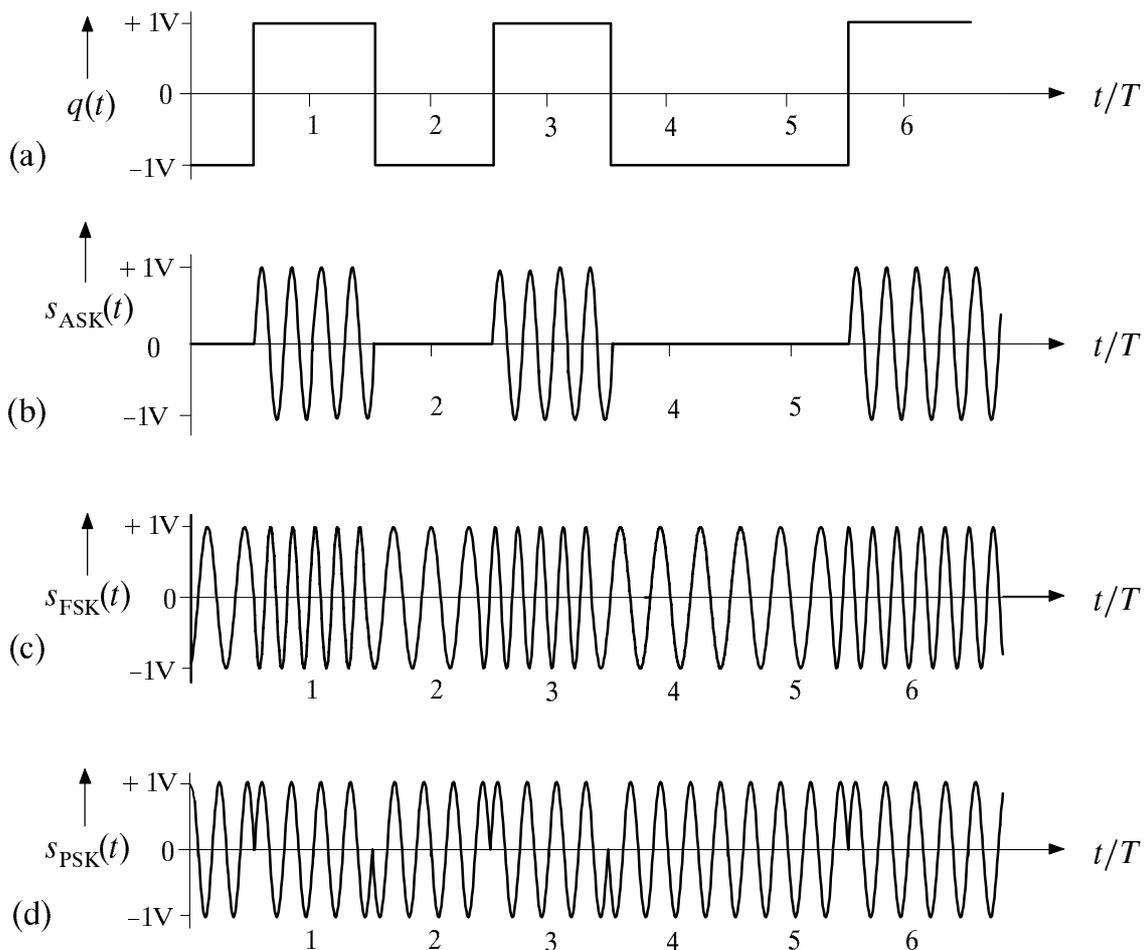


Bild 1.1: Binäres rechteckförmiges Quellensignal (a) sowie die resultierenden Sendesignale bei ASK (b), FSK (c) und PSK (d).

### 1.1.1 Digitale Basisbandübertragung

Zur Einführung wird zunächst das Prinzip der Digitalsignalübertragung am Beispiel eines Basisbandsystems erläutert. Eine detaillierte Darstellung dieses Gebietes finden Sie in der entsprechenden Versuchsanleitung des Praktikums "Simulationsmethoden in der Nachrichtentechnik". Haben Sie an diesem Praktikum teilgenommen, so können Sie die Abschnitte 1.1.1 bis 1.1.4 überspringen.

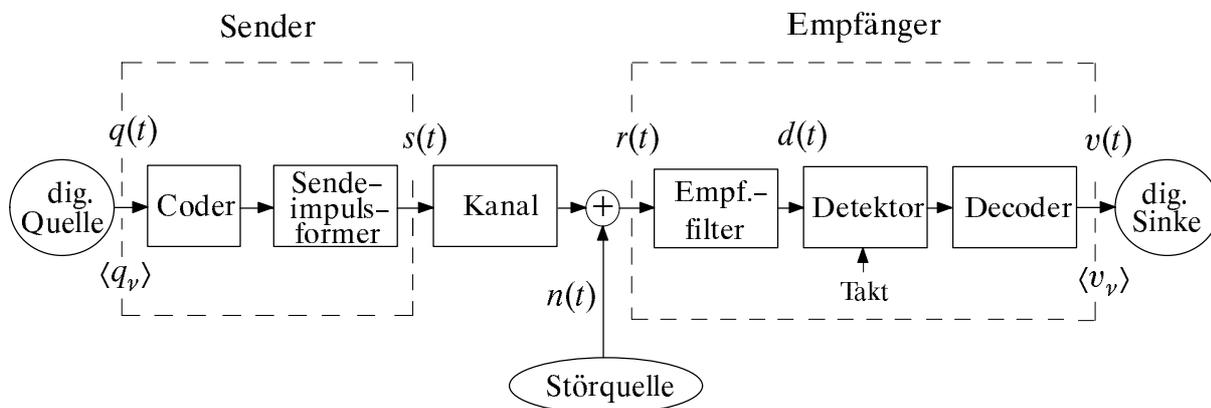


Bild 1.2: Blockschaltbild eines digitalen Basisbandübertragungssystems inklusive Codier- und Decodiereinrichtungen.

Die digitale Quelle erzeugt die Quellensymbolfolge  $\langle q_\nu \rangle$ , die möglichst fehlerfrei zur Nachrichtensinke übertragen werden soll. Die physikalische Repräsentation der Quellensymbolfolge ist das Quellensignal  $q(t)$ . Im folgenden wird die digitale Quelle als binär (d.h.: die Stufenzahl ist  $M=2$ ) und redundanzfrei vorausgesetzt. Letzteres bedeutet, daß die beiden möglichen Symbole "O" und "L" gleichwahrscheinlich sind und statistisch unabhängig voneinander auftreten. Mit der Bitdauer  $T_B$  eines binären Nachrichtensymbols ergibt sich für die *Bitrate* des hier betrachteten Übertragungssystems:  $R_B=1/T_B$ .

Das Quellensignal muß vor der Übertragung an die spektralen Eigenschaften des Übertragungsmediums und der Empfangseinrichtungen angepaßt werden. Hierzu dient der Sender, der im allgemeinen aus einem Coder und einem Sendepulsformer besteht. Das Ausgangssignal des Senders ist das Sendesignal  $s(t)$ , das mit dem Sendegrundimpuls  $g_s(t) \circ \bullet G_s(f)$ , den dimensionslosen Amplitudenkoeffizienten  $a_\nu$  und der Symboldauer  $T$  (bei Binärübertragung gilt  $T=T_B$ ) in folgender Weise geschrieben werden kann:

$$s(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot g_s(t - \nu \cdot T) . \quad (1.1)$$

Für das Folgende wird die binäre redundanzfreie Übertragung mit rechteckförmigen NRZ-Sendeimpulsen (Amplitude  $s_0$ , Dauer  $T$ ) betrachtet. Somit entfällt der Coder – und damit natürlich auch der Decoder beim Empfänger – , und das Spektrum von  $g_s(t)$  lautet:  $G_s(f) = s_0 \cdot T \cdot \text{si}(\pi \cdot f \cdot T)$ . Bei einem unipolaren System sind die Amplitudenkoeffizienten  $a_\nu \in \{0, 1\}$ . Dagegen gilt bei bipolarer Übertragung:  $a_\nu \in \{-1, +1\}$ .

Bei der Übertragung über den Kanal (Übertragungsmedium) wird das Signal  $s(t)$  i.a. verzerrt und von (additiven) Störungen überlagert. Der Kanal kann z.B. ein Koaxialkabel

sein. Bei einem Lichtwellenleiter oder einem Funksystem ist dagegen die Basisbandübertragung direkt nicht anwendbar. Sind die Übertragungseigenschaften des Kanals linear und zeitunabhängig, so wird der Einfluß des Kanals auf das zu übertragende Nutzsignal ausreichend genau durch den Kanalfrequenzgang  $H_K(f) \bullet \text{---} \circ h_K(t)$  beschrieben. Das Kanal-Ausgangssignal inklusive Störungen bezeichnet man als das Empfangssignal

$$r(t) = s(t) * h_K(t) + n(t) \quad (\text{hierbei bezeichnet } * \text{ die Faltung}) . \quad (1.2)$$

Das Störsignal  $n(t)$  kann explizit nicht angegeben werden. Es muß vielmehr durch seine statistischen Kenngrößen, z.B. durch die WDF  $f_n(n)$  und das LDS  $\Phi_n(f)$  charakterisiert werden. Im folgenden wird von "gaußverteilten und weißen" Störungen  $n(t)$  ausgegangen.

Der Empfänger des betrachteten digitalen Basisbandübertragungssystems beinhaltet stets das Empfangsfilter und den getakteten Detektor (z.B. einen Schwellenwertentscheider). Das Empfangsfilter mit dem Frequenzgang  $H_E(f) \bullet \text{---} \circ h_E(t)$  hat die Aufgabe, die Störleistung vor dem Detektor zu begrenzen. Hierzu eignet sich ein Tiefpaß, also ein passives Filter. Zusätzlich hat das Empfangsfilter oft die Aufgabe, die auf dem Kanal entstandenen Amplituden- und Phasenverzerrungen soweit wie nötig und möglich zu beseitigen. Dazu müssen die für die Übertragung des Nutzsignals wichtigen Frequenzanteile angehoben werden, was nur mit einer aktiven Schaltung möglich ist ("Entzerrer").

Das Ausgangssignal des Empfangsfilters  $H_E(f)$  und gleichzeitig das Eingangssignal des Detektors ist das Detektionssignal

$$d(t) = r(t) * h_E(t) = s(t) * h_K(t) * h_E(t) + n(t) * h_E(t) = d_S(t) + d_N(t) . \quad (1.3)$$

Die beiden Indizes "S" und "N" stehen hierbei für "Signal" und "Noise".

Der Nutzanteil  $d_S(t)$  läßt sich wieder als Summe von gewichteten und jeweils um die Symboldauer  $T$  verschobenen Detektionsgrundimpulsen darstellen. Analog zu (1.1) gilt:

$$d_S(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot g_d(t - \nu \cdot T) \quad \text{mit} \quad g_d(t) = g_s(t) * h_K(t) * h_E(t) . \quad (1.4)$$

Ist das Rauschsignal  $n(t)$  am Empfängereingang gaußverteilt, so ist auch das Detektionsstörsignal  $d_N(t)$  gaußverteilt. Die Leistung  $\sigma_d^2$  dieses unerwünschten, störenden Anteils kann man mit nachfolgender Gleichung berechnen, wobei der rechte Teil nur für weißes Rauschen mit der konstanten (zweiseitigen) Rauschleistungsdichte  $\Phi_n(f) = N_0/2$  gilt:

$$\sigma_d^2 = \overline{d_N(t)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(f) \cdot |H_E(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_E(f)|^2 df . \quad (1.5)$$

Zur Amplituden- und Zeitregenerierung wird das Detektionssignal  $d(t)$  dem Detektor zugeführt, der zu den äquidistanten Detektionszeitpunkten die Momentanwerte  $d(\nu \cdot T)$  mit einem Schwellenwert  $E=0$  vergleicht und daraus das rechteckförmige Sinkensignal  $v(t)$  gewinnt. Das hierzu notwendige Taktsignal muß von der Taktgewinnungseinrichtung aus dem ankommenden Signal  $r(t)$  erzeugt werden, z.B. mit Hilfe eines Phasenregelkreises. Für einen solchen ist auch die Bezeichnung PLL (*Phase Locked Loop*) üblich. Die Taktgewinnungseinrichtung wird im folgenden stets als ideal angenommen.

### 1.1.2 Bitfehlerwahrscheinlichkeit für Basisbandübertragung/AWGN-Kanal

Eines der aussagekräftigsten Gütekriterien eines jeden digitalen Übertragungssystems ist die *Bitfehlerquote*  $h_B$  (engl.: *Bit Error Rate, BER*). Diese ist als relative Häufigkeit definiert und kann durch einen Vergleich von Quellen- und Sinkensymbolfolge gemessen werden, indem man die Anzahl  $n_B$  der aufgetretenen Bitfehler ( $v_\nu \neq q_\nu$ ) durch die Anzahl  $N$  der insgesamt übertragenen Bit dividiert. Es gilt also:  $h_B = n_B/N$ .

Die Bitfehlerquote wird als Qualitätsmerkmal realisierter Systeme herangezogen. Sie eignet sich nicht für die Konzipierung und Optimierung noch zu planender Systeme. Hier muß (mit dem Erwartungswert  $E[ \dots ]$ ) auf die (mittlere) Bitfehlerwahrscheinlichkeit

$$p_B = E[p(v_\nu \neq q_\nu)] = \overline{p(v_\nu \neq q_\nu)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \cdot \sum_{\nu=-N}^N p(v_\nu \neq q_\nu) \quad (1.6)$$

übergegangen werden, die eine Vorhersage über die zu erwartende Fehlerquote erlaubt. Nach den elementaren Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung stimmt im Grenzfall  $N \rightarrow \infty$  die Aposteriori-Kenngröße  $h_B$  mit der Apriori-Kenngröße  $p_B$  überein.

Bei einem verzerrenden Kanal kann die Berechnung der Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  nach (1.6) durch Zeitmittelung über die Verfälschungswahrscheinlichkeiten  $p(v_\nu \neq q_\nu)$  aller Symbole sehr aufwendig sein. Ist dagegen der Kanal bis auf das unvermeidbare Rauschen  $n(t)$  ideal, d.h. gilt  $H_K(f) = 1$ , so wird die Berechnung von  $p_B$  und die Systemoptimierung (Minimierung von  $p_B$ ) sehr einfach. Einen solchen Kanal mit  $H_K(f) = 1$  und additivem Rauschterm  $n(t)$  nennt man AWGN-Kanal (*"Additive White Gaussian Noise"*).

Setzt man desweiteren noch Impulsinterferenzfreiheit – d.h. keine gegenseitige Beeinflussung der einzelnen Detektionsimpulse – sowie einen binären Schwellenwertentscheider mit optimalen Einstellungen (Schwellenwert  $E_{\text{opt}} = 0$ , Detektionszeitpunkt  $T_{D,\text{opt}} = 0$ ) voraus, so sind alle Verfälschungswahrscheinlichkeiten  $p(v_\nu \neq q_\nu)$  gleich, und es kann auf die aufwendige Zeitmittelung in Gl. (1.6) verzichtet werden.

In diesem Sonderfall haben alle Abtastwerte des Detektionsnutzsignals einen von zwei möglichen Werten:  $d_S(\nu T) = \pm g_d(0)$ . Hierbei bezeichnet  $g_d(0)$  das Maximum des (als symmetrisch angenommenen) Detektionsgrundimpulses. Ist  $d_S(\nu T) = -g_d(0)$ , so kommt es immer dann zu einem Bitfehler, wenn der zugehörige Rauschabtastwert  $d_N(\nu T)$  größer als  $g_d(0)$  ist. Bei weißem Rauschen  $n(t)$  ist aber der Störanteil  $d_N(t)$  des Detektionssignals ebenfalls gaußverteilt und die Streuung (Störeffektivwert)  $\sigma_d$  kann mit Gl. (1.5) berechnet werden. Somit läßt sich mit dem komplementären Gaußschen Fehlerintegral

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_x^{+\infty} e^{-u^2/2} du = 1 - \Phi(x) \quad (1.7)$$

für die Wahrscheinlichkeit einer solchen Fehlentscheidung auch schreiben:

$$p(v_\nu \neq q_\nu) = p(d_N(\nu \cdot T) > g_d(0)) = Q\left(\frac{g_d(0)}{\sigma_d}\right). \quad (1.8)$$

Für  $d_S(\nu T) = g_d(0)$  erhält man wegen der Symmetrie der  $Q$ -Funktion den gleichen Wert.

Deshalb ist bei den oben genannten Voraussetzungen ( $E_{\text{opt}} = 0$ ,  $T_{\text{D,opt}} = 0$ , keine Impulsinterferenzen) auch die mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit durch Gl. (1.8) gegeben:

$$p_B = \overline{p(v_v \neq q_v)} = Q\left(\frac{g_d(0)}{\sigma_d}\right). \quad (1.9)$$

Der optimale Empfänger beim AWGN-Kanal besteht aus einem Matched-Filter (siehe Versuch "Optimale Filter" in [10]) und anschließendem Schwellenwertentscheider. Im folgenden betrachten wir ein binäres bipolares Basisbandsystem (d.h.  $a_v \in \{-1, +1\}$ ) mit rechteckförmigen NRZ-Sendeimpulsen der Amplitude  $s_0$  und der Dauer  $T$ . In diesem Sonderfall lautet das (akausale) Matched-Filter für den Detektionszeitpunkt  $T_{\text{D,opt}} = 0$ :

$$H_E(f) = H_{\text{MF}}(f) = K_{\text{MF}} \cdot G_s^*(f) = \text{si}(\pi f T). \quad (1.10)$$

Die aus Dimensionsgründen erforderliche Konstante wurde vereinfachend  $K_{\text{MF}} = (s_0 T)^{-1}$  gesetzt. Damit gilt für die zugehörige (akausale) Impulsantwort  $h_{\text{MF}}(t) \circ \bullet H_{\text{MF}}(f)$ :

$$h_E(t) = h_{\text{MF}}(t) = K_{\text{MF}} \cdot g_s(-t) = \begin{cases} 1/T & \text{für } |t| \leq T/2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.11)$$

Das bedeutet: Die optimale Impulsantwort ist hier formgleich mit dem rechteckförmigen Sendegrundimpuls; sie kann z.B. mit Hilfe eines Integrators (über eine Symboldauer  $T$ ) realisiert werden. Der Detektionsgrundimpuls  $g_d(t)$  ist somit ein Dreieckimpuls mit der absoluten Dauer  $2T$  und der Amplitude  $g_d(0) = s_0$ . Bild 1.3 zeigt einen Ausschnitt aus dem Detektionsnutzsignal  $d_S(t)$  für ein zufälliges Sendesignal  $s(t)$ . Zu allen Detektionszeitpunkten gilt:  $d_S(vT) = \pm s_0$ . Der Detektionsgrundimpuls  $g_d(t)$  ist grau dargestellt.

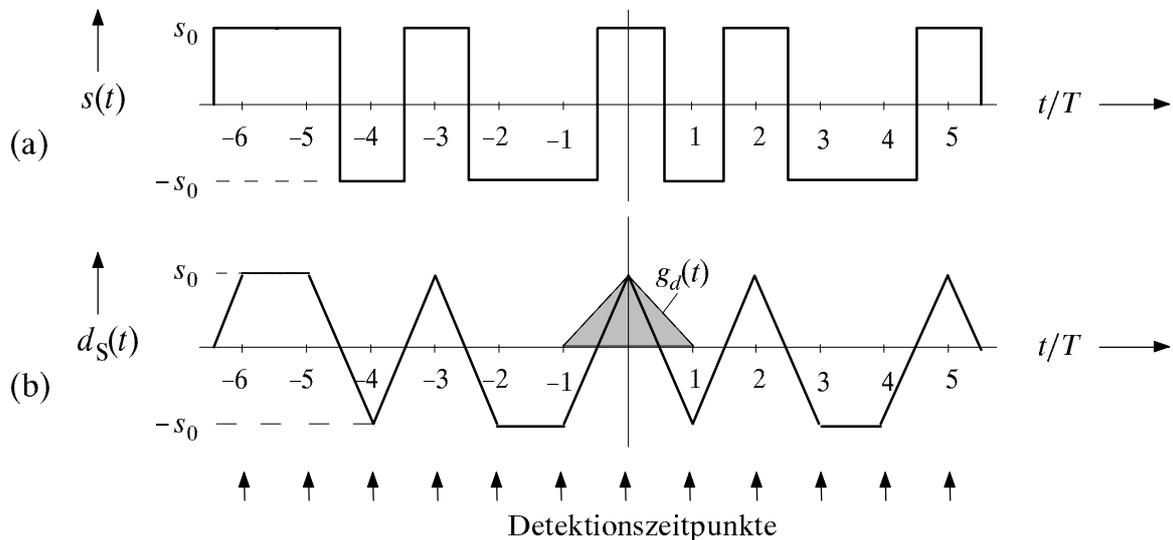


Bild 1.3: Ausschnitte aus dem Sendesignal (a) und dem Detektionsnutzsignal (b) beim optimalen binären Basisbandsystem (Störungen sind hier nicht berücksichtigt:  $n(t) = 0$ ).

Für die Detektionsstörleistung folgt aus (1.5) und (1.10), wiederum mit  $K_{\text{MF}} = (s_0 T)^{-1}$ :

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \text{si}^2(\pi f T) df = \frac{N_0}{2T}. \quad (1.12)$$

Setzt man dieses Ergebnis zusammen mit dem Nutzabtastwert  $g_d(0) = s_0$  in Gl. (1.9) ein, so erhält man für die mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit des optimalen binären bipolaren Basisbandsystems für den AWGN-Kanal:

$$p_B = Q\left(\frac{g_d(0)}{\sigma_d}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot s_0^2 \cdot T}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{s_0^2 \cdot T}{N_0}}\right). \quad (1.13)$$

Hierzu ist anzumerken, daß in der Literatur anstelle von  $Q(x)$  häufig auch die äquivalente Funktion  $\operatorname{erfc}(x)$  verwendet wird. Es gilt  $Q(x) = 0.5 \cdot \operatorname{erfc}(x/\sqrt{2})$  und die Definition

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_x^{+\infty} e^{-u^2} du. \quad (1.14)$$

Manchmal – so z.B. auch in den Programmen "dmv" und "psk" – wird zusätzlich zu  $p_B$  das Signalrauschleistungsverhältnis  $\varrho_d$  am Entscheider angegeben. Bei den hier getroffenen Voraussetzungen – und nur bei diesen – gilt dabei die nachfolgende Definition:

$$\varrho_d = \frac{\overline{d_S(v \cdot T)^2}}{\overline{d_N(v \cdot T)^2}} = \left(\frac{g_d(0)}{\sigma_d}\right)^2 = \frac{2 \cdot s_0^2 \cdot T}{N_0}. \quad (1.15)$$

Der allgemeingültige Zusammenhang zwischen  $p_B$  und  $\varrho_d$  lautet:

$$p_B = Q(\sqrt{\varrho_d}). \quad (1.16)$$

Anstelle von Gl. (1.13) kann man mit der Energie  $E_B = s_0^2 \cdot T$  eines NRZ-Rechtecksendeimpulses ("Energie pro Bit") auch schreiben:

$$p_B = Q(\sqrt{2E_B/N_0}) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}(\sqrt{E_B/N_0}). \quad (1.17)$$

Das Signalrauschleistungsverhältnis am Entscheider ergibt sich damit zu  $\varrho_d = 2 \cdot E_B/N_0$  (gültig für binäre bipolare Basisbandsysteme, AWGN-Kanal und optimalen Empfänger).

In der Vorbereitungsfrage V1 wird die Bitfehlerwahrscheinlichkeit numerisch ausgewertet. Im Anhang sind die Funktionen  $\phi(x)$ ,  $Q(x)$  und  $\operatorname{erfc}(x)$  tabellarisch angegeben.

### 1.1.3 Suboptimaler Digitalempfänger

Im letzten Abschnitt wurde der bestmögliche Empfänger (bestehend aus Matched-Filter und Schwellenwertentscheider) für den bestmöglichen Kanal (AWGN) beschrieben. Damit ergibt sich die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  gemäß (1.13) bzw. (1.17). Bei einem verzerrenden Kanal oder einem anders gearteten Empfänger ist  $p_B$  (deutlich) größer.

In der Versuchsdurchführung wird häufiger anstelle des Matched-Filters ein Gauß-Tiefpaß mit dem Frequenzgang

$$H_E(f) = e^{-\pi \left(\frac{f}{2f_E}\right)^2} \quad (1.18)$$

verwendet. Mit der Grenzfrequenz  $f_E$  erhält man so für die Detektionsstörleistung:

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_E(f)|^2 df = \frac{N_0}{\sqrt{2}} \cdot f_E. \quad (1.19)$$

Je kleiner die Grenzfrequenz  $f_E$  gewählt wird, um so kleiner ist auch die Detektionsstörleistung  $\sigma_d^2$ . Bei Verwendung dieses suboptimalen, gaußförmigen Empfangsfilters  $H_E(f)$  kommt es aber auch zu Impulsinterferenzen. Das bedeutet, daß die Detektion eines Symbols von den Nachbarsymbolen beeinflusst wird.

Bild 1.4 zeigt einen Ausschnitt aus dem Detektionssignal  $d(t)$  für ein zufälliges Sendesignal  $s(t)$ . Zusätzlich eingezeichnet ist das Detektionsnutzsignal  $d_S(t)$ . Es ist zu erkennen, daß auch ohne Berücksichtigung des Rauschanteils  $d_N(t)$  die Abstände zu der Schwelle  $E = 0$  bei den verschiedenen Detektionszeitpunkten unterschiedlich groß sind.

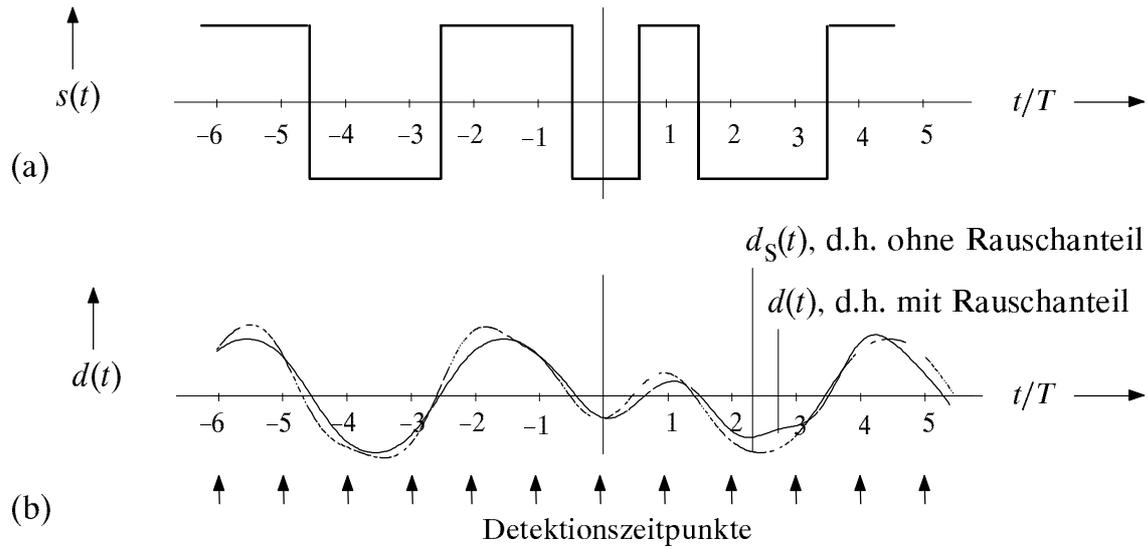


Bild 1.4: Ausschnitte aus dem Sendesignal (a) und dem Detektionssignal (b) bei einem suboptimalen binären Basisbandsystem mit gaußförmigem Empfangsfilter nach Gl. (1.18).

Zur Untersuchung dieses Systems eignet sich das sogenannte Augendiagramm. Dieses wird im nachfolgenden Versuch "Impulsinterferenzen & Entzerrung" eingehend behandelt. Bild 1.5 zeigt das Augendiagramm, das sich bei einem gaußförmigen Empfangsfilter mit der (normierten) Grenzfrequenz  $f_E \cdot T = 0.4$  ergibt. Das linke Bild (a) basiert auf dem Signal  $d(t)$ , im rechten Bild (b) ist der additive Rauschterm  $d_N(t)$  nicht berücksichtigt.

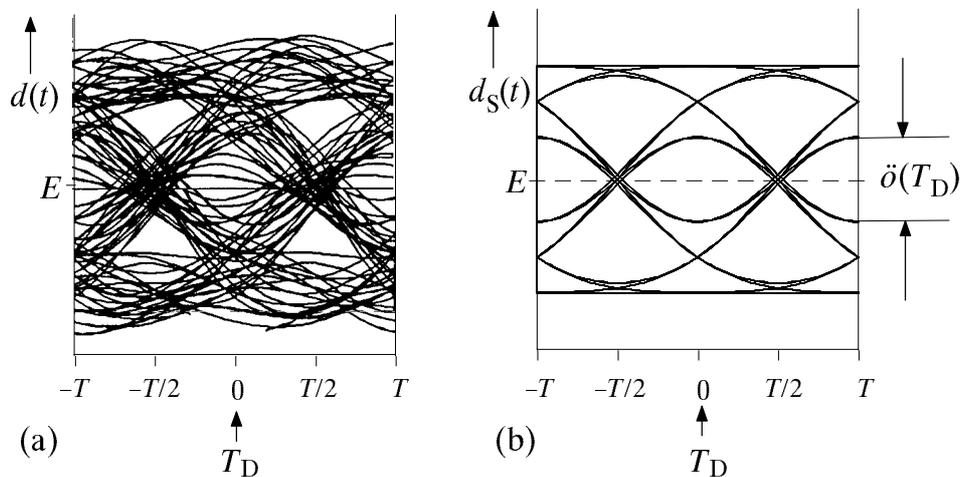


Bild 1.5: Augendiagramme mit (a) und ohne (b) Berücksichtigung des Rauschens.

Die einzelnen Symbole werden nun – abhängig von den Nachbarsymbolen – mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten verfälscht. Die Verfälschungswahrscheinlichkeit von Symbolen, die zu inneren Augenlinien im Augendiagramm von Bild 1.5(b) gehören, ist

$$p_U = Q\left(\frac{\ddot{o}(T_D)/2}{\sigma_d}\right) = Q(\sqrt{\varrho_U}) . \quad (1.20)$$

Hierbei bezeichnet man  $\ddot{o}(T_D)$  als die (vertikale) Augenöffnung (vgl. Bild 1.5), während  $\varrho_U$  das ungünstigste Signalrauschleistungsverhältnis (halbe Augenöffnung im Quadrat bezogen auf die Leistung  $\sigma_d^2$  des Rauschteils) angibt.

Die anderen Symbole haben eine deutlich kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit, so daß die mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  stets kleiner als  $p_U$  ist. Die ungünstigste Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_U$  nach Gl. (1.20) stellt somit eine obere Schranke für  $p_B$  dar, die sehr einfach zu berechnen ist. Ebenso ist das ungünstigste Signalrauschleistungsverhältnis  $\varrho_U$  eine untere Schranke für das in Gl. (1.16) implizit definierte S/N-Verhältnis

$$\varrho_d = [Q^{-1}(p_B)]^2 . \quad (1.21)$$

Diese Größe ist zwar bei einem System mit Impulsinterferenzen nicht direkt meßbar, für einen Systemvergleich trotzdem sehr hilfreich (siehe Versuchsdurchführung).

#### 1.1.4 Einige Eigenschaften der Digitalsignalübertragung

Die bis Mitte der achtziger Jahre dominierenden analogen Nachrichtensysteme werden mehr und mehr durch Digitalsysteme ersetzt. Alle in den letzten Jahren entstandenen Telekommunikationssysteme sind digital. Dafür gibt es mehrere Gründe:

- Durch die einheitliche Digitalübertragung von Sprach-, Bild- und Datensignalen kann ein sehr leistungsfähiges und flexibles Netz aufgebaut werden, das eine ganze Reihe verschiedener Telekommunikationsdienste zur Verfügung stellt (z.B. ISDN: Integrated Services Digital Network).
- Die Übertragung eines Datensignals bietet sich in digitaler Form an, da dieses selbst ein Digitalsignal ist. Dagegen muß für die digitale Übertragung eines analogen Quellensignals dieses vorher "digitalisiert" werden (Pulsmodulation, abgekürzt PCM, mit den Verarbeitungsschritten "Abtastung", "Quantisierung" und "Codierung").
- Digitalsysteme können in Digitaltechnik realisiert werden; die Schaltungen sind im hohen Maße integrierbar (VLSI: Very Large Scale Integration).
- Bei digitaler Übertragung kann der störende Einfluß von statistischen Störungen (z.B. dem unvermeidbaren thermischen Rauschen) vollständig eliminiert werden, solange diese Störungen eine gewisse Schwelle nicht überschreiten. Deshalb ist i.a. eine bessere Übertragungsqualität als bei Analogsystemen zu erzielen.
- Für Digitalsignalübertragung sind einfache und sehr effiziente Datensicherungs- und -verschlüsselungsmechanismen bekannt. Durch die Anwendung von Quellen- und Kanalcodierverfahren und geeignete Decodieralgorithmen beim Empfänger läßt sich die Übertragungsqualität zusätzlich steigern.

- Bei Digitalsignalübertragung können (evtl. zusätzlich zum Frequenzmultiplex) auch die Vorteile von Zeitmultiplexverfahren (TDMA) und Codemultiplexverfahren (CDMA) genutzt werden.
- Jedes Digitalsignal ist in gewissen Grenzen regenerierbar. Das bedeutet: Bei sehr langen Übertragungswegen (*„Weitverkehrssysteme“*) können in festen Abständen Regenerativverstärker eingesetzt werden, die quasi wie eine Kombination aus Digitalempfänger für den letzten Abschnitt und Sendeeinrichtung für den nächsten Abschnitt wirken. Damit lassen sich – bei gleicher Übertragungsqualität – deutlich größere Entfernungen als mit den Analogsystemen überbrücken.

Diesen vielen Vorteilen stehen natürlich auch einige Nachteile gegenüber. Insbesondere bei der Übertragung von Sprach- und Bildsignalen mittels Pulsmodulation ergeben sich aufgrund der Quantisierung irreversible Verfälschungen. Am Beispiel des seit vielen Jahren in Deutschland eingesetzten Systems PCM 30/32 werden diese nun kurz erläutert.

Das System PCM 30/32 erlaubt die Digitalübertragung von 30 Sprachkanälen (jeweils für eine maximale Frequenz  $f_{N,\max} = 4$  kHz) zusammen mit je einem Synchronisations- und einem Wählzeichenkanal, so daß die Gesamtkanzahl  $Z = 32$  ist. Die Abtastfrequenz beträgt nach dem Abtasttheorem somit  $f_A = 8$  kHz. Die abgetasteten Signale werden mit  $M = 256$  Stufen quantisiert und jeder Quantisierungswert wird mit  $\text{ld}(M) = 8$  Bit übertragen. Die Gesamtbitrate ist somit gleich  $R_B = 2 \cdot f_{N,\max} \cdot Z \cdot \text{ld}(M) = 2.048$  Mbit/s.

In Bild 1.6 ist der (beim AWGN-Kanal) erreichbare Signalrauschabstand

$$Q_v = 10 \cdot \lg \frac{\text{Nutzleistung von } v(t)}{\text{Rauschleistung von } v(t)} \quad (1.22)$$

dieses PCM-Systems den Analogverfahren *„ZSB-AM“* und *„FM“* vergleichend gegenübergestellt. Es gelten die gleichen Achsenbeschriftungen und Voraussetzungen wie für Bild 1.31 des Versuchs *„AMV“*. Als Grundlage dieses Vergleichs wird vorausgesetzt:

- ein sinusförmiges Nachrichtensignal der Frequenz  $f_{N,\max}$ ,
- eine konstante Sendeleistung  $P_S$ ,
- eine konstante Rauschleistungsdichte  $N_0$  und
- ein für alle Frequenzen gleicher (verzerrungsfreier) Kanal mit  $H_K(f) = \alpha$ .

Die (gestrichelte) Kurve der ZSB-AM (ohne Träger) ist aufgrund der hier gewählten Abszisse eine Gerade mit  $45^\circ$  Steigung (vgl. Versuch *„AMV“*). Die FM-Kurve (diese ist für den Modulationsindex  $\eta = 3$  gültig) liegt für Abszissenwerte größer als ca. 13 dB um etwa 11.3 dB darüber. Mit einem größeren Modulationsindex läßt sich der Abstand zwischen AM und FM weiter vergrößern, doch ist dann auch mehr Bandbreite erforderlich.

Betrachten wir aber nun den Kurvenverlauf für das oben angegebene PCM-System. Bei kleinen Abszissenwerten ( $< 13$  dB) ist die Pulsmodulation vergleichbar mit der Frequenzmodulation; erst bei kleinerer Rauschleistungsdichte macht die Verwendung der PCM Sinn. Aus Bild 1.6 ist ablesbar, daß die PCM für Abszissenwerte zwischen etwa 13 und 38 dB besser als die FM-Vergleichskurve ( $\eta = 3$ ) ist. Der maximale Störabstandsgewinn von ca. 13 dB ergibt sich bei einem Abszissenwert von ca. 23 dB.

Weiterhin ist aus Bild 1.6 zu ersehen, daß bei PCM der erreichbare Signalrauschabstand begrenzt ist. Auch bei sehr guten Kanälen, bei denen durch das additive Rauschsignal  $n(t)$  praktisch keine Bitfehler verursacht werden, gilt bei den gegebenen Voraussetzungen stets  $Q_v \approx 48.2$  dB. Dieser Wert wird durch die Quantisierungsverzerrungen bestimmt. Bei linearer Quantisierung mit  $M = 256$  gleichen Quantisierungsintervallen, die für den Systemvergleich von Bild 1.6 zugrundegelegt wurde, gilt näherungsweise:

$$Q_Q = 20 \cdot \lg(M) . \quad (1.23)$$

Diese Gleichung wurde unter der vereinfachenden Annahme berechnet, daß das Nachrichtensignal alle möglichen Amplitudenwerte mit gleicher Wahrscheinlichkeit annimmt, was z.B. für ein dreieckförmiges Signal zutrifft. Bei einem anderen Signalverlauf ist Gl. (1.23) dagegen nur als eine Näherung zu verstehen.

Der PCM-Kurvenzug, von rechts nach links betrachtet, entspricht einer Zunahme der Bitfehlerwahrscheinlichkeit. Im horizontalen Ast sind die Auswirkungen von Übertragungsfehlern auf den erreichbaren Signalrauschabstand des Analogsignals im Vergleich zur Quantisierung vernachlässigbar. Erst wenn die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $10^{-4}$  und mehr beträgt, wirkt sich dies auch auf die Qualität des Sprach- oder Bildsignals aus. Ist  $p_B$  zu groß (z.B. 1% oder mehr), so ist das Digitalssystem sogar schlechter als die analoge ZSB-AM. Dagegen kann für einen geforderten Signalrauschabstand  $Q_v = 40$  dB die erforderliche Sendeleistung um 22 dB, d.h. um den Faktor 158, vermindert werden, wenn anstelle der ZSB-AM das hier beschriebene PCM-System 30/32 eingesetzt wird.

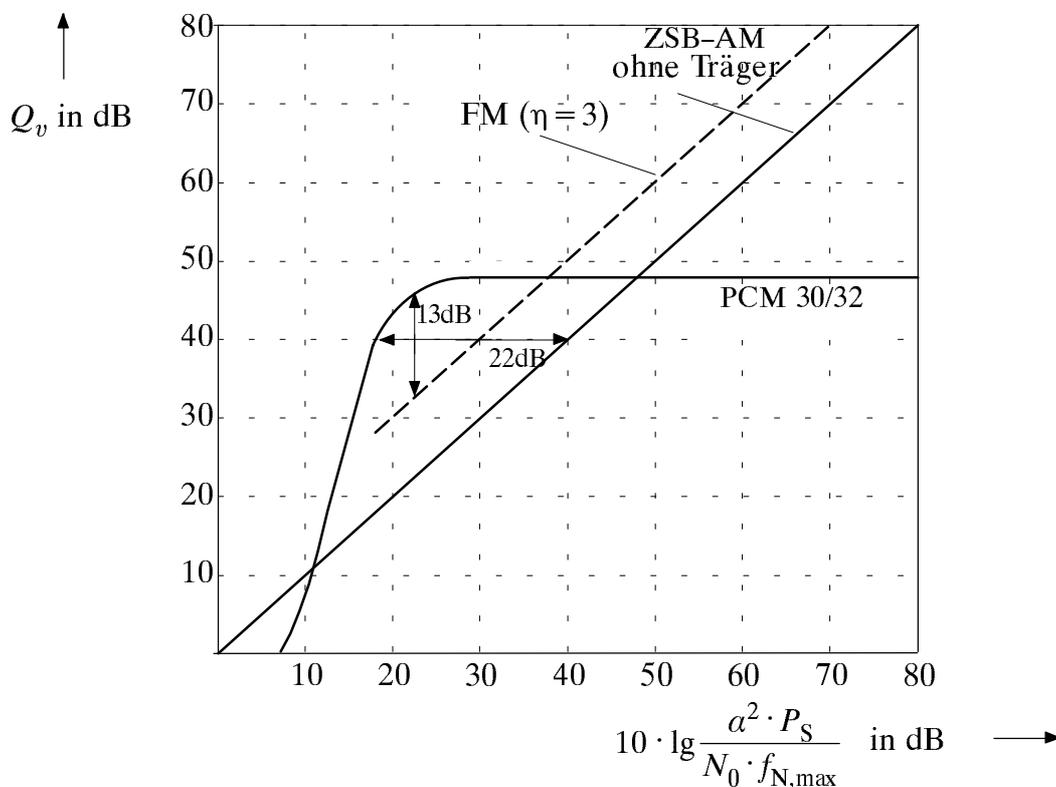


Bild 1.6: Vergleich der Verfahren AM, FM und PCM hinsichtlich des erreichbaren Signalrauschabstandes im Sinkensignal.

## 1.2 Digitale Amplitudenmodulation (ASK)

Das digitale Analogon zur ZSB-Amplitudenmodulation ist "Amplitude Shift Keying". Dieses Verfahren wird anhand des Blockschaltbildes, der Signalverläufe und Leistungsdichtespektren beschrieben und die Berechnung der Bitfehlerwahrscheinlichkeit angegeben. Ein äquivalentes Basisbandmodell der ASK wird in Abschnitt 1.4.4 abgeleitet.

### 1.2.1 Blockschaltbild und Signalverläufe

Eine Möglichkeit der Digitalsignalübertragung über einen Bandpaßkanal bietet die digitale Amplitudenmodulation. Bild 1.7 zeigt das entsprechende Blockschaltbild. Die Signalverläufe sind für eine typische Systemkonfiguration in Bild 1.8 dargestellt.

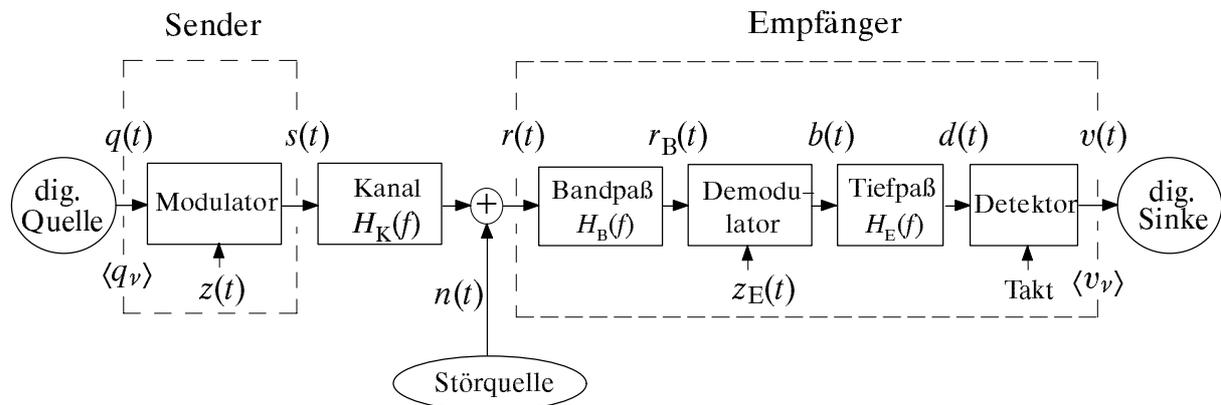


Bild 1.7: Blockschaltbild eines ASK-Übertragungssystems.

Das ASK-System kann wie das Basisbandsystem gemäß Bild 1.2 in Sender, Kanal und Empfänger eingeteilt werden. Sender und Empfänger beinhalten hier zusätzlich eine Modulations- bzw. Demodulationseinrichtung. Coder und Decoder sind zwar prinzipiell möglich, werden in diesem Versuch jedoch nicht behandelt.

Das Quellensignal  $q(t)$  sei redundanzfrei, binär und unipolar. Mit den in Abschnitt 1.1.1 definierten Amplitudenkoeffizienten  $a_\nu \in \{0, 1\}$  und dem rechteckförmigen NRZ-Grundimpuls  $g_q(t) \circ \bullet G_q(f)$  kann hierfür geschrieben werden (vgl. Bild 1.8(a)):

$$q(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot g_q(t - \nu \cdot T). \quad (1.24)$$

Im nachfolgenden Modulator wird dieses Signal mit der harmonischen Schwingung  $z(t)$  der Amplitude  $\hat{z} = 1$ , der Frequenz  $f_T$  und der Phase  $\varphi_T$  multipliziert, woraus sich das in Bild 1.8(b) dargestellte Sendesignal  $s(t) = q(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T)$  ergibt. Nach der vom Versuch "AMV" bekannten Terminologie entspricht dies einer "ZSB-AM ohne Träger".

Läßt man als Trägerfrequenzen  $f_T$  nur ganzzahlige Vielfache der Bitfrequenz  $1/T$  zu, so kann man das Sendesignal  $s(t)$  ebenso wie das Signal  $q(t)$  als Summe von gewichteten und verschobenen Grundimpulsen darstellen:

$$s(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot g_s(t - \nu \cdot T) \quad \text{mit} \quad g_s(t) = g_q(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T). \quad (1.25)$$

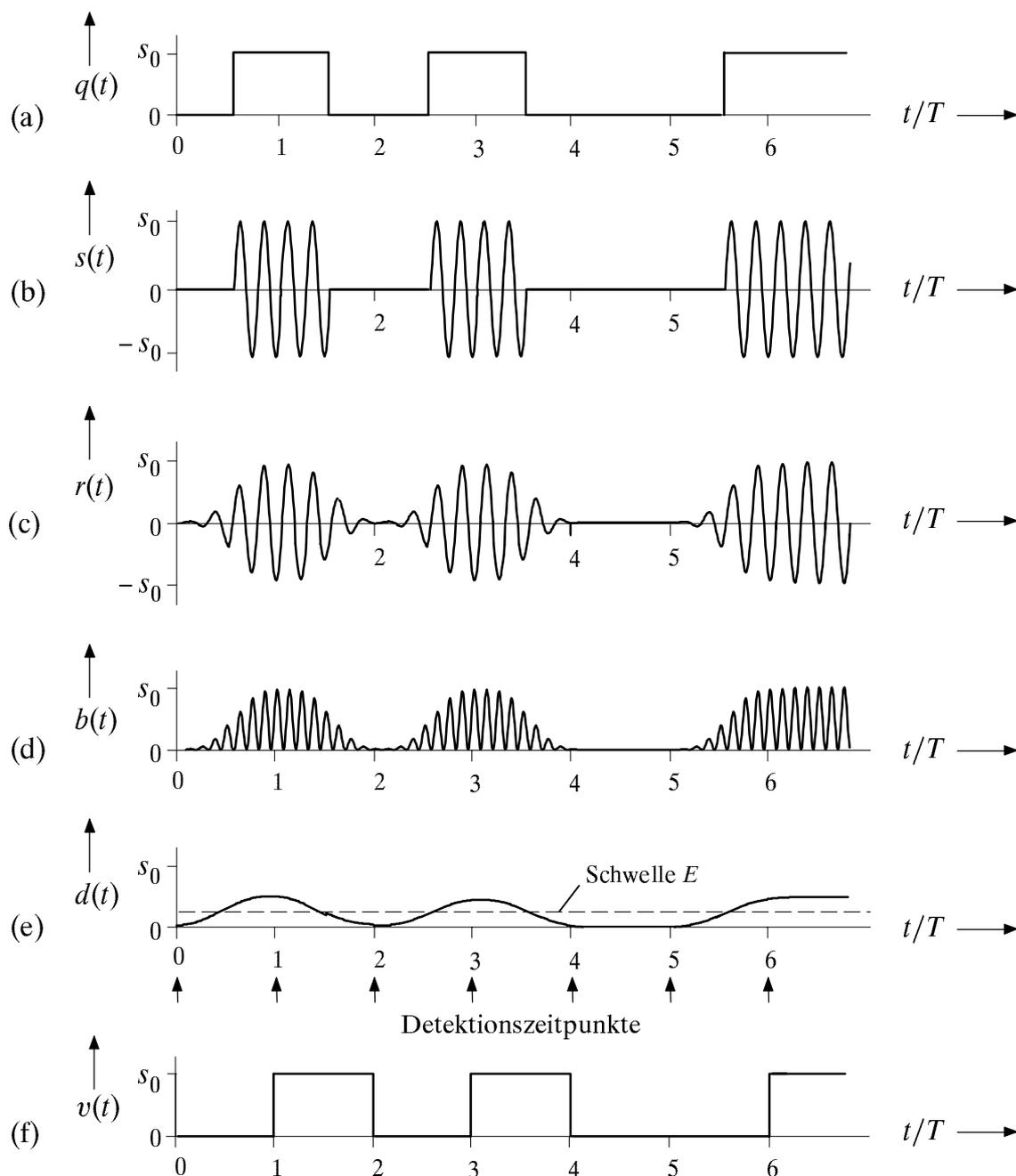


Bild 1.8: Signalverläufe eines ungestörten ASK-Systems bei gaußförmigem Bandpaßkanal, Synchrondemodulation und Gauß-Tiefpaß ( $f_T = 4/T$ ,  $\varphi_T = 90^\circ$ , ohne Bandpaß,  $\hat{z}_E = 1$ ).

Das Empfangssignal  $r(t)$  kann man wie bei der Basisbandübertragung mit Gl. (1.2) berechnen, doch muß bei trägermodulierter Übertragung der Kanalfrequenzgang  $H_K(f)$  stets als Bandpaß angesetzt werden. Aus Bild 1.8(c), dargestellt für einen gaußförmigen Bandpaßkanal (vgl. Vorbereitungsfrage V3) mit der Mittenfrequenz  $f_M = f_T$ , ist zu erkennen, daß durch den nichtidealen Kanalfrequenzgang  $H_K(f)$  im wesentlichen die Flanken der Hüllkurve des Empfangssignals beeinträchtigt werden, während die lange "O"- und die lange "L"-Folge von den Impulsinterferenzen weniger beeinflusst werden. Nicht berücksichtigt ist in Bild 1.8(c) und den Beschreibungen in Abschnitt 1.2.1 und 1.2.2 der additive Rauschterm im Signal  $r(t)$ , d.h. hier wird stets  $n(t) = 0$  vorausgesetzt.

Beim Empfänger muß die sendeseitige Modulation durch einen Demodulator rückgängig gemacht werden. Wie bei der analogen ZSB-AM gibt es auch hier zwei prinzipiell unterschiedliche Realisierungsformen, nämlich die kohärente Synchron- und die inkohärente Hüllkurvendemodulation.

Bei Synchrondemodulation kann auf den Bandpaß  $H_B(f)$  am Empfängereingang (vgl. Bild 1.7) verzichtet werden, so daß  $r_B(t) = r(t)$  ist. Diesem Signal wird nun das empfangsseitige Trägersignal  $z_E(t) = \hat{z}_E \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_E)$  multiplikativ überlagert, das exakt die gleiche Frequenz  $f_T$  wie das sendeseitige Trägersignal  $z(t)$  besitzen muß. Außerdem sollten die Phasenlagen der beiden Signale möglichst gut übereinstimmen ( $\varphi_E = \varphi_T$ ). Eine Phasenabweichung  $\Delta\varphi_T = \varphi_E - \varphi_T$  führt wie bei der analogen Amplitudendemodulation zu einer Degradation des Signalstörleistungsverhältnisses um den Faktor  $\cos^2(\Delta\varphi_T)$ .

In Bild 1.8(d) ist das Ausgangssignal des Synchrondemodulators (mit  $\hat{z}_E = 1$ ,  $\Delta\varphi_T = 0$ ) dargestellt. Es zeigt, daß dem Nutzsignal auch Anteile mit der doppelten Trägerfrequenz ( $2f_T$ ) überlagert sind. Diese Intermodulationsprodukte werden durch den nachfolgenden Tiefpaß eliminiert; im gezeichneten Beispiel ist  $H_E(f)$  ebenfalls gaußförmig angenommen. Außerdem hat dieses Filter wie beim Basisbandsystem die zusätzliche Aufgabe, die Störleistung vor dem Detektor zu begrenzen. Es soll nochmals erwähnt werden, daß alle Signalverläufe in Bild 1.8 jedoch für den störungsfreien Fall ( $n(t) = 0$ ) gelten.

Das in Bild 1.8(e) dargestellte Detektionssignal  $d(t)$  ist ein Basisbandsignal, so daß zur Symboldetektion z.B. der in Abschnitt 1.1.1 beschriebene Schwellenwertentscheider eingesetzt werden kann. Wegen  $\hat{z}_E = 1$  beträgt der Maximalwert von  $d(t)$  hier nur  $s_0/2$ . Aufgrund der unipolaren ASK-Signale ist die Entscheiderschwelle  $E = 0$  nicht geeignet. Der optimale Schwellenwert liegt hier vielmehr bei einem Viertel der Sendeamplitude  $s_0$ .

Der Nachteil der Synchrondemodulation ist die Notwendigkeit einer Phasenregelung, z.B. mittels eines VCO (*Voltage Controlled Oscillator*). Dies führt in der Praxis oft zu Schwierigkeiten. Aus diesem Grund wendet man häufig die Hüllkurvendemodulation an, deren Wirkungsweise im Abschnitt 1.3.2 des Versuchs *„Analoge Modulationsverfahren“* ausführlich beschrieben wurde. Da sich in diesem Fall die additiven Störungen  $n(t)$  direkt auf das demodulierte Signal  $b(t)$  auswirken, wird sinnvollerweise die Störleistung schon vor dem Demodulator durch das Bandpaßfilter  $H_B(f)$  begrenzt.

## 1.2.2 Leistungsdichtespektren

Wichtige Eigenschaften des ASK-Systems lassen sich anhand der einzelnen Leistungsdichtespektren (abgekürzt LDS) sehr anschaulich erklären. Bild 1.9 zeigt diese für die in Bild 1.8 dargestellten Zeitverläufe, wobei für beide Bilder die gleichen Voraussetzungen gelten (siehe Unterschrift und Beschreibung von Bild 1.8).

Das LDS  $\Phi_q(f)$  des rechteckförmigen unipolaren NRZ-Quellensignals  $q(t)$  mit der Amplitude  $s_0$ , der Symboldauer  $T$  und gleichwahrscheinlichen Symbolen lautet:

$$\Phi_q(f) = \frac{T}{4} \cdot s_0^2 \cdot \text{si}^2(\pi \cdot f \cdot T) + \frac{s_0^2}{4} \cdot \delta(f) . \quad (1.26)$$

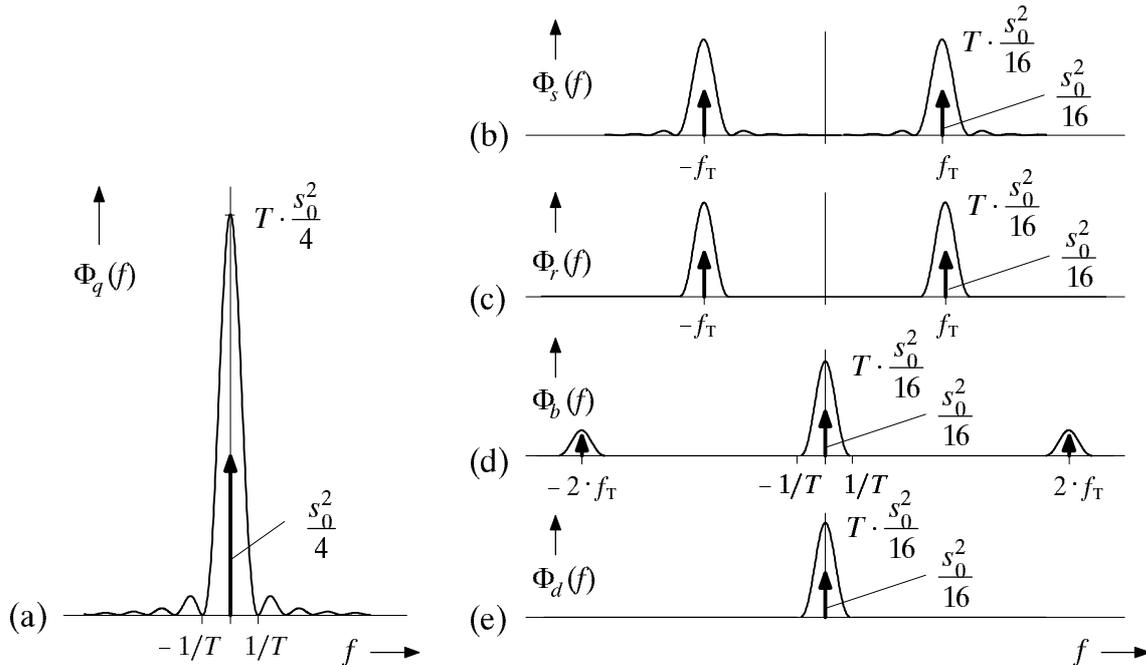


Bild 1.9: Leistungsdichtespektren der ASK-Nutzsignale von Bild 1.8.

Neben einem  $\text{si}^2$ -förmigen Anteil beinhaltet  $\Phi_q(f)$  auch eine Diracfunktion bei  $f=0$ , die den Gleichanteil  $s_0/2$  des unipolaren Signals  $q(t)$  berücksichtigt.

Für das LDS  $\Phi_s(f)$  des ASK-Sendesignals  $s(t)$  gilt unter der Voraussetzung  $f_T \cdot T \gg 1$ :

$$\Phi_s(f) = \frac{1}{4} \cdot [\Phi_q(f-f_T) + \Phi_q(f+f_T)] . \quad (1.27)$$

Die Ableitung dieser Gleichung kann über die (bei Zufallssignalen eigentlich nicht explizit angebbaren) Amplitudenspektren  $S(f)$  bzw.  $Q(f)$  und entsprechende Grenzübergänge erfolgen. Bei einem cosinusförmigen Trägersignal (d.h.  $\varphi_T = 0^\circ$ ) besteht zwischen diesen folgender Zusammenhang:  $S(f) = [Q(f-f_T) + Q(f+f_T)]/2$ . Berücksichtigt man weiter, daß das LDS  $\Phi_s(f)$  proportional zu  $|S(f)|^2$  ist, und daß die Mischprodukte  $Q(f-f_T) \cdot Q^*(f+f_T)$  bzw.  $Q^*(f-f_T) \cdot Q(f+f_T)$  für  $f_T \cdot T \gg 1$  verschwinden, so folgt daraus Gl. (1.27).

Aus dieser Gleichung und Bild 1.9(b) ist zu ersehen, daß  $\Phi_s(\pm f_T) = \Phi_q(0)/4$  ist (falls  $f_T \cdot T \gg 1$ ). Dieses Ergebnis gilt unabhängig von der Trägerphase  $\varphi_T$  und ist verständlich, da die Leistung des Sendesignals – diese entspricht ja der Fläche unter dem Leistungsdichtespektrum  $\Phi_s(f)$  – nur halb so groß ist wie die Leistung des Quellensignals  $q(t)$ .

Das Leistungsdichtespektrum am Empfängereingang beträgt  $\Phi_r(f) = \Phi_s(f) \cdot |H_K(f)|^2$ . Hierbei ist wieder – ebenso wie bei den nachfolgenden Spektren – nur der Nutzsignalanteil berücksichtigt und dargestellt (d.h. Bild 1.9 gilt für  $\Phi_n(f) = 0$ ). Bei einem Bandpaß mit  $H_K(\pm f_T) = 1$  ist der Verlauf von  $\Phi_r(f)$  in den Bereichen um  $\pm f_T$  ähnlich dem von  $\Phi_s(f)$ . Ebenso sind die diskreten Spektralanteile bei den Frequenzen  $f = \pm f_T$ , herrührend vom Gleichanteil im Signal  $q(t)$ , für beide Signale identisch. Dagegen werden die Ausläufer der beiden  $\text{si}^2$ -Funktionen durch den Bandpaßkanal abgeschwächt.

Das LDS  $\Phi_b(f)$  des demodulierten Signals  $b(t)$  entsteht bei Synchrondemodulation durch beidseitige Frequenzbandverschiebung des Amplitudenspektrums  $R(f)$  um die

Trägerfrequenz  $f_T$ , Summation der beiden Anteile (unter Berücksichtigung von  $\hat{z}_E = 1$ ) zu  $B(f) = [R(f - f_T) + R(f + f_T)]/2$  sowie Bildung des Betragsquadrates  $|B(f)|^2$ . Ist  $R(f)$  reell, so gilt  $B(0) = R(f_T)$ . Daraus folgt die Größenbeziehung  $\Phi_b(0) = \Phi_r(\pm f_T)$ , während die beiden Nebenmaxima bei  $\pm 2 \cdot f_T$  um den Faktor 4 kleiner sind (vgl. Bild 1.9(d)).

Schließlich gilt für das LDS des Detektionssignals:  $\Phi_d(f) = \Phi_b(f) \cdot |H_E(f)|^2$ , wobei  $H_E(f)$  den (gaußförmigen) Frequenzgang des Tiefpaßfilters angibt (vgl. Abschnitt 1.1.3).

### 1.2.3 Bitfehlerwahrscheinlichkeit für ASK/AWGN-Kanal

Betrachten wir nun das optimale ASK-System für den AWGN-Kanal, d.h.  $n(t)$  sei gaußverteilt weißes Rauschen und es gelte  $H_K(f) = 1$  (vgl. Bild 1.10). Es sei  $\varphi_E = \varphi_T = 0^\circ$ .

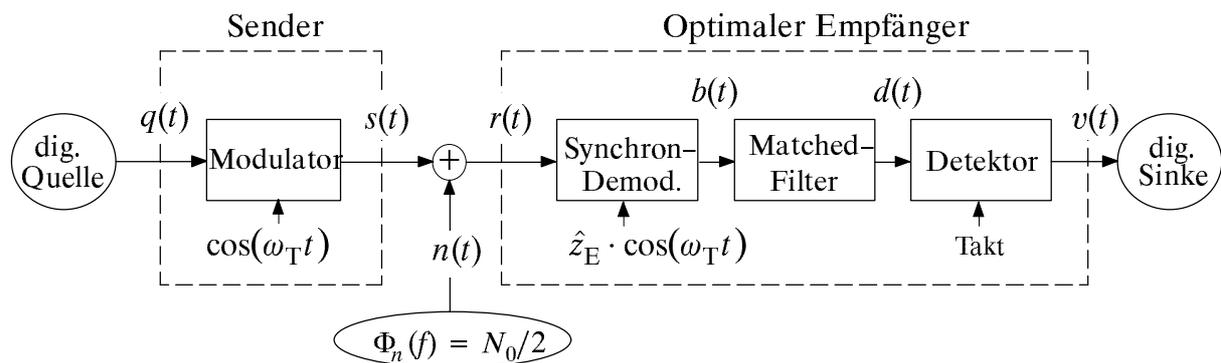


Bild 1.10: Optimales ASK-Übertragungssystem beim AWGN-Kanal.

Mit dieser Vereinfachung kann für den Nutzanteil des Signals  $b(t)$  geschrieben werden:

$$b_S(t) = \frac{\hat{z}_E}{2} \cdot q(t) + (\text{Anteil bei } \pm 2f_T). \quad (1.28)$$

Die Amplitude dieses Signals hängt natürlich von der Amplitude  $\hat{z}_E$  des empfangsseitigen Trägersignals ab. Da in der Literatur teilweise  $\hat{z}_E = 1$  (so im Programm "dmv") und teilweise  $\hat{z}_E = 2$  (z.B. in [3]) verwendet wird, wird in diesem Abschnitt allgemein  $\hat{z}_E$  benutzt.

Der Anteil bei der doppelten Trägerfrequenz muß nicht weiter betrachtet werden, da dieser durch das nachfolgende Tiefpaßfilter eliminiert wird (Voraussetzung:  $f_T \cdot T \gg 1$ ). Somit ist das (relevante) Nutzsignal  $b_S(t)$  nach dem Synchrondemodulator bis auf den Faktor  $\hat{z}_E/2$  identisch mit dem Quellsignal  $q(t)$  und dementsprechend rechteckförmig (der Index S steht wiederum für "Signal"). Das Matched-Filter hat deshalb die gleiche Form wie beim Basisbandsystem, siehe Gln. (1.10) und (1.11), und das Detektionsnutzsignal  $d_S(t)$  vor dem Schwellenwertentscheider ist somit wie in Abschnitt 1.1.2 wieder dreieckförmig. Für den Maximalwert des Detektionsgrundimpulses gilt:  $g_d(0) = \hat{z}_E \cdot s_0/2$ .

Bisher wurden die Störungen außer Betracht gelassen. Zur Beurteilung der Übertragungsqualität des ASK-Systems wird nun ein additiv überlagertes Rauschsignal  $n(t)$  mit in die Überlegungen einbezogen. Handelt es sich bei  $n(t)$  um "weißes Rauschen", so ist das zweiseitige LDS  $\Phi_n(f)$  nach Bild 1.11(a) in die entsprechenden Gleichungen einzusetzen. Unter weißem Rauschen versteht man bei modulierter Übertragung, daß das LDS  $\Phi_n(f)$  – zumindest in einem gewissen Frequenzband der Breite  $B_n$  um die Trägerfrequenz ( $\pm f_T$ ) – konstant gleich  $N_0/2$  ist. Die Rauschleistung von  $n(t)$  ist dann  $\sigma_n^2 = N_0 \cdot B_n$ .

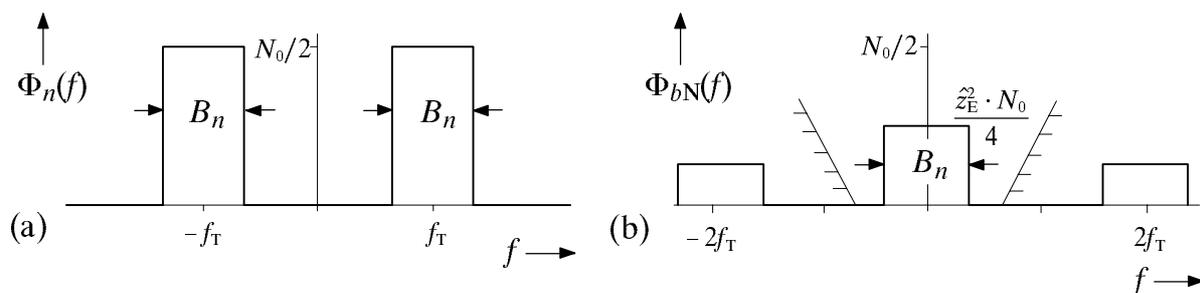


Bild 1.11: Rauschleistungsdichtespektren bei ASK-modulierter Übertragung am Eingang des Empfängers (a) und nach dem Synchrondemodulator (b).

Der Rauschanteil  $b_N(t) = n(t) \cdot \hat{z}_E \cdot \cos(\omega_T \cdot t)$  des demodulierten Signals hat das in Bild 1.11(b) dargestellte LDS. Es gilt:  $\Phi_{bN}(f) = \Phi_n(f) * [\delta(f-f_T) + \delta(f+f_T)] \cdot \hat{z}_E^2/4$ . Während das Rauschsignal  $n(t)$  spektral gesehen um die Trägerfrequenz liegt, weist der Rauschanteil  $b_N(t)$  nach der Demodulation einen großen Tiefpaßanteil auf, dessen Größe von der Amplitude des empfangsseitigen Trägersignals signifikant (quadratisch) abhängt.

Läßt man die Anteile bei der doppelten Trägerfrequenz außer Betracht (auch diese werden durch den nachfolgenden Tiefpaß entfernt), so unterscheidet sich  $\Phi_{bN}(f)$  vom Rauschleistungsdichtespektrum  $\Phi_n(f)$  bei Basisbandübertragung um den Faktor  $\hat{z}_E^2/2$ . Genau um diesen Faktor ist auch die Störleistung am Entscheider gegenüber Gl. (1.12) verändert (falls die Rauschbandbreite  $B_n \gg 1/T$  ist):

$$\sigma_d^2 = \frac{\hat{z}_E^2 \cdot N_0}{4} \cdot \int_{-B_n/2}^{B_n/2} \text{si}^2(\pi f T) df \approx \frac{\hat{z}_E^2 \cdot N_0}{4T} \quad (1.29)$$

Berücksichtigt man weiterhin die unipolare Signalisierung bei ASK (vgl. Bild 1.8(a) und (e)) im Gegensatz zu den Voraussetzungen von Abschnitt 1.1.2, so erhält man für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit des optimalen binären ASK-Systems unter der Voraussetzung des AWGN-Kanals:

$$p_B = Q\left(\frac{g_d(0)/2}{\sigma_d}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{s_0^2 \cdot T}{4 \cdot N_0}}\right) \quad (1.30)$$

Dieses Ergebnis ist natürlich unabhängig von der Amplitude  $\hat{z}_E$  des Trägersignals.

Gegenüber dem Basisbandsystem von Abschnitt 1.1.2 ist die "Energie pro Bit" bei konstantem  $s_0$  um den Faktor 4 kleiner:  $E_B = s_0^2 \cdot T/4$ . Damit erhält man schließlich:

$$p_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_B}{2N_0}}\right) \quad (1.31)$$

In der Vorbereitungsfrage V1 soll diese Gleichung numerisch ausgewertet werden. Bereits an dieser Stelle muß jedoch gesagt werden, daß die ASK eine deutlich höhere Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  als ein Basisbandsystem (oder auch ein PSK-System) aufweist, wenn das Verhältnis  $E_B/N_0$  – also die pro Bit bereitgestellte Energie bezogen auf die Rauschleistungsdichte – für den Systemvergleich als konstant angenommen wird.

## 1.3 Digitale Frequenzmodulation (FSK)

Eine weitere Möglichkeit zur Umsetzung eines Basisbandsignals in einen höheren Frequenzbereich bietet die sogenannte *FSK* (*Frequency Shift Keying*), die man als die digitale Variante der (analogen) Frequenzmodulation bezeichnen kann.

### 1.3.1 Signalverläufe

Im Unterschied zur ASK wird bei der FSK nicht die Amplitude, sondern die Frequenz  $f_T$  des Trägersignals

$$z(t) = \hat{z} \cdot \cos(2\pi \cdot f_T \cdot t - \varphi_T) \quad (1.32)$$

entsprechend dem anliegenden Digitalsignal  $q(t)$  umgetastet. Mit den bipolaren Amplitudenkoeffizienten  $a_\nu \in \{-1, +1\}$  ergibt sich für das FSK-Sendesignal (falls  $\varphi_T = 0^\circ$ ):

$$s(t) = s_0 \cdot \cos(2\pi \cdot t \cdot (f_T + a_\nu \cdot \Delta f)) \quad (1.33)$$

Wie bei der herkömmlichen analogen Frequenzmodulation bezeichnet  $\Delta f$  den Frequenzhub. Das Sendesignal gemäß Gl. (1.33) kann mit den Abkürzungen

$$f_0 = f_T - \Delta f \quad \text{und} \quad f_1 = f_T + \Delta f \quad (1.34)$$

im Zeitintervall  $(\nu - 1/2) \cdot T < t < (\nu + 1/2) \cdot T$  auch wie folgt beschrieben werden:

$$s(t) = \begin{cases} s_0 \cdot \cos(2\pi \cdot f_1 \cdot t) & \text{für } a_\nu = +1 \text{ ,} \\ s_0 \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t) & \text{für } a_\nu = -1 \text{ .} \end{cases} \quad (1.35)$$

Sind die beiden, die Binärsymbole "O" und "L" repräsentierenden Frequenzen  $f_0$  und  $f_1$  ganzzahlige Vielfache der Bitfrequenz  $1/T$ , so ist  $s(t)$  ein cosinusförmiges Signal ohne Phasensprünge mit stückweise konstanter Frequenz. Die Hüllkurve des Sendesignals ist bei FSK im Gegensatz zur ASK konstant. In Bild 1.12(b) ist der Signalverlauf von  $s(t)$  graphisch dargestellt. Anzumerken ist, daß in diesem Bild – im Gegensatz zur vorliegenden Beschreibung – die Trägerphase  $\varphi_T = -90^\circ$  vorausgesetzt ist:  $z(t) = -\hat{z} \cdot \sin(\omega_T \cdot t)$ .

Den Zeitverlauf eines FSK-Signals kann man sich in diesem Fall aus zwei zeitlich gegeneinander verschobenen ASK-Signalen mit den beiden Trägerfrequenzen  $f_0$  und  $f_1$  zusammengesetzt denken. Entsprechend ergibt sich auch das Spektrum  $S(f)$  aus der (gewichteten) Überlagerung zweier ASK-Spektren mit den Mittenfrequenzen  $f_0$  und  $f_1$ . Desweiteren finden auch alle im Abschnitt 1.2 angestellten Überlegungen Anwendung.

Der Kanal weist wie beim ASK-System im allgemeinen eine Bandpaßcharakteristik  $H_K(f)$  auf, zu berücksichtigen ist jedoch der größere Bandbreitenbedarf der FSK. Die Störungen können in gleicher Weise wie bei ASK angesetzt werden. Für die folgende Signalbeschreibung entsprechend Bild 1.12 wird allerdings ein idealer Kanal  $H_K(f) = 1$  und  $n(t) = 0$  vorausgesetzt, so daß das am Empfänger anstehende Signal  $r(t) = s(t)$  ist.

Von den möglichen Realisierungsformen des FSK-Empfängers ist hier die Zweifiltervariante mit inkohärenter Hüllkurvendemodulation gewählt, bekannt unter dem Begriff *"Frequenzdiskriminator"* (vgl. Bild 1.13). Zur inkohärenten Demodulation wird dabei das

FSK-Signal im Empfänger mittels zweier Bandpaßfilter getrennt. Die Bandpässe im oberen bzw. unteren Zweig besitzen idealerweise die Mittenfrequenzen  $f_0$  bzw.  $f_1$  und sollten die Signalanteile der jeweils anderen Frequenz möglichst gut unterdrücken.

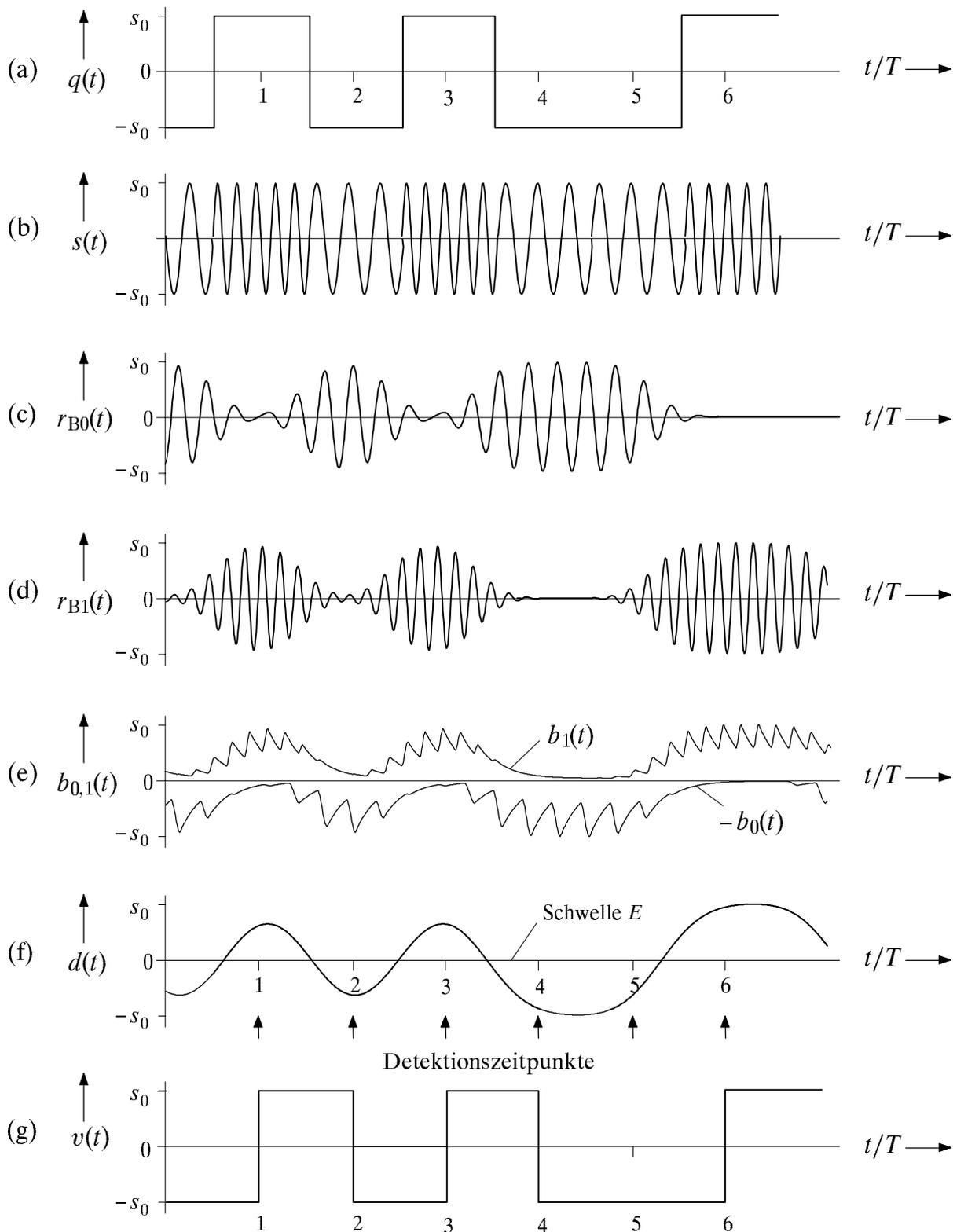


Bild 1.12: Beispielhafte Signalverläufe eines ungestörten FSK-Systems (d.h.  $n(t) = 0$ ) bei idealem Kanal und Hüllkurvendemodulation ( $f_0 = 3/T$ ,  $f_1 = 5/T$ ,  $\varphi_T = -90^\circ$ ).

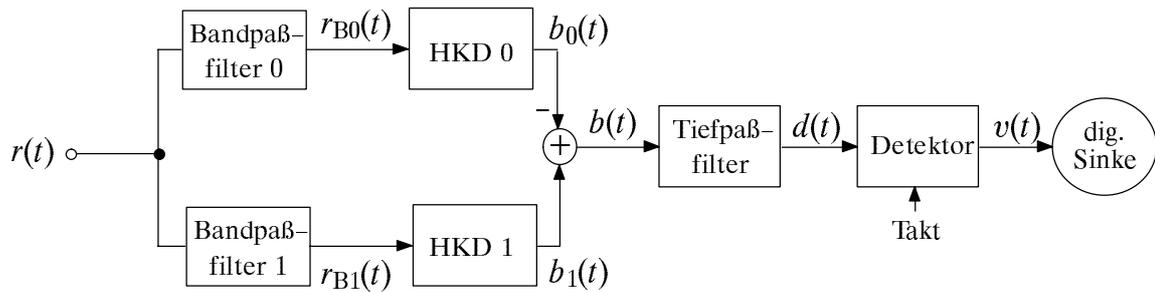


Bild 1.13: Realisierung eines FSK-Empfängers mit zwei auf die Frequenzen  $f_0$  und  $f_1$  abgestimmten Bandpaßfilter und zwei Hüllkurvendemodulatoren.

Die Bilder 1.12(c) und (d) zeigen die Signalverläufe  $r_{B0}(t)$  und  $r_{B1}(t)$  am Ausgang der als gaußförmig angenommenen Bandpässe. Es ist zu erkennen, daß die Hüllkurve von  $r_{B0}(t)$  nur zu solchen Zeiten relativ große Werte annimmt, zu denen das FSK-Sendesignal  $s(t)$  die Frequenz  $f_0$  aufweist.

Die Frequenz  $f_1$  im Sendesignal, die durch den oberen Gaußbandpaß nicht vollständig unterdrückt wird, führt zu Intermodulationsprodukten, d.h. zu Signalanteilen mit den Frequenzen  $f_1 \pm f_0$ . Je kleiner die Bandbreite des Bandpasses am Empfängereingang ist, um so besser werden diese Intermodulationsprodukte unterdrückt. Andererseits führt eine zu geringe Bandbreite zu Impulsinterferenzen, so daß es bezüglich der Filterbandbreite ein Optimum gibt. (Unter Impulsinterferenzen versteht man die Beeinträchtigung der Symboldetektion durch Ausläufer benachbarter Impulse, siehe Versuch "I&E").

Der Kurvenverlauf  $r_{B1}(t)$  kann in ähnlicher Weise interpretiert werden. Die Hüllkurve hat nur zu Zeiten, zu denen das Signal  $s(t)$  die Frequenz  $f_1$  aufweist, relativ große Werte.

Zur Demodulation werden in beiden Zweigen Hüllkurvendemodulatoren eingesetzt, deren Ausgangssignale  $b_0(t)$  bzw.  $b_1(t)$  in Bild 1.12(e) exemplarisch dargestellt sind. Für diese Bilder ist der in Bild 1.19 des Versuchs "AMV" beschriebene "reale Hüllkurvendemodulator" zugrunde gelegt, woraus sich die stufenförmigen Signalverläufe von Bild 1.12(e) begründen lassen.

Durch Tiefpaßfilterung des Differenzsignals  $b(t) = b_1(t) - b_0(t)$  der beiden Hüllkurven erhält man das bipolare Detektionssignal  $d(t)$  von Bild 1.12(f), das mittels eines getakteten Schwellenwertentscheiders (mit der Schwelle bei  $E = 0$  V) in gleicher Weise wie bei einem bipolaren Basisbandsystem entschieden werden kann (vgl. Abschnitt 1.1.1).

### 1.3.2 Bitfehlerwahrscheinlichkeit für FSK/AWGN-Kanal

Zur Abschätzung der FSK-Bitfehlerwahrscheinlichkeit setzen wir in beiden Zweigen zunächst Synchrondemodulatoren voraus. Auch in diesem Fall hat das Detektionssignal einen qualitativ ähnlichen Verlauf, wie er in Bild 1.12(f) für Hüllkurvendemodulation gezeigt ist. Ein Vergleich mit dem entsprechenden Detektionssignal bei ASK (vgl. Bild 1.8(d)) macht deutlich, daß bei FSK die Sendeamplitude aufgrund der bipolaren Signalisierung um den Faktor 2 größer ist als bei ASK. In gleichem Maße vergrößern sich auch sämtliche Nutzsignalanteile.

Betrachten wir nun die Störungen. Liegt am Empfängereingang von Bild 1.13 weißes Rauschen der (einseitigen) Rauschleistungsdichte  $N_0$  an, so besitzen die Störanteile der beiden synchrondemodulierten Signale  $b_0(t)$  und  $b_1(t)$  die gleichen statistischen Eigenschaften und auch den gleichen Effektivwert wie das demodulierte Signal  $b(t)$  bei ASK. Aufgrund der Bandpaßfilterung mit unterschiedlichen Mittenfrequenzen können diese Störanteile als unkorreliert angenommen werden. Die Störleistung  $\sigma_b^2$  des Differenzsignals  $b(t) = b_1(t) - b_0(t)$  ist somit doppelt so groß wie beim vergleichbaren ASK-System. Das gleiche trifft für die Störleistung  $\sigma_d^2$  des Detektionssignals zu. Mit Gl. (1.29) und  $\hat{z}_E = 1$  gilt bei FSK somit näherungsweise:

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2T} . \quad (1.36)$$

Daraus folgt mit  $g_d(0) = s_0/2$  (aufgrund der Annahme  $\hat{z}_E = 1$ ):

$$p_B = Q\left(\frac{g_d(0)}{\sigma_d}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(s_0/2)^2 \cdot 2T}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{s_0^2 \cdot T}{2 \cdot N_0}}\right) . \quad (1.37)$$

Die "Energie pro Bit" ist bei FSK mit  $E_B = s_0^2 \cdot T/2$  nur halb so groß wie bei der Basisbandübertragung (wegen der cos-Multiplikation) und doppelt so groß wie bei ASK (aufgrund der bipolaren Signalisierung). Damit erhält man in Abhängigkeit von  $E_B/N_0$  wie bei ASK:

$$p_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_B}{2N_0}}\right) . \quad (1.38)$$

Bei inkohärenter Hüllkurvendemodulation ergibt sich – wie auch bei ASK – ein merkbar geringerer Störabstand und damit eine größere Bitfehlerwahrscheinlichkeit als bei einer kohärenten Demodulation. Der Verlust beträgt – in komplizierter Weise abhängig von weiteren Empfängerparametern – zwischen 1.5 und 3 dB. Genauere quantitative Ergebnisse bezüglich der FSK finden sich in der Literatur, z.B. in [8], [11] und [12]. Weiterhin sei in diesem Zusammenhang auf den Versuch D9 verwiesen.

Anzumerken ist, daß die FSK eine größere Bandbreite benötigt als die ASK (vgl. Abschnitt 1.2) und die PSK (vgl. Abschnitt 1.4). Einer Verringerung des Frequenzhubes sind durch die benötigte Bandbreite der Tiefpaßfilter bei Synchrondemodulation (bzw. des Bandpasses bei Hüllkurvendemodulation) Grenzen gesetzt. Der Einsatz eines FSK-Systems bietet sich daher bei Kanälen mit ungünstigen Übertragungseigenschaften, aber ausreichender Bandbreite an.

Vorteilhaft gegenüber der ASK ist u.a. die konstante Einhüllende im Hinblick auf Nichtlinearitäten auf dem Übertragungsweg sowie eine einfachere Taktrückgewinnung. Bei ASK kann diese durchaus zu Problemen führen, wenn eine längere Nullfolge auftritt. Ein weiterer, für die Praxis nicht zu vernachlässigender Vorteil der FSK gegenüber der ASK ist, daß die optimale Entscheidungsschwelle stets  $E_{\text{opt}} = 0$  ist, so daß diese auch bei einer zeitabhängigen Kanaldämpfung nicht nachgeregelt werden muß.

## 1.4 Digitale Phasenmodulation (PSK)

Der dritte Parameter des Trägersignals  $z(t)$  gemäß Gl. (1.32), der entsprechend dem Digitalsignal  $q(t)$  variiert werden kann, ist die Trägerphase  $\varphi_T$ . Dieses Modulationsverfahren bezeichnet man als *PSK* (*Phase Shift Keying*), im deutschsprachigen Raum teilweise auch als *Phasenumtastung*.

Das in Bild 1.7 dargestellte Blockschaltbild des ASK-Systems kann auch für PSK-Systeme verwendet werden. Lediglich Modulator und Demodulator unterscheiden sich in ihrer Arbeitsweise. Liegt bei ASK-Systemen die zu übertragende Information in der Amplitude des modulierten Signals  $s(t)$ , so ist bei PSK-Systemen die Nachricht in der Phase von  $s(t)$  enthalten.

Im folgenden wird die binäre PSK anhand typischer Signalverläufe, eines geeignet definierten Basisbandmodells sowie des Phasendiagramms beschrieben und deren Bitfehlerwahrscheinlichkeit berechnet. Anschließend werden mehrstufige PSK-Systeme vorgestellt und die Quadraturamplitudenmodulation als ein verwandtes Verfahren kurz behandelt. Desweiteren wird ansatzweise das Zweiwege-Kanalmodell skizziert, das viele Funkübertragungstrecken ausreichend genau annähert.

### 1.4.1 Signalverläufe bei binärer Phasenmodulation (BPSK)

Ein Sonderfall der PSK ist die *BPSK* (*Binary Phase Shift Keying*), bei der die Phase des Bandpaßsignals  $s(t)$  nur zwei verschiedene Werte annehmen kann. Für das BPSK-Sendesignal gilt im Zeitintervall von  $(v-1/2) \cdot T < t < (v+1/2) \cdot T$  mit den bipolaren Amplitudenkoeffizienten  $a_v \in \{-1, +1\}$ :

$$s(t) = s_0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot f_T \cdot t + \frac{\pi}{2} \cdot a_v\right) . \quad (1.39)$$

Nach einfachen trigonometrischen Umformungen folgt daraus abschnittsweise:

$$s(t) = \begin{cases} -s_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f_T \cdot t) & \text{für } a_v = +1 , \\ +s_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f_T \cdot t) & \text{für } a_v = -1 . \end{cases} \quad (1.40)$$

Bild 1.14(b) zeigt das zu dem in Bild 1.14(a) dargestellten binären bipolaren Quellsignal  $q(t)$  gehörige BPSK-Sendesignal  $s(t)$ . Es ist zu erkennen, daß im modulierten Signal  $s(t)$  Phasensprünge auftreten. Weiterhin wird deutlich, daß die BPSK (mit  $\varphi_T = 0^\circ$ ) auch als eine Art Amplitudenumtastung (ASK) mit bipolaren Amplitudenkoeffizienten und "minus-sinus"-förmigem Trägersignal (d.h.  $\varphi_T = -90^\circ$ ) aufgefaßt werden kann. Als Modulator kann somit modellhaft wie bei der ASK ein Multiplizierer verwendet werden:  $s(t) = q(t) \cdot z(t)$ . Hierbei ist das Trägersignal  $z(t)$  wieder normiert zu betrachten.

Eine weitere Möglichkeit zur Realisierung eines BPSK-Modulators bietet die Kombination eines differenzierenden Elementes und eines spannungsgesteuerten Oszillators (VCO) mit der Mittenfrequenz  $f_T$ . Ist dessen Eingangssignal gleich der Ableitung  $dq(t)/dt$  des Nachrichtensignals, so ist die Phase des Ausgangssignals  $s(t)$  wie gewünscht proportional zu  $q(t)$ . Bei jedem Symbolwechsel ändert der VCO die Phase um  $\pm 180^\circ$ .

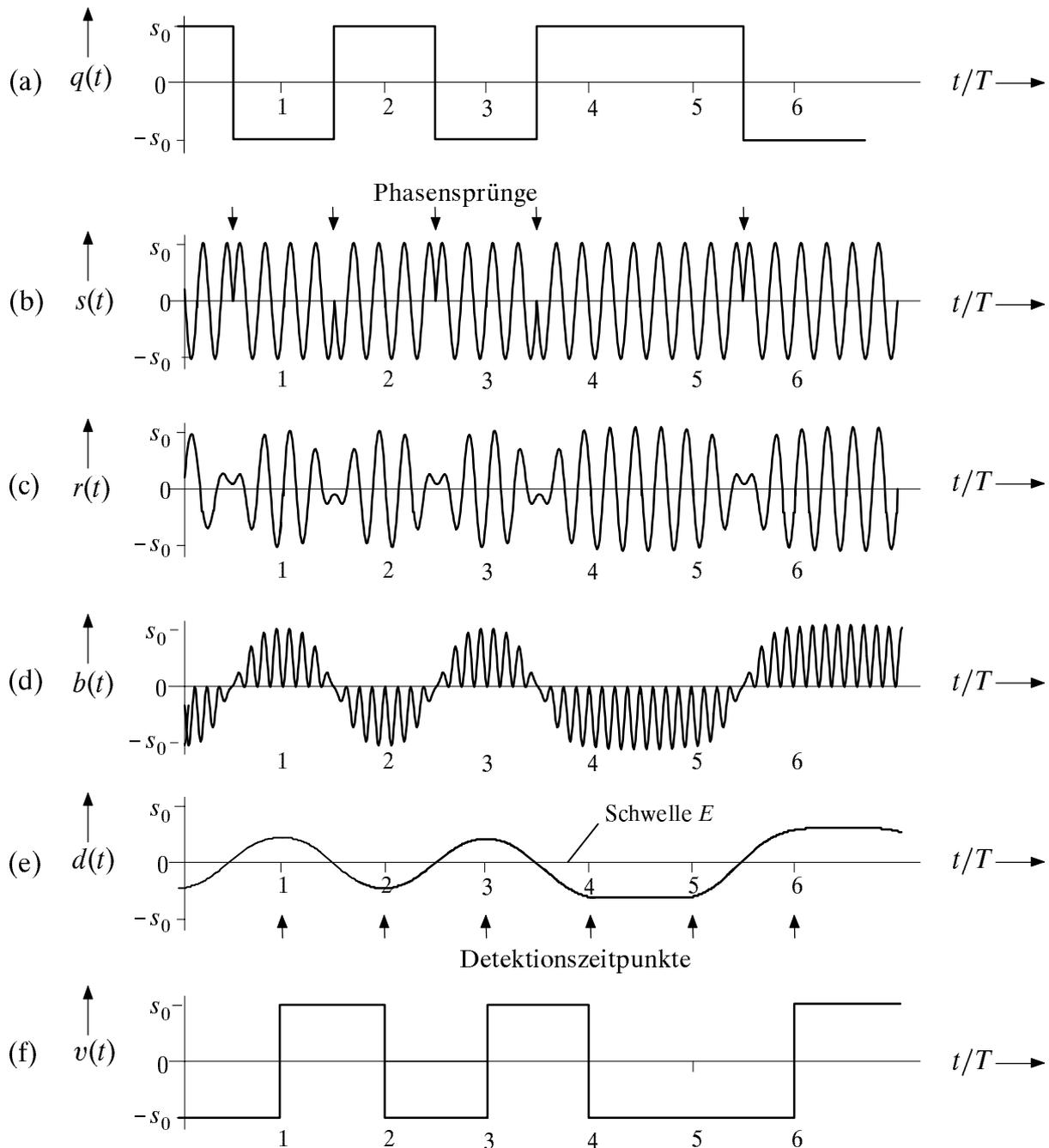


Bild 1.14: Beispielhafte Signalverläufe eines ungestörten binären PSK-Systems ( $f_T = 4/T$ ,  $\varphi_T = 0^\circ$ ,  $n(t) = 0$ ) bei bandbegrenztem Bandpaßkanal und Synchrondemodulation.

Da die Hüllkurve des Sendesignals konstant ist, ist die PSK im Gegensatz zur ASK auch unempfindlich gegenüber nichtlinearen Verzerrungen auf dem Kanal. Auftretende Amplitudenschwankungen können durch eine Amplitudenbegrenzung des Empfangssignals  $r(t)$  leicht eliminiert werden. Jede Bandbegrenzung des modulierten Signals  $s(t)$  führt aber zu Einbrüchen der Hüllkurve an den Stellen, an denen die Phase um  $\pm 180^\circ$  wechselt (vgl. Bild 1.14(b) und (c); für  $H_K(f)$  ist hierbei ein Gaußbandpaß eingesetzt).

Hüllkurvendemodulation ist aufgrund der konstanten Einhüllenden nicht möglich. PSK-modulierte Signale müssen deshalb stets kohärent demoduliert werden, so daß auf das Bandpaßfilter am Empfängereingang (vgl. Bild 1.7) verzichtet werden kann.

## 1.4.2 Leistungsdichtespektren

Alle in Abschnitt 1.2.2 für das ASK-System getroffenen Aussagen hinsichtlich der Leistungsdichtespektren lassen sich auf das BPSK-System übertragen, wenn man anstelle von Gl. (1.26) die für das bipolare Quellensignals  $q(t)$  gültige Gleichung verwendet:

$$\Phi_q(f) = T \cdot s_0^2 \cdot \text{si}^2(\pi \cdot f \cdot T). \quad (1.41)$$

Ein Vergleich mit Gl. (1.26) zeigt, daß das kontinuierliche,  $\text{si}^2$ -förmige LDS hier um den Faktor 4 größer ist, während die zusätzliche, den Gleichanteil beschreibende Diracfunktion bei der Frequenz  $f=0$  entfällt. Bild 1.15 zeigt die sich ergebenden Leistungsdichtespektren der in Bild 1.14 dargestellten Nutzsignale. Die angegebenen Kurvenverläufe lassen sich in gleicher Weise wie diejenigen von Bild 1.9 interpretieren.

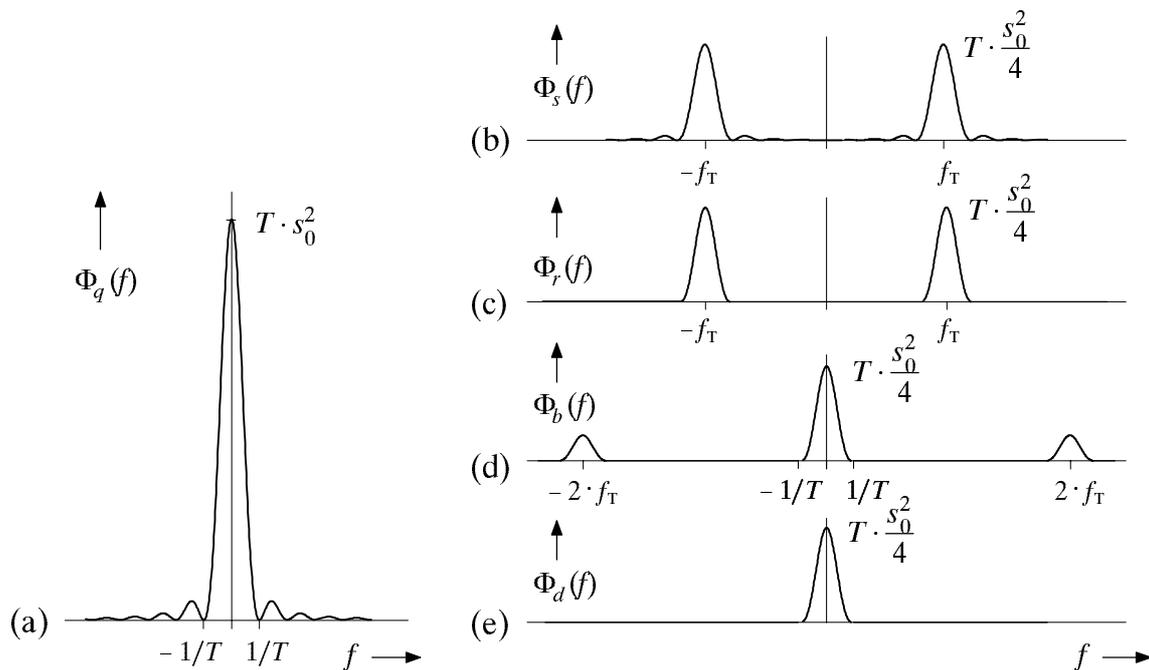


Bild 1.15: Leistungsdichtespektren der PSK-Nutzsignale von Bild 1.14.

Abschließend noch eine Anmerkung zum LDS  $\Phi_s(f)$ . Im Abschnitt 1.4.6 des Versuchs "AMV" wurde gezeigt, daß bei cosinusförmigem Nachrichtensignal ein diskretes PM-Spektrum mit Diracfunktionen im Abstand der Nachrichtenfrequenz ergibt, deren Gewichte durch die Besselfunktionen gegeben sind. Setzt sich das Nachrichtensignal aus  $k$  Harmonischen zusammen, so erhält man das Spektrum nach  $k$ -facher Faltung der einzelnen Diracspektren. Jedes zufällige Binärsignal (endlicher Länge) kann man entsprechend der Fourierreihe als eine Summe von harmonischen Schwingungen darstellen, so daß für jedes mögliche Mustersignal das dazugehörige Spektrum  $S(f)$  nach obiger Vorgehensweise ermittelt werden kann. Durch Mittelung über alle  $|S(f)|^2$  und anschließender Grenzwertbildung käme man schließlich zum LDS  $\Phi_s(f)$ .

Bild 1.15(b) zeigt, daß das Ergebnis dieser doch recht komplizierten Berechnungsmöglichkeit sehr einfach ist. Berücksichtigt man, daß die BPSK einer ASK mit bipolar angesetztem Quellensignal entspricht, so kann man das Ergebnis direkt angeben.

### 1.4.3 Bitfehlerwahrscheinlichkeit für BPSK/AWGN-Kanal

Hinsichtlich des Rauschens besteht kein Unterschied zur ASK und damit zu den Überlegungen von Abschnitt 1.2.3. Somit gilt analog zu Gl. (1.30):

$$p_B = Q\left(\frac{g_d(0)}{\sigma_d}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{s_0^2 \cdot T}{N_0}}\right). \quad (1.42)$$

Die Energie pro Bit berechnet sich bei der BPSK wie bei FSK zu  $E_B = s_0^2 \cdot T/2$  (doppelter Wert gegenüber der ASK). Damit erhält man:

$$p_B = Q\left(\sqrt{\frac{2E_B}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}}\right). \quad (1.43)$$

In der Vorbereitungsfrage V1 erfolgt für den AWGN-Kanal ein Vergleich von Basisbandsystem, ASK und PSK anhand der entsprechenden Fehlerwahrscheinlichkeiten.

### 1.4.4 Basisbandmodell für BPSK und ASK

Durch die Multiplikation eines Basisbandsignals, z.B. des Quellensignals  $q(t)$ , mit einem cosinusförmigen Trägersignal  $z(t)$  wird das Amplitudenspektrum vor dem Kanal – und dementsprechend auch das Leistungsdichtespektrum – um die Trägerfrequenz  $f_T$  beidseitig verschoben. Nach dem Übertragungskanal wird diese Verschiebung durch den Demodulator im Idealfall wieder vollständig rückgängig gemacht.

Da das Basisbandsignal durch die Frequenzbandverschiebung in seiner Form nicht verändert wird, liegt es nahe, die Berechnung der Signale nach dem Demodulator zu vereinfachen. Dies kann z.B. dadurch geschehen, daß man sich die Modulation und Demodulation quasi gegeneinander "gekürzt" denkt und dafür den Bandpaßkanal  $H_K(f)$  durch einen geeigneten Tiefpaß  $H_{MKD}(f)$  ersetzt. Hierbei steht der Index "MKD" für "Modulator-Kanal-Demodulator". Da diese Modifikation nur bei einem System mit Synchrondemodulation möglich ist, kann das Bandpaßfilter am Empfängereingang wieder unberücksichtigt bleiben.

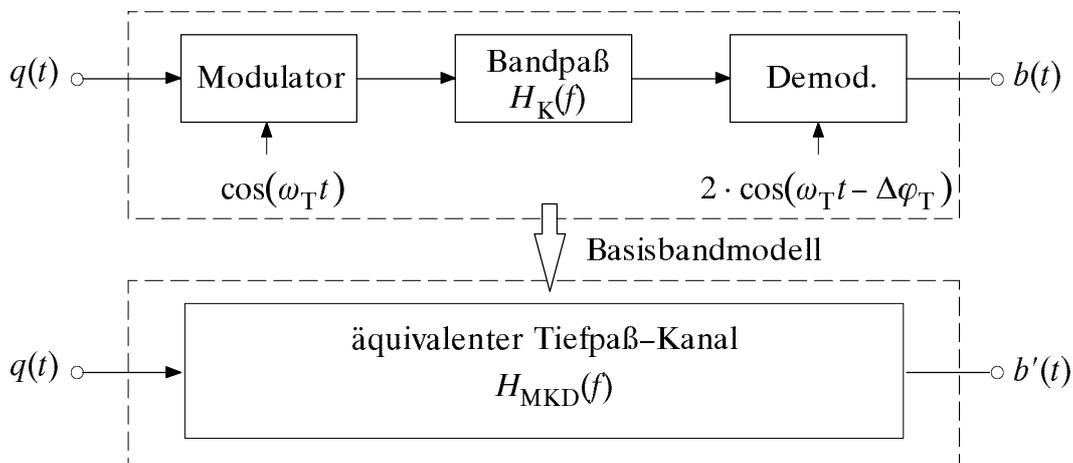


Bild 1.16: Äquivalentes Basisbandmodell für ASK bzw. BPSK mit Synchrondemodulation.

In Bild 1.16 ist das äquivalente Basisbandmodell der ASK bzw. BPSK dargestellt. Für die Amplitude des empfangsseitigen Trägersignals wurde hierbei  $\hat{z}_E = 2$  verwendet. Die Signale  $b(t)$  nach dem Demodulator des Bandpaßsystems sowie  $b'(t)$  am Ausgang des äquivalenten Basisbandmodells sind somit bis auf den  $2 \cdot f_T$ -Anteil identisch.

Unter Berücksichtigung einer Phasendifferenz  $\Delta\varphi_T$  zwischen empfangs- und sendeseitigem Trägersignal erhält man für die resultierende Tiefpaß-Übertragungsfunktion:

$$H_{\text{MKD}}(f) = \frac{1}{2} \cdot [e^{-j\Delta\varphi_T} \cdot H_K(f - f_T) + e^{j\Delta\varphi_T} \cdot H_K(f + f_T)] . \quad (1.44)$$

Bei einem reellen und um die Trägerfrequenz  $f_T$  symmetrischen Kanalfrequenzgang (d.h.:  $H_K(f_T - f) = H_K(f_T + f)$ ) kann man (1.44) wie folgt vereinfachen:

$$H_{\text{MKD}}(f) = \frac{\cos(\Delta\varphi_T)}{2} \cdot [H_K(f - f_T) + H_K(f + f_T)] . \quad (1.45)$$

Diese Gleichung gilt für ASK und BPSK in gleicher Weise. Die Bitfehlerwahrscheinlichkeiten beider Systeme können nun vereinfachend mit dem für die Basisbandübertragung gültigen Modell berechnet werden, und zwar auch dann, wenn ein verzerrender Kanalfrequenzgang  $H_K(f)$  vorliegt. Anstelle des Bandpaßkanals  $H_K(f)$  ist dann allerdings die modifizierte Funktion  $H_{\text{MKD}}(f)$  gemäß Gl. (1.44) bzw. (1.45) einzusetzen (vgl. Bild 1.17).

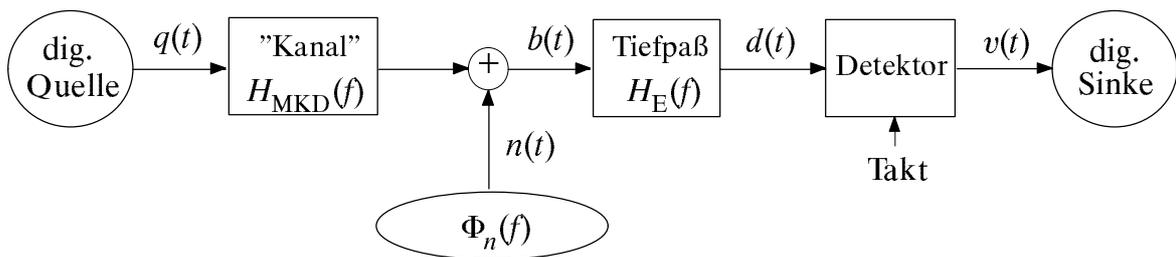


Bild 1.17: Gemeinsames Basisbandmodell für ASK und BPSK.

Im ersten Fall muß das Quellensignal  $q(t)$  unipolar, bei BPSK dagegen bipolar angesetzt werden. Weiterhin ist bei weißem Rauschen  $n(t)$  die (zweiseitige) Rauschleistungsdichte  $\Phi_n(f) = N_0$  entsprechend Bild 1.11 zu berücksichtigen (also mit dem doppelten Wert gegenüber der Basisbandübertragung, da  $\hat{z}_E = 2$ ).

Im folgenden wird das Basisbandmodell anhand der Amplitudenspektren von Bild 1.18 beschrieben. Zur besseren Veranschaulichung werden hierzu die Spektren als gaußförmig und der Kanalfrequenzgang  $H_K(f)$  als rechteckförmig mit der Mittenfrequenz  $f_M = f_T$  angenommen. Um reelle Spektren zu erhalten, sind die beiden Trägerphasen jeweils zu 0 gewählt, was der Modulation mit einer Cosinusschwingung und einer phasenrichtigen Synchrondemodulation entspricht. Weiter gilt  $\hat{z}_E = 2$ .

Der zur Rauschleistungsbegrenzung notwendige Empfänger-Tiefpaß mit dem Frequenzgang  $H_E(f)$  ist ebenfalls als ideal rechteckförmig vorausgesetzt, wobei  $\Delta f_E > \Delta f_K$  gelten soll. Das Detektionssignal  $d(t) \circ \bullet D(f)$ , das z.B. für die Bestimmung des Augendiagramms und der Bitfehlerwahrscheinlichkeit benötigt wird, ist nach beiden Berechnungsarten identisch.

Da  $H_K(f)$  um die Trägerfrequenz  $f_T$  symmetrisch ist, ergibt sich für die äquivalente Basisbandfunktion  $H_{MKD}(f)$  als eine zu  $H_K(f)$  formgleiche (Rechteck-)Funktion. Eine Phasenabweichung  $\Delta\varphi_T$  zwischen den beiden Trägersignalen würde sich entsprechend (1.45) im Basisbandmodell in einer frequenzunabhängigen Dämpfung um den Faktor  $\cos(\Delta\varphi_T)$  bemerkbar machen. Um den gleichen Faktor würde auch die vertikale Augenöffnung verkleinert, das Signalstörleistungsverhältnis entsprechend um  $\cos^2(\Delta\varphi_T)$ .

Der hier betrachtete Kanalfrequenzgang  $H_K(f)$  bewirkt wegen  $\Delta f_K < \Delta f_E$  eine zusätzliche Bandbegrenzung und damit eine Vergrößerung der Impulsinterferenzen und der Bitfehlerwahrscheinlichkeit. Diese haben den gleichen Einfluß wie beim vergleichbaren Basisbandsystem und können auch mit den gleichen Maßnahmen beseitigt oder zumindest vermindert werden (siehe dazu den nachfolgenden Versuch "Impulsinterferenzen und Entzerrung" in diesem Praktikum). Weitere Beispiele für die Berechnung des äquivalenten Basisbandmodells finden Sie in den Vorbereitungsfragen V3 und V4.

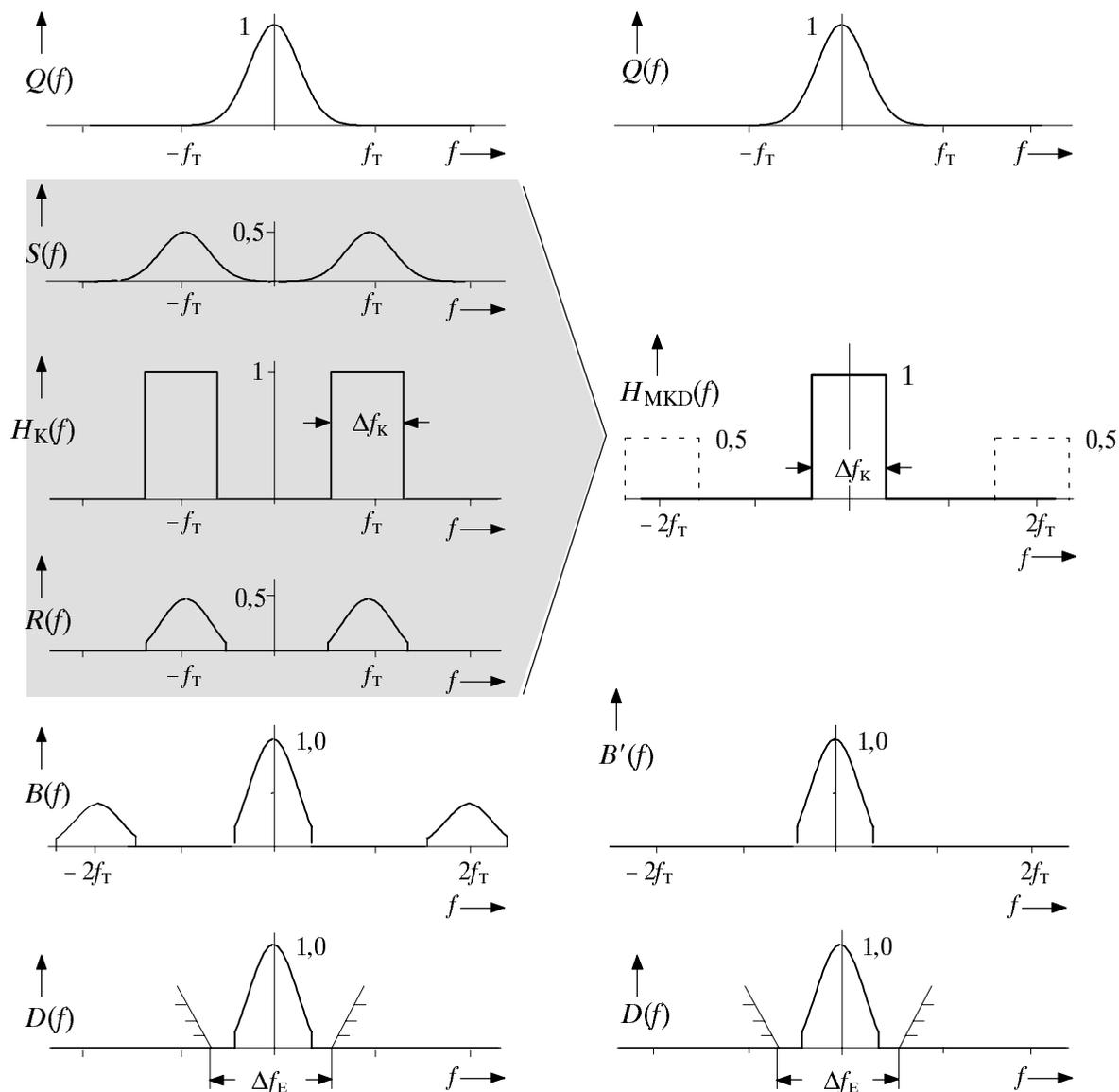


Bild 1.18: Amplitudenspektren bei phasenrichtiger Synchrondemodulation (links) und Bedeutung des äquivalenten Basisbandfrequenzgangs  $H_{MKD}(f)$  (rechts).

### 1.4.5 Phasendiagramm und mehrstufige Phasenmodulation

Eine anschauliche Deutung der Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen ASK und PSK erlaubt das *Phasendiagramm*. Dieses beschreibt das äquivalente Tiefpaßsignal  $s_{TP}(t)$  in der komplexen Ebene. Sowohl bei ASK als auch bei BPSK existieren nur zwei mögliche Punkte im Phasenraum. Bei ASK (mit  $\varphi_T = 0^\circ$ ) sind dies die Punkte 0 und  $s_0$  (vgl. Bild 1.19(a)). Die Bilder 1.19(b) und (c) zeigen die Phasendiagramme für BPSK mit  $\varphi_T = 90^\circ$  bzw.  $\varphi_T = 0^\circ$ . Beide führen zur gleichen Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$ , doch sind die Bereichsgrenzen des Entscheiders anders zu wählen. Für Diagramm (b) ist die Bereichsgrenze zwischen den beiden Binärsymbolen die imaginäre Achse, für Diagramm (c) dagegen die reelle Achse.

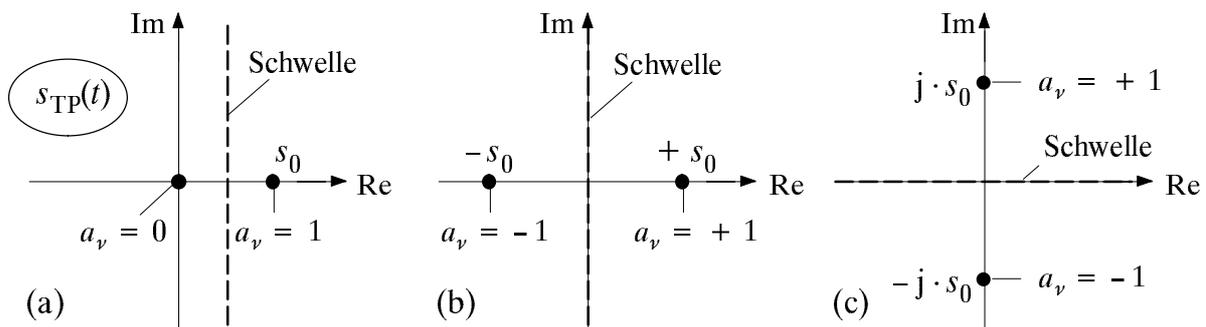


Bild 1.19: Phasendiagramme von (a) ASK (mit  $\varphi_T = 0^\circ$ ),  
 (b) BPSK (mit  $\varphi_T = 90^\circ$ ) und (c) BPSK (mit  $\varphi_T = 0^\circ$ ).

**Anmerkung:** Bei den analogen Modulationsverfahren wurde das "Phasendiagramm" als "Ortskurve" bezeichnet. Da bei den digitalen Modulationsverfahren die "Ortskurve" nur aus einer endlichen Anzahl von Punkten besteht, zwischen denen beliebig schnell hin und her gesprungen wird, ist der Name Phasendiagramm besser geeignet.

Zur Verringerung des Bandbreitenbedarfs werden bevorzugt mehrstufige Verfahren angewandt. Bild 1.20(a) und (b) zeigen zwei verschiedene Signalraumkonstellationen mit den dazugehörigen Bereichsgrenzen für QPSK-Systeme (*Quaternary Phase Shift Keying*), die sich nur durch die Trägerphase unterscheiden. Die erforderliche Bandbreite der QPSK ist nur halb so groß wie bei BPSK, und das bei gleicher Bitfehlerwahrscheinlichkeit. Die 8PSK, deren Phasendiagramm in Bild 1.20(c) zu sehen ist, benötigt nur ein Drittel der BPSK-Bandbreite, doch ist hier die Bitfehlerwahrscheinlichkeit auch größer.

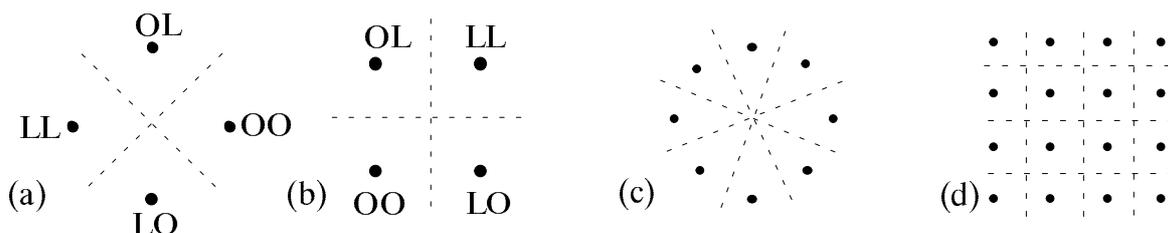


Bild 1.20: Phasendiagramme und Bereichsgrenzen einiger Modulationsverfahren:  
 QPSK (a), QPSK bzw. 4QAM (b), 8PSK (c) und 16QAM (d).

Den Verlust kann man durch eine Kombination verschiedener Modulationsarten anstelle einer noch höherstufigen PSK verringern, z.B. durch die *Quadraturamplitudenmodulation* (QAM) als Kombination von ASK und PSK. In Bild 1.20(d) ist das Phasendiagramm für ein 16QAM-System dargestellt. Hierbei wird in zwei orthogonalen Strängen jeweils ein vierstufiges bipolares ASK-Signal übertragen. Die beiden Stränge können dabei unabhängig voneinander behandelt und entsprechend auch unabhängig entschieden werden.

Die QAM-Systeme sollen hier kurz am Beispiel der vierstufigen QAM beschrieben werden. Diese ist prinzipiell gleich einer QPSK und unterscheidet sich von dieser nur hinsichtlich der Realisierungsform. Beide haben ein Phasendiagramm entsprechend Bild 1.20(b). Das Blockschaltbild des 4QAM-Senders zeigt Bild 1.21(a).

Mittels eines Seriell/Parallel-Wandlers werden jeweils zwei aufeinanderfolgende Binärsymbole des Quellensignals  $q(t)$  in je ein Bit auf den zwei parallelen Strängen  $q_I(t)$  und  $q_Q(t)$  umcodiert ("Dibit"), wobei die Indizes für Inphase- und Quadraturkomponente stehen. Die Bitdauer dieser Teilsignale  $q_I(t)$  und  $q_Q(t)$  wird dadurch gegenüber der des Quellensignals  $q(t)$  verdoppelt. Damit wird gleichzeitig die Bandbreite der einzelnen Spektren halbiert. Diese Teilsignale werden mit den zueinander orthogonalen Trägersignalen  $z_I(t)$  und  $z_Q(t)$  BPSK-moduliert (z.B. sei  $z_I(t)$  eine Cosinus- und  $z_Q(t)$  eine -Sinusfunktion) und anschließend gemeinsam über den Kanal übertragen (vgl. Bild 1.21(a)).

Aus den Phasenlagen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  (vgl. Bild 1.19(b)) bzw.  $90^\circ$  und  $270^\circ$  (vgl. Bild 1.19(c)) der Komponentensignale  $s_I(t)$  und  $s_Q(t)$  ergeben sich die resultierenden Phasenlagen  $45^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $225^\circ$ ,  $315^\circ$  des vierstufigen QAM-Sendesignals  $s(t)$ . Das entsprechende Phasendiagramm ist in Bild 1.20(b) dargestellt, wobei das erste Symbol sich jeweils auf das Signal  $q_I(t)$  und das zweite auf das Signal  $q_Q(t)$  bezieht.

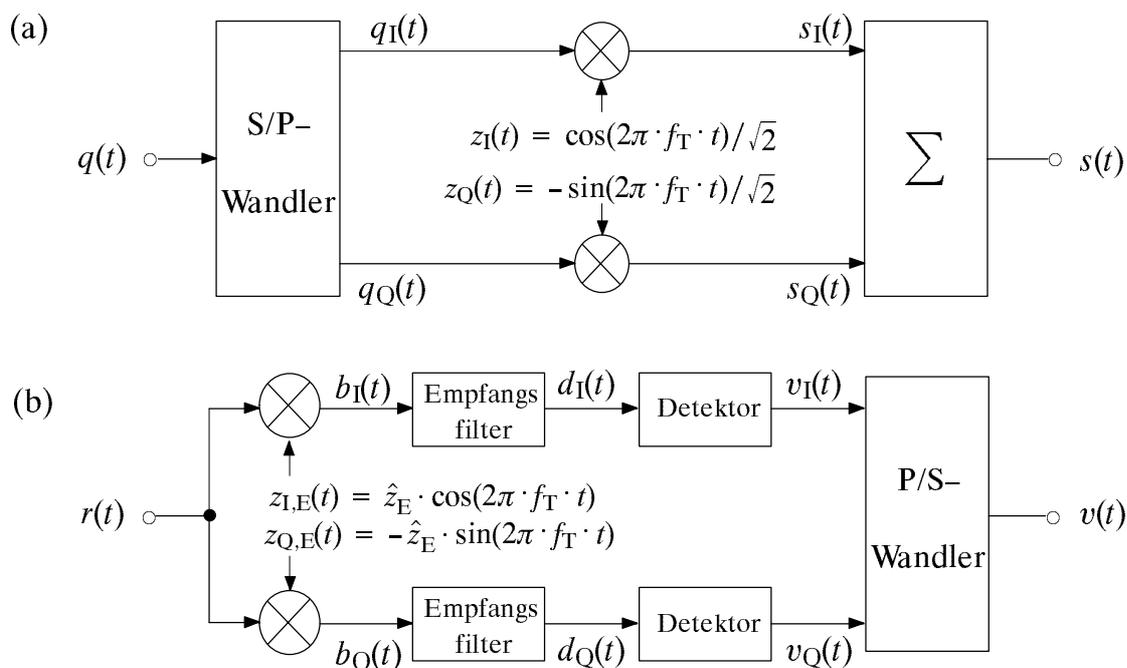


Bild 1.21: Sender (a) und Empfänger (b) bei 4QAM; die beiden Orthogonalfunktionen "cos" und "-sin" führen genau zu der Zuordnung gemäß dem Phasendiagramm 1.20(b).

Die Amplituden der beiden orthogonalen Trägersignale wurden hier im Gegensatz zur BPSK gleich  $\hat{z} = 1/\sqrt{2}$  gewählt, so daß die Hüllkurve des Summensignals  $s(t)$  wiederum  $s_0$  beträgt (siehe auch entsprechendes Phasendiagramm (b) in Bild 1.20).

Unter der willkürlichen Annahme, daß die beiden Spektren  $Q_I(f)$  und  $Q_Q(f)$  reell sind, wird in der spektralen Darstellung zu dem rein reellen Spektrum  $S_I(f)$  das rein imaginäre Spektrum  $S_Q(f)$  hinzuaddiert. Die Bandbreiteneffizienz dieses (und auch anderer) QAM-Verfahren wird somit durch gleichzeitiges Übertragen zweier voneinander trennbarer Spektren der jeweils halben Bandbreite erreicht.

Bild 1.21(b) zeigt das Blockschaltbild eines möglichen 4QAM-Empfängers. Das am Empfänger ankommende Signal  $r(t)$  wird getrennt mit zwei um  $90^\circ$  verschobenen Trägersignalen synchrondemoduliert, anschließend gefiltert und detektiert. Aus den beiden Teilsignalen  $v_I(t)$  und  $v_Q(t)$ , jedes mit der Symboldauer  $T$ , wird schließlich durch einen Parallel/Seriell-Wandler das Sinkensignal  $v(t)$  mit der Symboldauer  $T_B = T/2$ , also mit doppelter Rate, gewonnen.

Durch Demodulation und Filterung geht die jeweils orthogonale Signalkomponente verloren. Wie auch am Phasendiagramm von Bild 1.20(b) zu erkennen ist, darf daher in jedem Zweig die Amplitude des Störsignalanteils nur mehr das  $1/\sqrt{2}$ -fache der konstanten Sendesignalamplitude betragen. Im Vergleich zur BPSK verringert sich somit – bei gleichbleibender Sendeleistung – das Signalstörleistungsverhältnis um den Faktor 2. Da aber auch nur die Hälfte der Bandbreite benötigt wird, kann durch eine Halbierung der Filtergrenzfrequenz die Störleistung in gleichem Maße verringert werden. Bei Synchrondemodulation und jeweiliger Parameteroptimierung führen somit die BPSK und die 4QAM (und damit natürlich auch die QPSK) zur gleichen Bitfehlerwahrscheinlichkeit.

Dem Phasendiagramm von Bild 1.20(b) ist weiter zu entnehmen, daß beim 4QAM-Verfahren (mit Gray-Codierung) die "00"/"11"- bzw. "01"/"10"-Übergänge Phasensprünge von  $180^\circ$  verursachen. Wie bei der binären PSK führen diese Phasensprünge bei Bandbegrenzung zu Einbrüchen in der Hüllkurve, die das Signal empfindlich gegenüber nichtlinearen Verzerrungen auf der Übertragungsstrecke machen. Eine Möglichkeit zur Verringerung dieser Beeinträchtigung besteht darin, die beiden Signale  $q_I(t)$  und  $q_Q(t)$  um eine halbe Symboldauer (bezogen auf die Teilsignale) versetzt zu übertragen (*OQPSK*: "Offset Quaternary Phase Shift Keying"). Dadurch treten nur noch  $90^\circ$ -Phasensprünge auf, da aufgrund dieser Maßnahme sich nicht beide Dibits gleichzeitig ändern können.

Beim Übergang von der binären zur 4QAM bzw. QPSK konnte die benötigte Bandbreite bei gleichbleibender Übertragungsgüte um die Hälfte reduziert werden. Der Bedarf an Bandbreite läßt sich durch den Einsatz von Modulationsverfahren mit höherstufiger Phasenumtastung noch weiter verringern. Wie aber schon das Beispiel der 8PSK von Bild 1.20(c) zeigt, muß bei einer Erhöhung der Stufenzahl stets auch ein merkbarer Verlust an Signalstörabstand und somit eine höhere Bitfehlerwahrscheinlichkeit in Kauf genommen werden.

Der Trend geht momentan zu noch höherer Stufenzahl, z.B. zum 256QAM-System.

### 1.4.6 Zweiwege-Kanalmodell

Abschließend soll noch auf ein häufig benutztes Modell einer realen Funkstrecke hingewiesen werden. Auf Richtfunkübertragungsstrecken erreicht unter normalen meteorologischen Verhältnissen das Sendesignal den Empfänger nur auf einem Ausbreitungspfad (Freiraum-Ausbreitung, siehe Bild 1.22). Dieser wird von den Brechungsverhältnissen auf der Übertragungsstrecke bestimmt. Unter bestimmten ungünstigen meteorologischen Voraussetzungen lassen die Brechungsverhältnisse in der Atmosphäre mehrere zum Empfänger führende Ausbreitungspfade zu. Ausgehend von diesem physikalischen Modell wurde von Rummler ein mathematisches Kanalmodell entwickelt. In diesem setzt sich im einfachsten Fall das Empfangssignal aus der Überlagerung zweier Abbilder des Sendesignals zusammen, wobei einer dieser Anteile um eine Zeitdifferenz  $\tau$  gegenüber dem ersten verzögert und mit einer zusätzlichen Dämpfung  $\alpha_\tau$  und einer frequenzunabhängigen Phasenverzerrung  $\exp(j \cdot 2\pi \cdot f_{\text{Notch}} \cdot \tau)$  behaftet ist ( $f_{\text{Notch}}$  bezeichnet man als Notch-Frequenz). Beide Anteile unterliegen dazu einer gemeinsamen frequenzunabhängigen Dämpfung  $\alpha_0$ , die bei Regen Größenordnungen von ca. 30 dB annehmen kann.

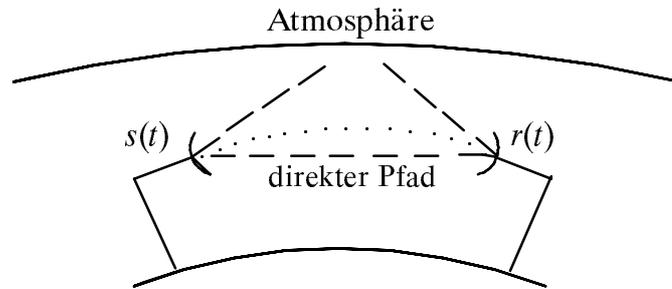


Bild 1.22: Freiraum-Ausbreitung eines Funksignals.

Als Näherung für die Impulsantwort  $h_K(t)$  des Zweiwege-Kanals ergibt sich somit:

$$h_K(t) = \alpha_0 \cdot [\delta(t) - \alpha_\tau \cdot e^{j2\pi f_{\text{Notch}} \cdot \tau} \cdot \delta(t - \tau)] , \quad (1.46)$$

$$H_K(f) = \alpha_0 \cdot [1 - \alpha_\tau \cdot e^{j2\pi f_{\text{Notch}} \cdot \tau} \cdot e^{-j2\pi f \tau}] .$$

Das Empfangssignal berechnet sich damit zu:

$$r(t) = s(t) * h_K(t) + n(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot g_r(t - \nu \cdot T) + n(t) , \quad (1.47)$$

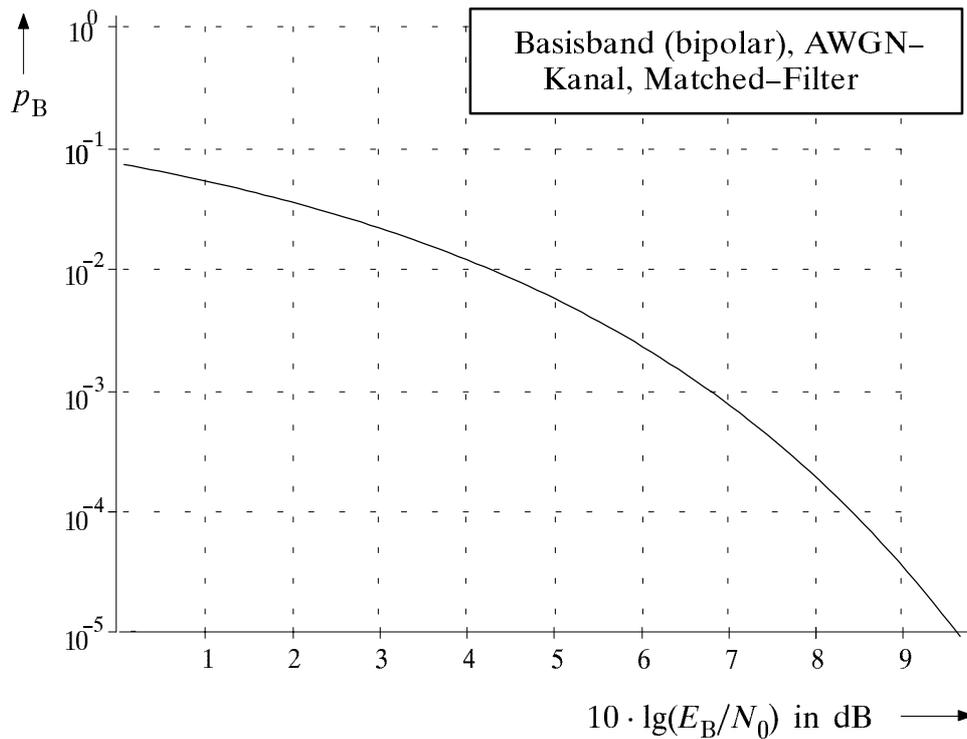
$$\text{mit } g_r(t) = g_s(t) * h_K(t) = \alpha_0 \cdot [g_s(t) - \alpha_\tau \cdot e^{j2\pi f_{\text{Notch}} \cdot \tau} \cdot g_s(t - \tau)] .$$

Realistische Werte sind  $\tau = 6.3$  ns und  $f_{\text{Notch}} = 28$  MHz. Die Dämpfungsfaktoren  $\alpha_0$  und  $\alpha_\tau$  verändern sich mit der Zeit, wobei  $\alpha_\tau$  in 40% der Zeit größer als 0.3 ist. Bei der Versuchsdurchführung wird stets  $\alpha_0 = 1$  gesetzt. Die Dämpfung durch die Freiraumausbreitung bleibt damit also unberücksichtigt; sie kann beim Empfänger durch eine geeignete Verstärkung kompensiert werden, natürlich wieder auf Kosten einer größeren Rauschleistung. Bei entsprechender Wahl der Parameter  $\alpha_0$  und  $\alpha_\tau$  kann sich im Versuch also durchaus auch eine Leistungsverstärkung durch den Zweiwege-Kanal ergeben.

## 2 Vorbereitungsfragen

### V1 Bitfehlerwahrscheinlichkeit

Nachfolgende Skizze zeigt die bei einem (optimalen bipolaren) Basisbandsystem erreichbare Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  in Abhängigkeit des den AWGN-Kanal kennzeichnenden Quotienten  $E_B/N_0$ . Beide Koordinatenachsen sind logarithmisch skaliert.



- a) Welche Bitfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich bei einer Bitrate von  $R_B = 2$  Mbit/s, wenn das binäre rechteckförmige Sendesignal  $s(t)$  die Amplitudenwerte  $\pm 4$  V annimmt und die auf  $1\Omega$  umgerechnete Rauschleistungsdichte  $N_0 = 10^{-6}$  V<sup>2</sup>/Hz beträgt? Verwenden Sie zur Lösung dieser Teilaufgabe die Q-Funktion entsprechend der im Anhang beigefügten Tabellen.

- b) Wie sieht der optimale Empfänger in diesem Fall aus?

- c) Berechnen Sie nun die Bitfehlerwahrscheinlichkeit nach Punkt a) mit der Funktion  $\operatorname{erfc}(x)$  unter Berücksichtigung der für große  $x$  (d.h. für kleine Fehlerwahrscheinlichkeiten) gültigen Näherungen:

$$\operatorname{erfc}(x) \approx \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi} \cdot x}, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{erfc}(x) \approx \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi} \cdot x} \cdot \left(1 - \frac{1}{2 \cdot x^2}\right). \quad (2.2)$$

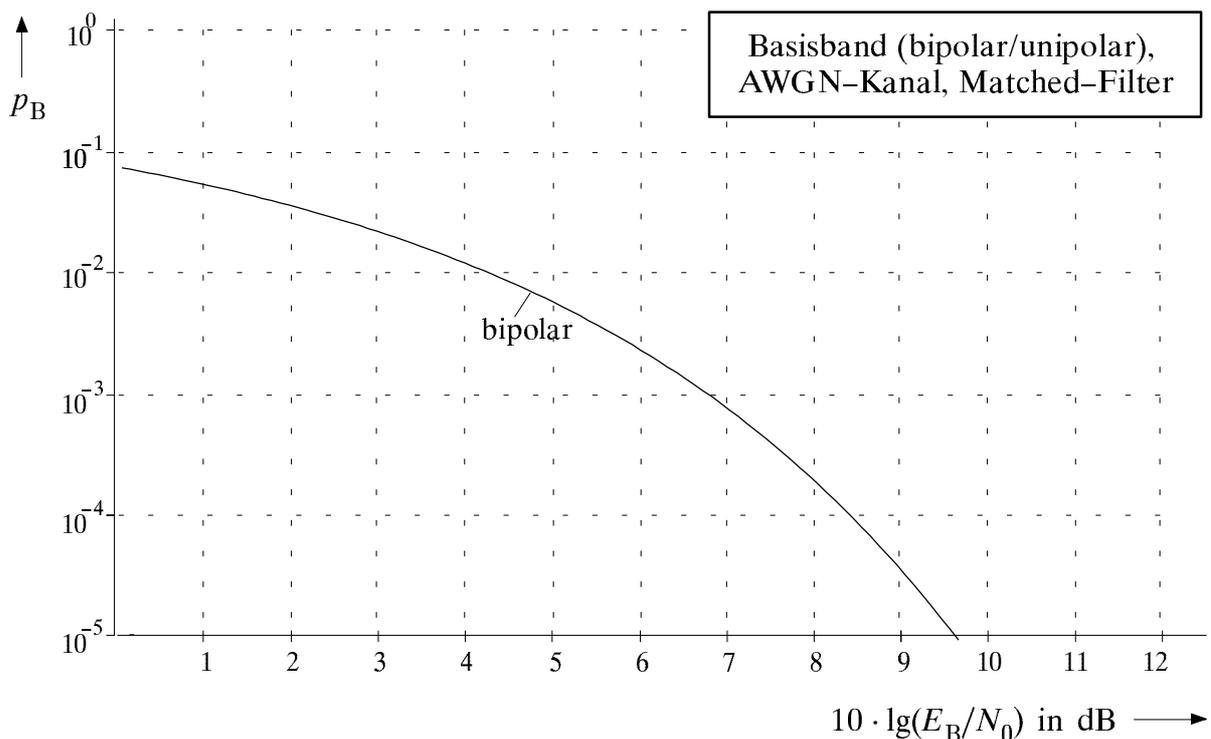
Wie groß sind die auf diese Näherungen zurückzuführenden Fehler?

- d) Wie groß kann die Bitrate  $R_B$  gewählt werden, wenn die Forderung besteht, daß die Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei gleicher Sendeamplitude  $s_0$  und gleicher Rauschleistungsdichte  $N_0$  den Wert  $p_B = 10^{-3}$  nicht übersteigen soll?

- e) Betrachten Sie nun ein BPSK-System mit gleichem AWGN-Quotienten  $E_B/N_0$  wie das Basisbandsystem nach Punkt a). Welcher Wert ergibt sich hier für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit? Wie groß ist die Amplitude  $s_0$  des BPSK-Signals, wenn die Bitrate  $R_B$  und die Rauschleistungsdichte  $N_0$  gegenüber Punkt a) nicht verändert werden?

Im zweiten Teil dieser Aufgabe wird nun das optimale Basisbandsystem mit unipolaren Amplitudenkoeffizienten betrachtet:  $a_\nu \in \{0, 1\}$ . Die möglichen Amplitudenwerte des rechteckförmigen Sendesignals sind somit 0 und  $s_0$ .

- f) Berechnen Sie entsprechend der Vorgehensweise in Abschnitt 1.1.2 die Bitfehlerwahrscheinlichkeit des unipolaren Systems in Abhängigkeit der Parameter  $s_0$  und  $N_0$ . Berücksichtigen Sie hierbei die optimale Entscherschwelle. Wie groß ist diese?
- g) Vergleichen Sie nun das optimale unipolare Basisbandsystem mit dem optimalen bipolaren System bei gleicher Sendeamplitude  $s_0$ . Wie groß kann hier  $N_0$  im Vergleich zur Teilaufgabe a) sein, damit sich die gleiche Bitfehlerwahrscheinlichkeit ergibt?
- h) Berechnen Sie nun die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  des unipolaren Systems in Abhängigkeit des Quotienten  $E_B/N_0$ . Skizzieren Sie den Kurvenverlauf in das nachfolgende Diagramm (die eingezeichnete Kurve gilt für das bipolare System).

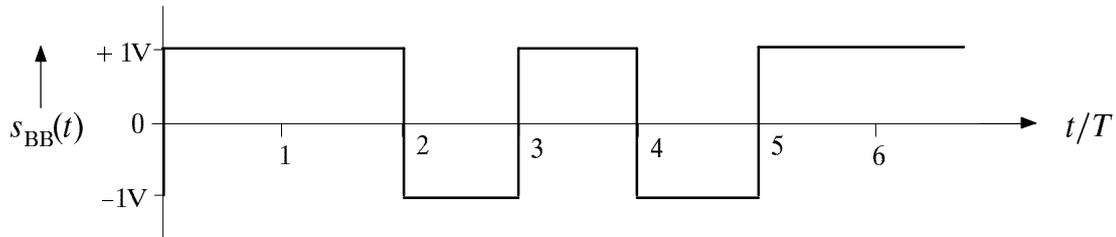


- i) Welcher Wert ergibt sich für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  mit  $E_B/N_0 = 12$  dB?  
*Hinweis:* " $E_B/N_0 = 12$  dB" ist eine einfachere, aber mathematisch nicht ganz saubere Abkürzung für " $10 \cdot \lg(E_B/N_0) = 12$  dB". Berücksichtigen Sie eventuell zur Lösung dieser Aufgabe die Ergebnisse der Teilaufgaben a) und h).
- j) Betrachten Sie nun die ASK nach Abschnitt 1.2. Welcher Wert ergibt sich hier für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  bei  $E_B/N_0 = 12$  dB?
- k) Welches  $E_B/N_0$ -Verhältnis muß ein ASK-System besitzen, damit die Bitfehlerwahrscheinlichkeit den Wert  $p_B = 10^{-3}$  nicht überschreitet?  
*Hinweis:* Berücksichtigen Sie das Ergebnis der Teilaufgabe d) in geeigneter Weise.

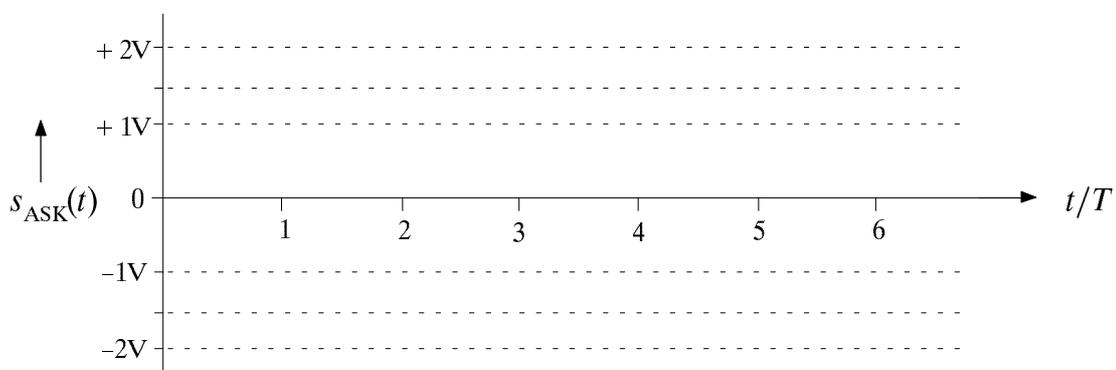
## V2 Signalverläufe bei ASK, FSK und PSK

Die nachfolgende Skizze (a) zeigt den Verlauf des Sendesignals  $s_{\text{BB}}(t)$  bei Basisbandübertragung. Skizzieren Sie die entsprechenden Sendesignalverläufe bei ASK (b), FSK (c) und BPSK (d), wobei alle Sendesignale die gleiche Leistung wie das Basisbandsignal  $s_{\text{BB}}(t)$  aufweisen sollen. Das Trägersignal  $z(t)$  sei jeweils sinusförmig mit der Trägerfrequenz  $f_T = 3/T$ . Der Frequenzhub bei FSK sei  $\Delta f = 1/T$ .

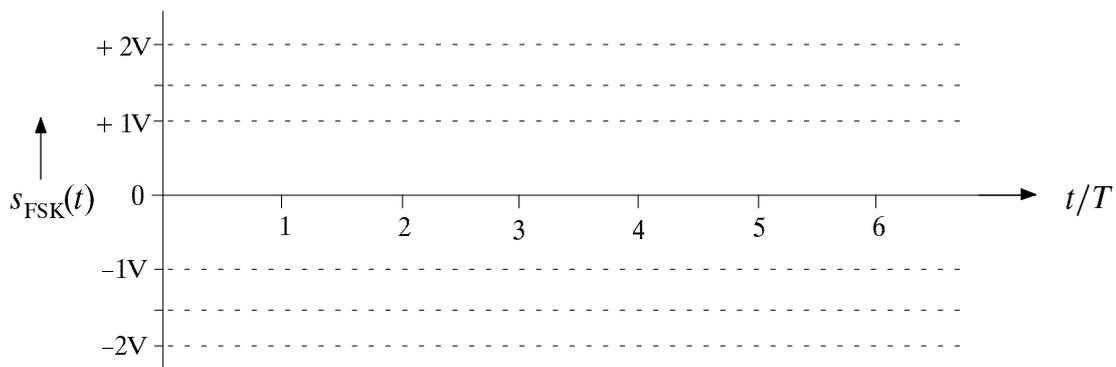
(a)



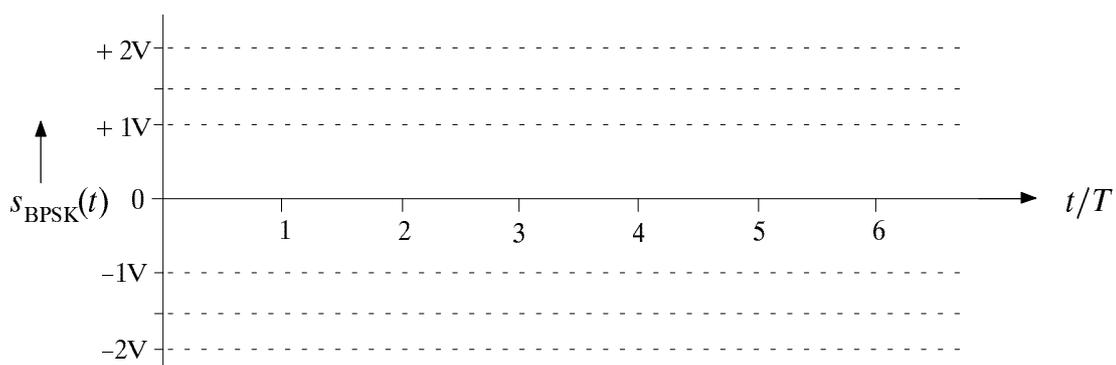
(b)



(c)



(d)

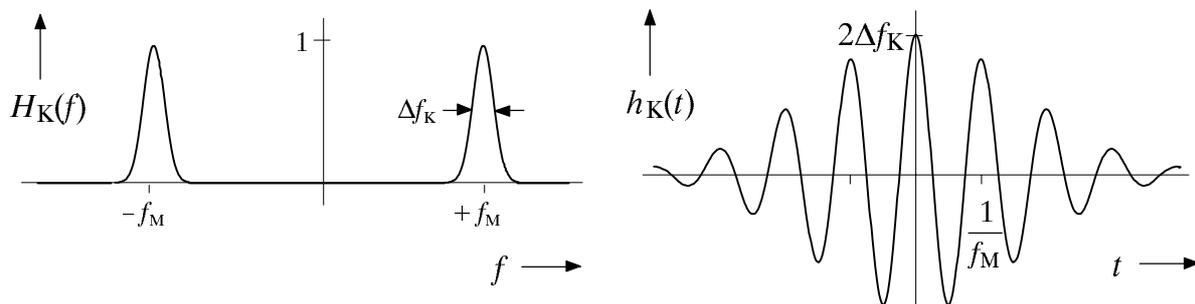


### V3 Beschreibung von Bandpaßkanälen

Bei modulierter Übertragung muß der Kanalfrequenzgang stets als Bandpaß angesetzt werden. Die Kanalparameter sind z.B. die Mittenfrequenz  $f_M$  und die Bandbreite  $\Delta f_K$ . Die Mittenfrequenz  $f_M$  sollte man sinnvollerweise gleich der Trägerfrequenz  $f_T$  wählen. Für das Beispiel eines Gauß-Bandpasses sind in der nachfolgenden Skizze links der (zweiseitige) Frequenzgang

$$H_K(f) = \exp\left[-\pi \cdot \left(\frac{f + f_M}{\Delta f_K}\right)^2\right] + \exp\left[-\pi \cdot \left(\frac{f - f_M}{\Delta f_K}\right)^2\right] \quad (2.3)$$

und rechts die dazugehörige (Bandpaß-)Impulsantwort  $h_K(t)$  dargestellt.



- a) Berechnen und interpretieren Sie die Impulsantwort  $h_K(t)$  der Bandpaßfunktion. Gegeben ist hierzu die Fourierkorrespondenz für den Gauß-Tiefpaß:

$$H_{K,TP}(f) = \exp\left[-\pi \cdot \left(\frac{f}{\Delta f_K}\right)^2\right] \quad (2.4)$$

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \circ \end{array}$$

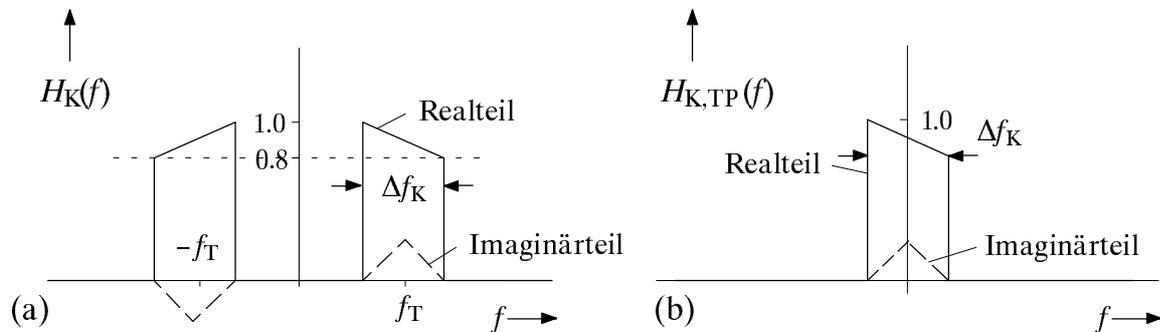
$$h_{K,TP}(t) = \Delta f_K \cdot \exp(-\pi \cdot \Delta f_K^2 \cdot t^2).$$

- b) Geben Sie die Übertragungsfunktion  $H_{MKD}(f)$  des äquivalenten Basisbandmodells an, wenn der Kanal durch Gl. (2.3) gegeben ist und das Modulationsverfahren BPSK angewendet wird. Die Trägerfrequenz  $f_T$  sei gleich der Mittenfrequenz  $f_M$  des Gauß-Bandpasses, die Phasensynchronisation ideal. Wie lautet  $H_{MKD}(f)$ , wenn die Anteile bei der doppelten Trägerfrequenz nicht berücksichtigt werden?

- c) Welche Form hat der Detektionsgrundimpuls  $g_d(t)$ , wenn das Empfangsfilter ebenfalls gaußförmig ist und  $\Delta f_E = \Delta f_K$  gilt (nur verbale Beschreibung erforderlich).
- d) Geben Sie die Übertragungsfunktion  $H_{MKD}(f)$  des äquivalenten Basisbandmodells an, wenn entgegen Punkt b) die Trägerfrequenz  $f_T$  von der Mittenfrequenz  $f_M$  des Gaußkanals um  $f_\varepsilon = f_T - f_M$  abweicht?
- e) In welchem Fall (nach Punkt b oder d) wird die Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei sonst gleichen Randbedingungen größer sein?

## V4 Äquivalentes Tiefpaßmodell

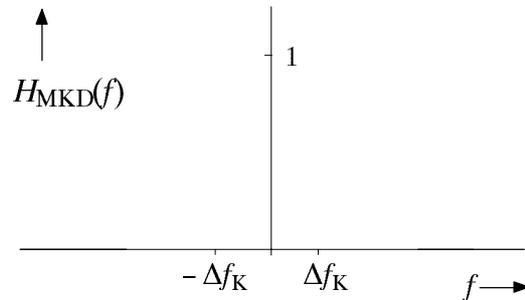
Die Berechnung des äquivalenten Basisbandfrequenzgangs ist nicht immer so einfach wie im Beispiel von Bild 1.18 dargestellt. Im folgenden soll der Kanalfrequenzgang  $H_K(f)$  entsprechend der nachfolgenden Skizze (a) betrachtet werden. Das bedeutet:  $H_K(f)$  ist nicht symmetrisch um die Trägerfrequenz  $f_T$  und zudem komplex.



Auf der rechten Seite (Skizze b) ist die zu  $H_K(f)$  gehörige Tiefpaßfunktion  $H_{K,TP}(f)$  dargestellt, die nicht mit der Funktion  $H_{MKD}(f)$  gemäß Gl. (1.44) verwechselt werden sollte.

- Welche Bedeutung und Eigenschaften hat die Tiefpaßfunktion  $H_{K,TP}(f)$ ? Wie kann diese aus dem Kanalfrequenzgang  $H_K(f)$  berechnet werden? Welcher Unterschied besteht zwischen Bandpaß-Übertragungsfunktionen und -Spektren, wenn man sie im äquivalenten Basisband beschreibt?
- Was sagt demgegenüber der äquivalente Basisbandfrequenzgang  $H_{MKD}(f)$  gemäß Gl. (1.44) bzw. (1.45) aus? Welche Eigenschaften weist diese Funktion auf?
- Welche der beiden Gleichungen – (1.44) bzw. (1.45) – muß angewandt werden, wenn ein Phasenversatz  $\Delta\varphi_T$  zwischen sende- und empfangsseitigen Trägersignal berücksichtigt werden soll? Begründung.

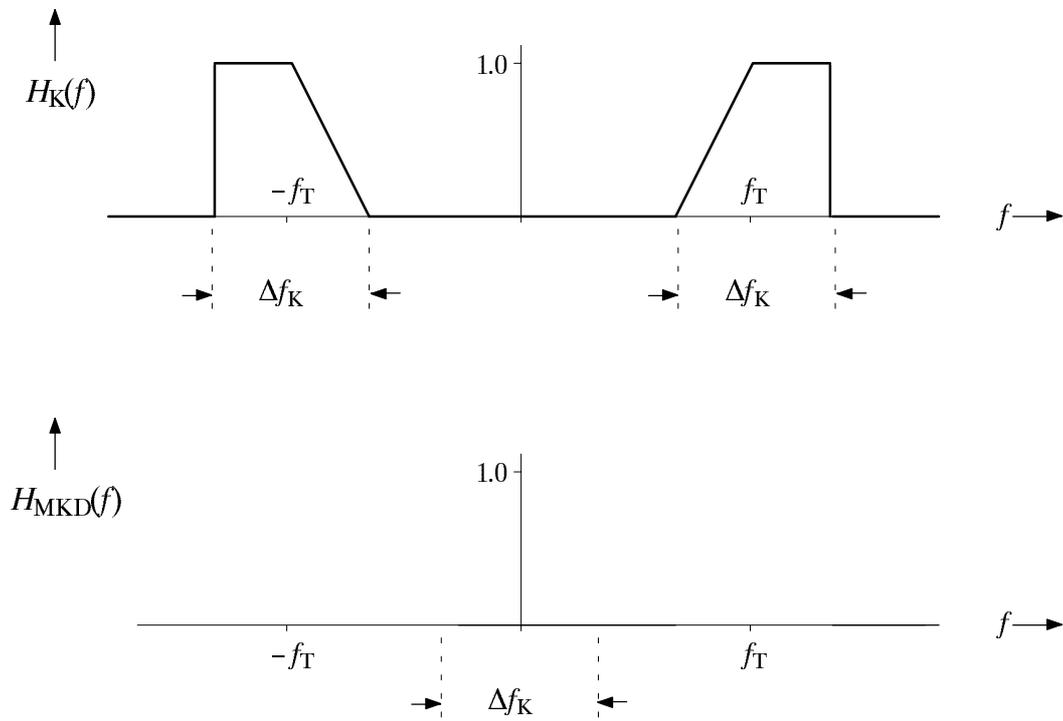
- d) Es sei nun  $\Delta\varphi_T = 0$ . Geben Sie für vorliegende Aufgabenstellung den äquivalenten Basisbandfrequenzgang  $H_{\text{MKD}}(f)$  im interessierenden Tiefpaßbereich an. Skizze.



- e) Wie unterscheiden sich mit obigem Kanalfrequenzgang  $H_K(f)$  die Signale nach dem Synchrondemodulator gegenüber dem Fall, daß  $H_K(f)$  innerhalb der Bandbreite  $\Delta f_K$  konstant gleich 1 und außerhalb gleich 0 ist?

- f) Welche Form müßte der Imaginärteil von  $H_K(f)$  besitzen, damit  $H_{\text{MKD}}(f)$  ebenfalls einen Imaginärteil aufweist?

- g) Geben Sie auch für den nachfolgend skizzierten (rein reellen) Kanalfrequenzgang  $H_K(f)$  die äquivalente Basisbandübertragungsfunktion  $H_{MKD}(f)$  an. Skizze.



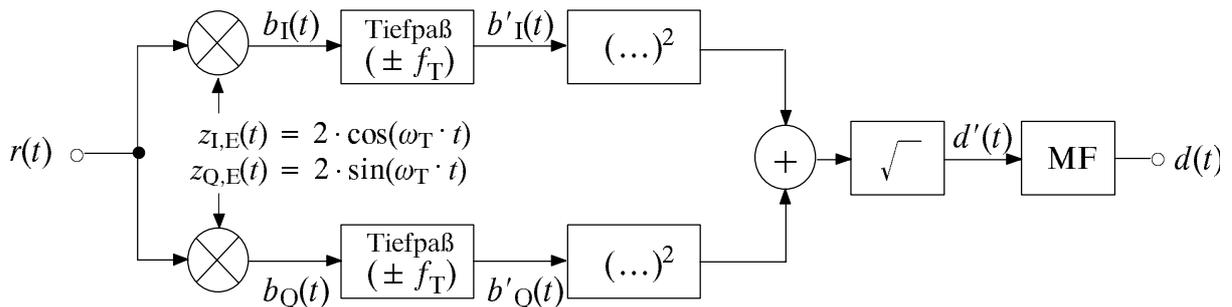
- h) Wie lautet die zu g) gehörige Impulsantwort  $h_{MKD}(t) \circ \bullet H_{MKD}(f)$ ?

## V5 Inkohärente ASK-Demodulation

Synchrondemodulation erfordert stets eine genaue Kenntnis und Nachführung der Trägerphase  $\varphi_T$ . Deshalb werden häufig inkohärente Demodulatoren eingesetzt, die die Rückgewinnung des Nachrichtensignals  $q(t)$  aus dem ASK-Empfangssignal

$$r(t) = q(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T) + n(t) \quad (2.5)$$

ohne Kenntnis von  $\varphi_T$  bewerkstelligen. Die nachfolgende Skizze zeigt eine mögliche Realisierungsform eines inkohärenten Demodulators. In der Versuchsdurchführung D9 wird mit dem Hüllkurvendemodulator eine zweite Variante vorgestellt.



- a) Berechnen Sie das Signal  $d'(t)$  vor dem Matched-Filter ohne Berücksichtigung des Rauschens  $n(t)$ . *Hinweis:* Die Gl. (2.5) sagt unter anderem aus, daß bei dieser Aufgabe auch keine Kanalverzerrungen zu berücksichtigen sind.

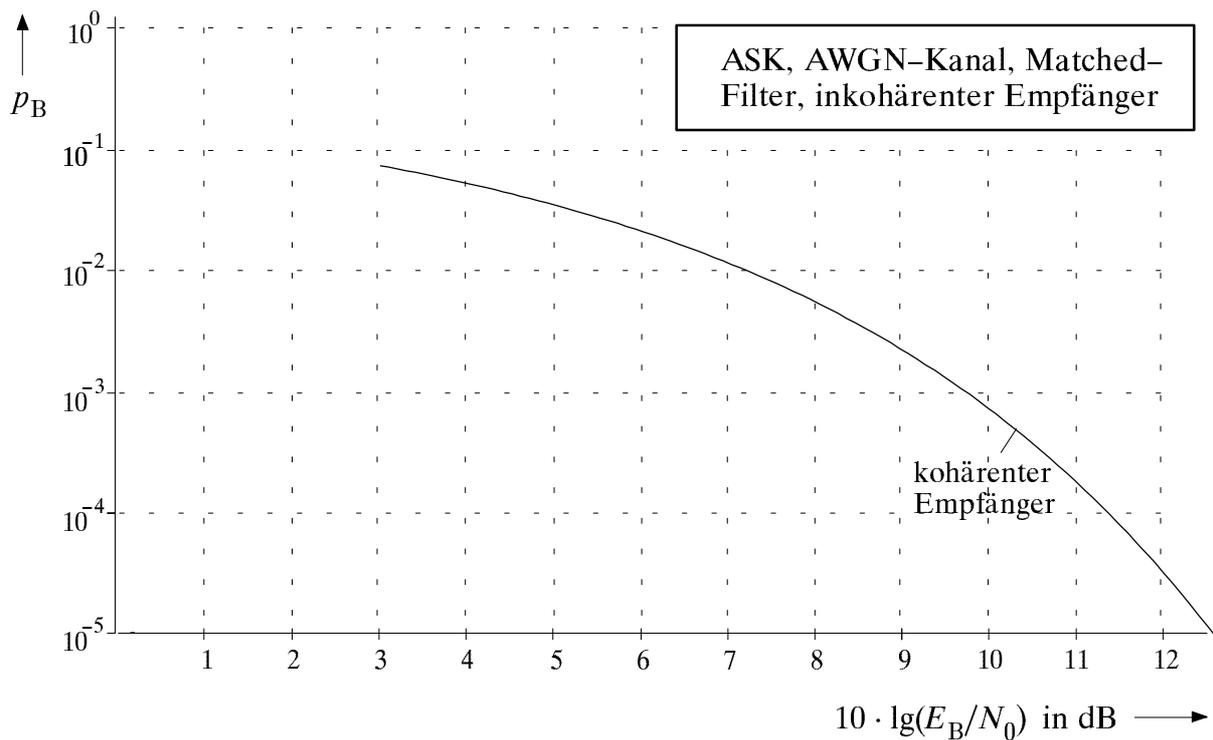
- b) Unter welchen Bedingungen gilt  $d'(t) = q(t)$ ?

c) Skizzieren Sie für die obige Anordnung das äquivalente Tiefpaßmodell.

d) In [3] ist die Bitfehlerwahrscheinlichkeit des obigen inkohärenten Empfängers wie folgt angegeben:

$$p_B = \frac{1}{2} \cdot e^{-E_B/(2N_0)} . \quad (2.6)$$

Skizzieren Sie diesen Kurvenverlauf in das nachfolgende Diagramm. Bereits eingezeichnet ist die Bitfehlerwahrscheinlichkeitskurve des kohärenten Empfängers.



e) Wie groß ist für Bitfehlerwahrscheinlichkeiten kleiner als  $10^{-3}$  der Störabstandsverlust aufgrund der inkohärenten Demodulation?

### 3 Versuchsdurchführung

#### D1 Untersuchungen zum Basisbandsystem

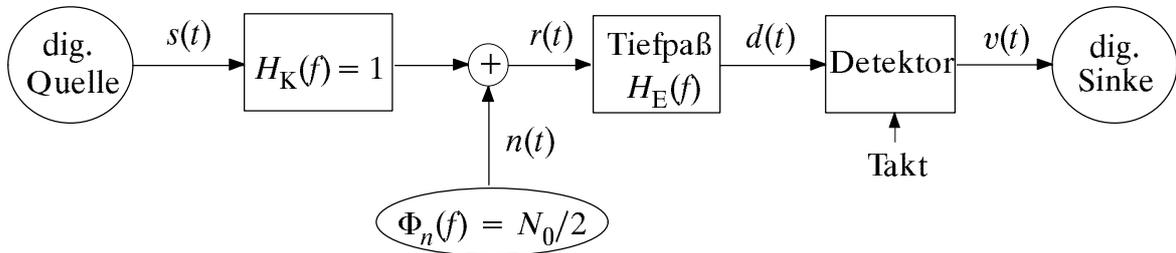


Bild 3.1: Blockschaltbild eines Basisbandübertragungssystems für den AWGN-Kanal.

Zunächst soll mit dem Programm "dmv" die Basisbandübertragung entsprechend Bild 3.1 betrachtet werden. Mit dem "Standardsystem BB (unipolar)" sind dabei eingestellt:

- ein unipolares rechteckförmiges Sendesignal  $s(t)$ , normiert auf die Amplitude  $s_0 = 1$ ,
  - AWGN-Kanal ( $H_K(f) = 1$ ,  $\Phi_n(f) = N_0/2$ ), gekennzeichnet durch " $E_B/N_0$ " = 12 dB,
  - $H_E(f) = H_{MF}(f)$ , d.h. das Empfangsfilter ist an die Gegebenheiten optimal angepaßt,
  - Schwellenwertentscheider, Schwelle  $E$  und Detektionszeitpunkt  $T_D$  jeweils optimal.
- a) Betrachten Sie die Signale  $s(t)$ ,  $n(t)$ ,  $r(t)$ ,  $d(t)$  und  $v(t)$  und beschreiben Sie diese verbal.

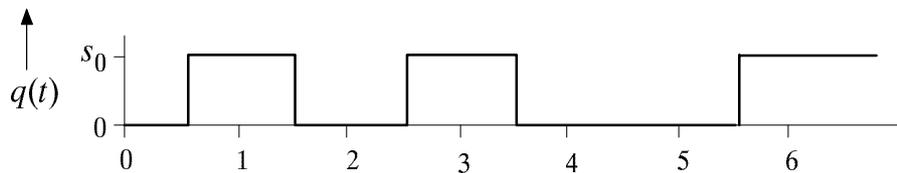
- b) Betrachten und beschreiben Sie die Augendiagramme für  $E_B/N_0 = 12$  dB, und zwar mit und ohne Störungen (Menüpunkt 3). Wie groß ist die vom Programm ausgegebene Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$ ? Tragen Sie auch die anderen Ausgabewerte in die nachfolgende Tabelle ein. Interpretieren Sie diese Ergebnisse.

*Hinweis:* Alle nachfolgenden Versuche können Sie entweder mit dem Menüpunkt "A" oder dem Menüpunkt "F" bearbeiten. Ersterer liefert ein schnelleres Ergebnis für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit, letzterer mehr Informationen über das Augendiagramm.

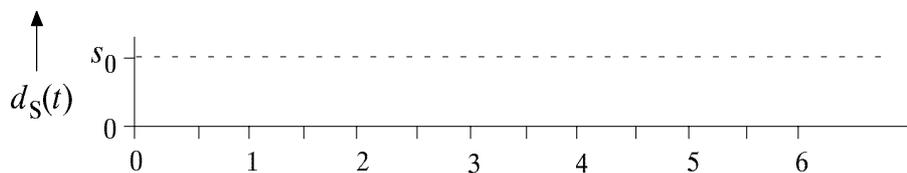
$10 \cdot \lg(E_B/N_0)$	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(Q_d)$
12 dB (Punkt b)				
6 dB (Punkt e)				

- c) Bei rechteckförmigen Sendeimpulsen und dem AWGN-Kanal kann das Matched-Filter auch als Integrator ("Integrate & Dump") realisiert werden. Zeigen Sie mit dem Programm "dmv", daß man damit die gleiche Bitfehlerwahrscheinlichkeit erhält. Wie unterscheidet sich das Detektionsnutzsignal  $d_S(t)$  gegenüber der Einstellung nach Punkt b)? Skizzieren Sie  $d_S(t)$  in nachfolgende Diagramme. Welche Unterschiede sind anhand des Detektionsstörsignals  $d_N(t)$  festzustellen?

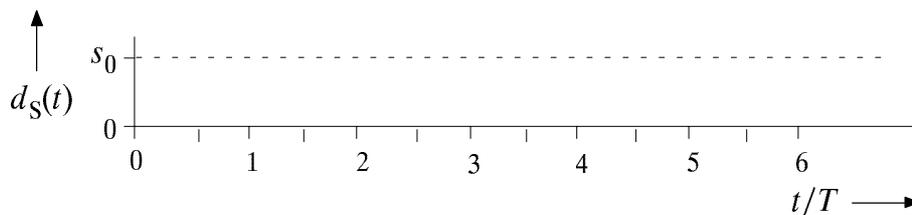
Quellensignal



mit Matched-Filter



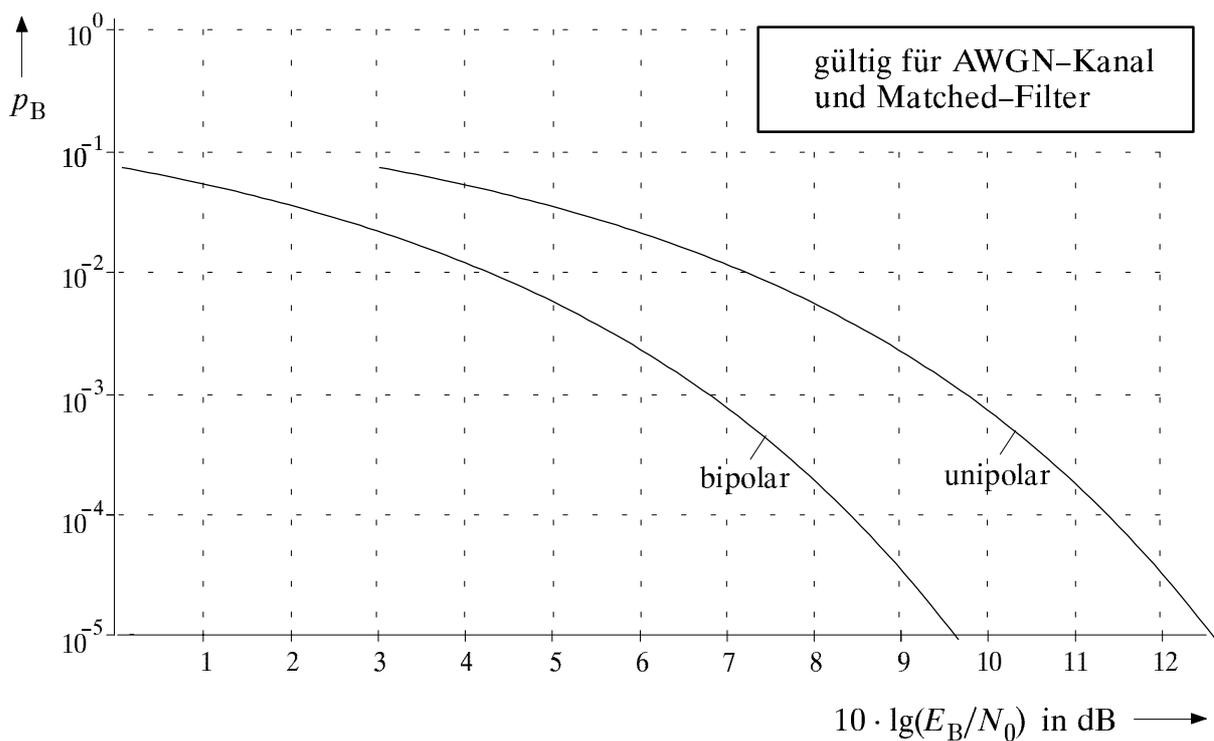
mit Integrator



- d) Welchen Wert sollte die Entscheidungsschwelle besitzen. Berücksichtigen Sie bei Ihrer Antwort die unipolare Signalisierung. Überprüfen Sie den Einfluß der Schwelle auf die (mittlere) Bitfehlerwahrscheinlichkeit, indem Sie  $E$  (normiert auf  $s_0$ ) gegenüber dem Optimum  $E_{opt}$  um 0.1 nach oben verändern.

- e) Wiederholen Sie die Aufgaben von Punkt b) für  $E_B/N_0 = 6$  dB (Menüpunkt "F"). Verändern Sie hierzu die Einstellungen wieder auf "Matched-Filter" und "optimale Schwelle". Ergänzen Sie die Tabelle zu Punkt b) und interpretieren Sie die unterschiedlichen Ergebnisse.

- f) Tragen Sie die Ergebnisse von Punkt b) und e) in das nachfolgende Diagramm ein.



## D2 ASK-System mit Synchrondemodulation

Nun soll das ASK-System (Abschnitt 1.2) mit Hilfe des Programms "dmv" untersucht werden. Verändern Sie Ihre aktuellen Einstellungen hinsichtlich des Modulators ("ASK"), des Demodulators ("Synchron-") und des Empfängers ("Matched-Filter"). Die Trägerfrequenzen seien  $f_T = 4/T$  (normiert 4), die beiden Trägerphasen werden zunächst als gleich angenommen werden ( $\varphi_E = \varphi_T$ ). Für den AWGN-Kanal gelte:  $E_B/N_0 = 12$  dB. Die weiteren Systemparameter sollen gegenüber D1 nicht verändert werden.

- a) Betrachten Sie die Signale  $q(t)$ ,  $s(t)$ ,  $r(t)$ ,  $b(t)$ ,  $d(t)$  und  $v(t)$  und beschreiben Sie diese. Welcher Wert ergibt sich für die optimale Schwelle?

- b) Zeigen Sie für  $E_B/N_0 = 12$  dB bzw. 6 dB, daß dieses ASK-System (innerhalb der Simulationsgenauigkeit) genau die gleiche Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  wie das unipolare Basisbandsystem (vgl. D1(b), (e)) aufweist. Welche Unterschiede gibt es?

$10 \cdot \lg(E_B/N_0)$	$\delta(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(Q_d)$
12 dB				
6 dB				

- c) Es sei  $E_B/N_0 = 12$  dB. Wie wirkt sich eine Phasenabweichung  $\Delta\varphi_T = 30^\circ$  zwischen sende- und empfangsseitigem Trägersignal aus? Der Schwellenwert sei optimal. In welcher Weise wird der optimale Schwellenwert  $E_{\text{opt}}$  von  $\Delta\varphi_T$  beeinflusst?

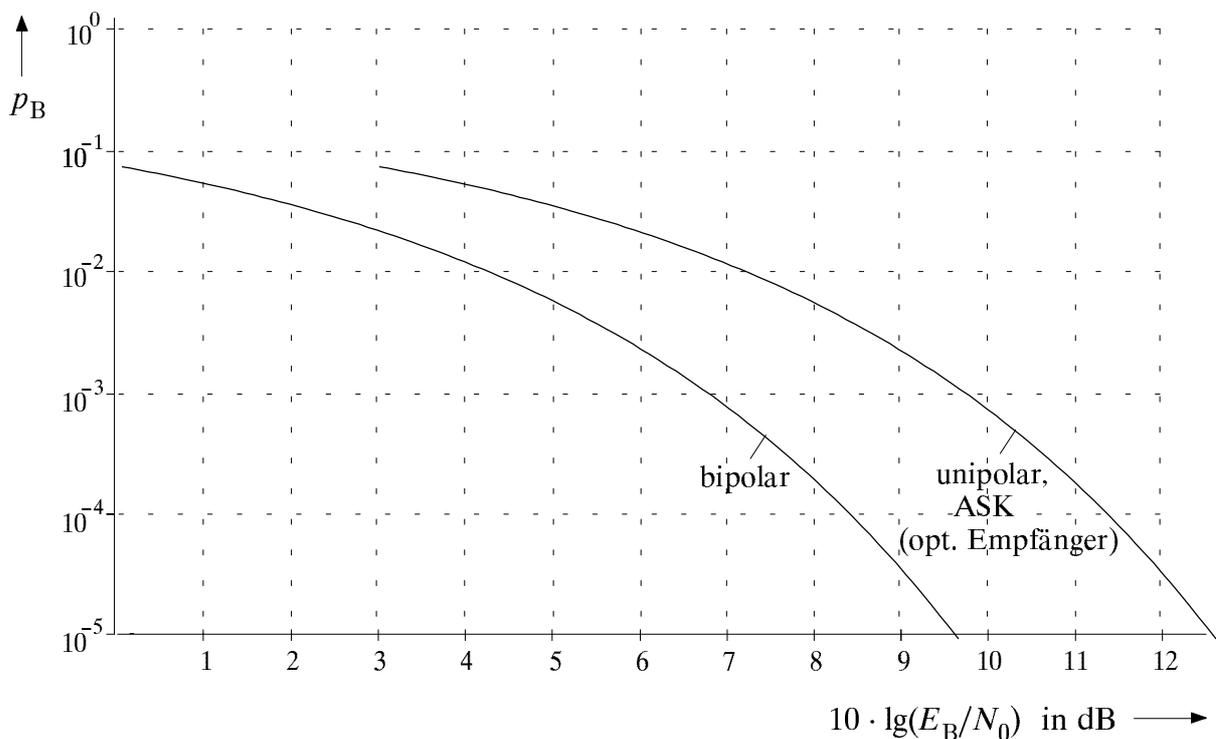
Phasenabweichung	$\delta(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(Q_d)$
$\Delta\varphi_T = 0^\circ$ (Aufgabe b)				
$\Delta\varphi_T = 30^\circ$ (Aufgabe c)				

Im folgenden soll als Empfangsfilter ein Gauß-Tiefpaß mit dem Frequenzgang  $H_E(f)$  gemäß Gl. (1.18) verwendet werden. Die normierte Grenzfrequenz sei  $f_E \cdot T = 0.8$ . Alle anderen Systemparameter seien optimal, z.B. gelte  $\Delta\varphi_T = 0^\circ$  und  $T_D = 0$ . Mit diesem suboptimalen Empfangsfilter  $H_E(f)$  kommt es zu Impulsinterferenzen. Das bedeutet, daß die Detektion eines Symbols von den Nachbarsymbolen beeinflußt wird.

- d) Ermitteln Sie mit dem Programm "dmv" – und zwar für  $E_B/N_0 = 3$  dB, 6 dB, 9 dB und 12 dB – die mittlere und die ungünstigste Bitfehlerwahrscheinlichkeit ( $p_B$  bzw.  $p_U$ ) dieses suboptimalen ASK-Systems.

$10 \cdot \lg(E_B/N_0)$	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(Q_d)$	$p_U$	$10 \cdot \lg(Q_U)$
3 dB						
6 dB						
9 dB						
12 dB						

- e) Tragen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeitskurven (sowohl  $p_B$  als auch  $p_U$ ) in das nachfolgende Diagramm ein und interpretieren Sie deren Verläufe.



### D3 Untersuchungen zum Rauschen

Untersuchen Sie mit dem Programm "dmv" weiterhin das ASK-System mit Synchronemodulator. Setzen Sie zur Beschreibung des weißen Rauschens  $n(t)$  folgende Parameter:

- $f_M \cdot T = 0$ : Mittenfrequenz von  $\Phi_n(f)$ , hier:  $n(t)$  ist Tiefpaßrauschen;  
 $B_n \cdot T = 20$ : normierte (einseitige) Bandbreite des LDS  $\Phi_n(f)$ ;  
 $10 \cdot \lg(E_B/N_0) = 12$  dB: Signal/Rauschverhältnis.

Aufgrund der relativ großen Bandbreite  $B_n$  kann man  $n(t)$  innerhalb der Simulationsgenauigkeit durchaus als "nicht bandbegrenzt weißes Rauschen" interpretieren. Das bedeutet:  $B_n = 20/T$  kann man mit guter Näherung durch  $B_n \rightarrow \infty$  ersetzen.

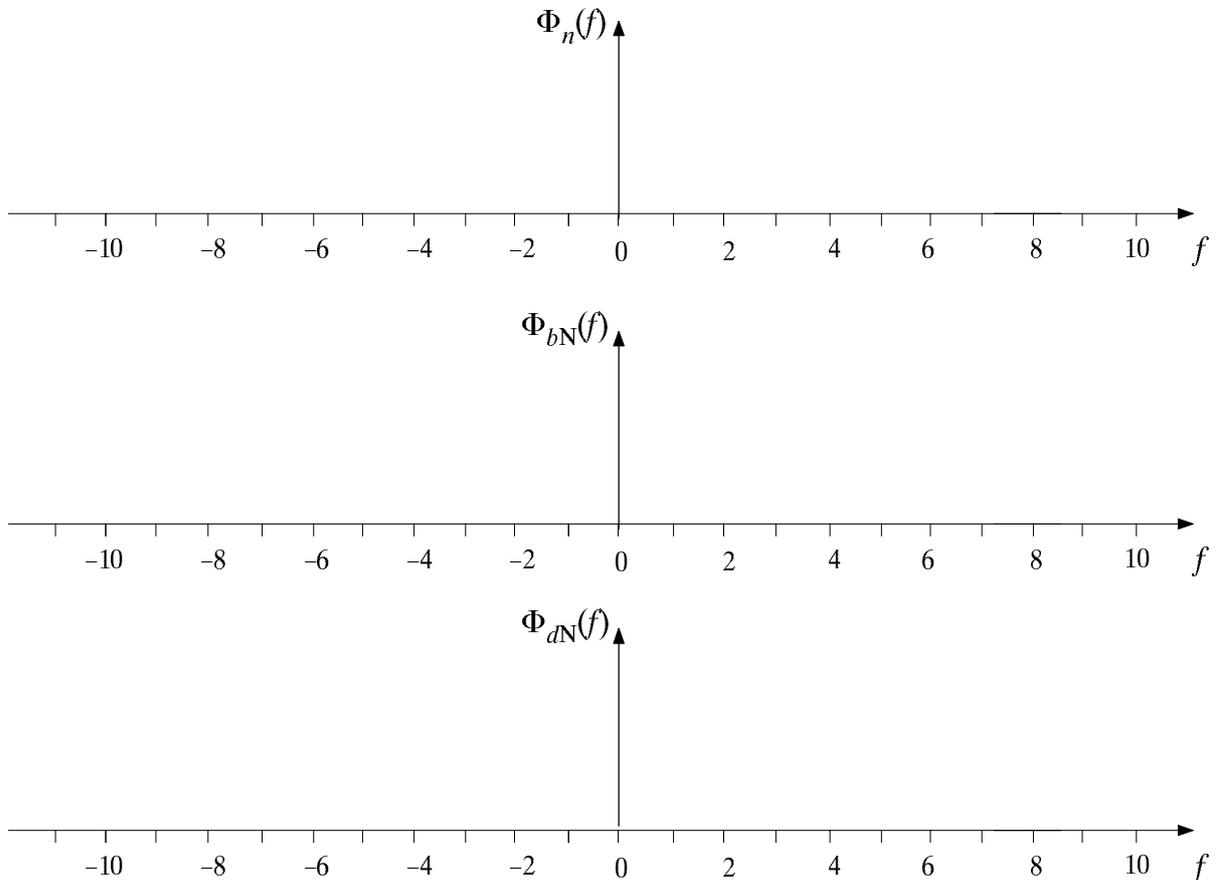
- a) Welchem Wert der Rauschleistungsdichte  $N_0$  entspricht " $E_B/N_0 = 12$  dB" bei ASK, wenn  $N_0$  auf den Wert  $s_0^2 \cdot T$  bezogen ist? Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit dem Menüpunkt "Leistungsdichtespektren". Welchem absoluten  $N_0$ -Wert entspricht diese Rauschleistungsdichte bei  $s_0 = 3V$  (Sendeamplitude) und  $R_B = 2$  Mbit/s (Bitrate)?

- b) Wie groß ist der Effektivwert  $\sigma_n$  des additiven Störsignals  $n(t)$ ? Überprüfen Sie den berechneten Wert auch am Zeitsignalverlauf  $n(t)$ .

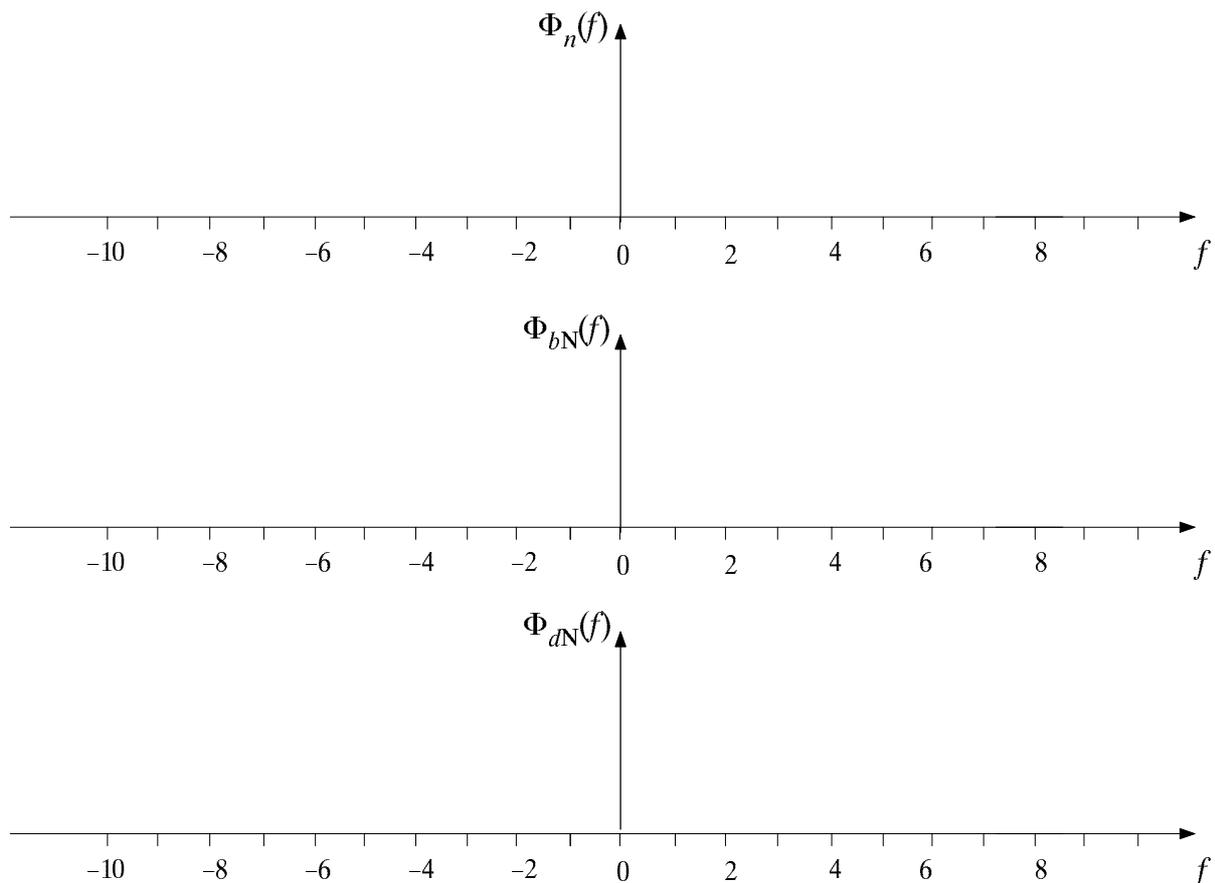
- c) Ermitteln Sie die Streuung  $\sigma_d$  des Störanteils  $d_N(t)$  am Entscheider sowie den Sinkenstörabstand  $10 \cdot \lg(Q_d)$ , und tragen Sie diese Werte in die nachfolgende Tabelle ein. Betrachten Sie dabei sowohl den optimalen Empfänger (z.B. Matched-Filter) als auch den suboptimalen Empfänger mit gaußförmigem Empfangsfilter (normierte Grenzfrequenz:  $f_E \cdot T = 0.8$ ). Entscheidungsschwelle und Detektionszeitpunkt seien jeweils optimal. Überprüfen Sie die durch Simulation ermittelten Werte mit den analytischen Formeln von Abschnitt 1.1.2.

	optimaler Empfänger			Empfänger mit Gauß-Tiefpaß		
	$\frac{\sigma_d}{s_0}$ (anal.)	$\frac{\sigma_d}{s_0}$ ("dmv")	$10 \cdot \lg(Q_d)$	$\frac{\sigma_d}{s_0}$ (anal.)	$\frac{\sigma_d}{s_0}$ ("dmv")	$10 \cdot \lg(Q_d)$
$B_n \cdot T = 20$ ( $f_M \cdot T = 0$ )						
$B_n \cdot T = 6$ ( $f_M \cdot T = 4$ )	—			—		

d) Betrachten Sie nun – weiterhin für  $E_B/N_0 = 12$  dB – ein bandpaßförmiges Rauschen mit der (normierten) Mittenfrequenz  $f_M \cdot T = 4$  und der (normierten) Bandbreite  $B_n \cdot T = 6$ . Stellen Sie die Leistungsdichtespektren  $\Phi_n(f)$ ,  $\Phi_{bN}(f)$  und  $\Phi_{dN}(f)$  der einzelnen Störanteile dar (Skizze für Matched-Filter). Wie groß ist nun der Effektivwert  $\sigma_n$  des additiven Störsignals  $n(t)$ ? Überprüfen Sie diesen Wert am Zeitsignalverlauf.



- e) Ermitteln Sie für diese Konfiguration analog zu Punkt c) die Streuung  $\sigma_d$  des Störanteils  $d_N(t)$  am Entscheider und tragen Sie die Werte in die Tabelle zu Punkt c) ein. Betrachten Sie wieder den optimalen Empfänger (z.B. Matched-Filter) und den suboptimalen Empfänger mit gaußförmigen Empfangsfilter ( $f_E \cdot T = 0.8$ ). Interpretieren Sie die Ergebnisse.
- f) Wählen Sie nun wieder das ASK-System mit Matched-Filter. Vergleichen Sie bei konstanter Rauschbandbreite ( $B_n \cdot T = 3$ ) die Auswirkungen eines tiefpaßförmigen Rauschsignals ( $f_M \cdot T = 0$ ) gegenüber dem Bandpaß-Rauschen ( $f_M \cdot T = 4$ ). Betrachten Sie hierbei für beide Konfigurationen die Zeitsignale  $n(t)$  und  $d(t)$ , die nachfolgend aufgeführten Leistungsdichtespektren sowie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit.



## D4 Untersuchungen am FSK-System

Betrachten Sie nun das FSK-System mit dem Zweiwege-Empfänger. Wählen Sie hierzu im Programm "dmv" das "Standardsystem FSK" (Menüpunkt 2) mit den Modulationsfrequenzen  $f_1 = 5/T$  und  $f_0 = 3/T$  sowie den weiteren Systemparametern entsprechend Versuch D2. In beiden Zweigen wird jeweils frequenz- und phasenrichtig synchrondemoduliert, so daß in den beiden Zweigen auf die Bandpaßfilter verzichtet werden kann. Das Tiefpaßfilter vor dem Schwellenwertentscheider ist gaußförmig ( $f_E \cdot T = 0.8$ ).

a) Wie ändern sich die Signale gegenüber der ASK?

b) Welchen Wert hat bei FSK die optimale Schwelle?

$$E_{\text{opt}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

c) Ermitteln Sie mit dem Programm "dmv" für  $E_B/N_0 = 12$  dB die mittlere und die ungünstigste Bitfehlerwahrscheinlichkeit ( $p_B$  bzw.  $p_U$ ) dieses FSK-Systems. Tragen Sie in nachfolgende Tabelle zum Vergleich auch die Werte des entsprechenden ASK-Standardsystems ein und interpretieren Sie die Unterschiede und Gemeinsamkeiten. *Hinweis:* Hier und im folgenden gelte  $f_M \cdot T = 4$ ,  $B_n \cdot T = 6$  und  $10 \cdot \lg(E_B/N_0) = 12$  dB.

	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(Q_d)$	$p_U$	$10 \cdot \lg(Q_U)$
FSK (D4c)						
ASK (D2d)						



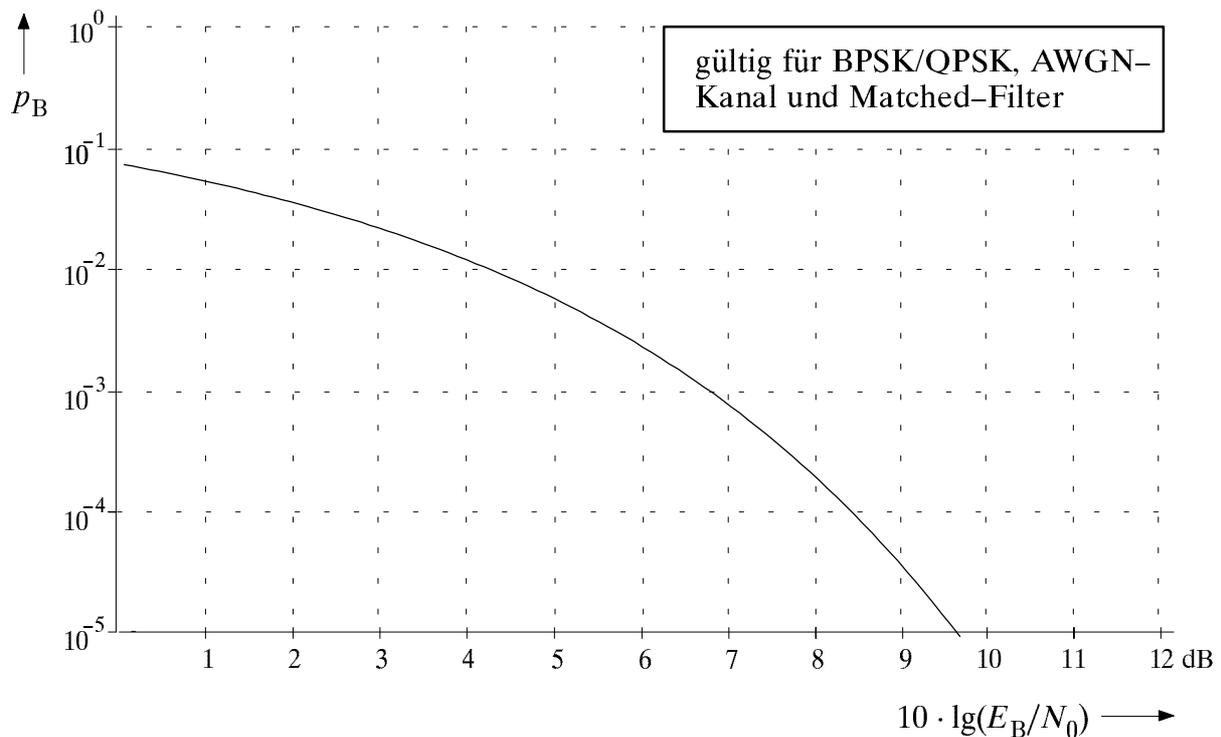
## D6 BPSK-System

Arbeiten Sie weiterhin mit dem "Standardsystem BPSK" des Programms "psk". Damit ist folgendes Übertragungssystem voreingestellt:

- binäre Phasenumtastung (BPSK) mit der (normierten) Trägerfrequenz  $f_T \cdot T = 4$ ,
  - AWGN-Kanal mit  $f_M \cdot T = 4$ ,  $B_n \cdot T = 6$ ,  $E_B/N_0 = 9$  dB,
  - kein Bandpaß am Empfängereingang,
  - phasenrichtige Synchrondemodulation mit  $f_T' \cdot T = 4$ ,
  - Gauß-Tiefpaß  $H_E(f)$  mit (normierter) Grenzfrequenz  $f_E \cdot T = 0.8$ ,
  - optimale Schwelle  $E_{\text{opt}} = 0$ , optimaler Detektionszeitpunkt  $T_{D,\text{opt}} = 0$ .
- a) Betrachten Sie die Signale  $q(t)$ ,  $s(t)$ ,  $n(t)$ ,  $r(t)$ ,  $b(t)$ ,  $d(t)$  und  $v(t)$  an den verschiedenen Punkten des Blockschaltbildes und beschreiben Sie die wesentlichen Unterschiede zur ASK. Welche Trägerphase wird im Programm "psk" verwendet?
- b) Die mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  in Abhängigkeit des AWGN-Quotienten  $E_B/N_0$  – gültig für einen optimalen Empfänger mit Matched-Filter oder Integrator – ist durch Gl. (1.43) gegeben und im Diagramm auf der nächsten Seite dargestellt. Das Signalstörleistungsverhältnis beträgt somit  $\rho_d \approx 2 \cdot E_B/N_0$ . Überprüfen Sie diesen Wert mit dem Programm für  $E_B/N_0 = 9$  dB und das Matched-Filter. Interpretieren Sie das Ergebnis.
- c) Ermitteln Sie mit dem Programm "psk" – und zwar für  $E_B/N_0 = 3$  dB, 6 dB und 9 dB – die mittlere und die ungünstigste Bitfehlerwahrscheinlichkeit ( $p_B$  bzw.  $p_U$ ) des suboptimalen BPSK-Systems mit Gauß-Tiefpaß ( $f_E \cdot T = 0.8$ ). Alle anderen Parameter seien entsprechend obiger Zusammenstellung optimal.

$10 \cdot \lg(E_B/N_0)$	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\varrho_d)$	$p_U$	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$
3 dB						
6 dB						
9 dB						

- d) Tragen Sie die in Punkt c) ermittelten Werte der mittleren und der ungünstigsten Bitfehlerwahrscheinlichkeit ( $p_B$  bzw.  $p_U$ ) in das nachfolgende Diagramm ein und interpretieren Sie die Kurven sowohl im Vergleich zum optimalen BPSK-System (vgl. Versuch D6b) als auch zum suboptimalen ASK-System (vgl. Versuch D2d).



- e) Zeigen Sie an einem Beispiel (z.B.  $E_B/N_0 = 9$  dB, suboptimaler Empfänger), daß das BPSK-System mit Synchrondemodulator genau die gleichen Eigenschaften aufweist wie das entsprechende bipolare Basisbandsystem. *Hinweis:* Vergessen Sie hierbei allerdings nicht, die Mittenfrequenz des weißen Rauschens auf  $f_M = 0$  zu setzen.

## D7 Quaternäre Phasenumtastung

Wählen Sie nun das "Standardsystem 4QAM (QPSK)" mit den Parametern entsprechend der Voreinstellung ( $T$  bezeichnet die Symboldauer der Signale nach dem S/P-Wandler):

- 4QAM-System gemäß Bild 1.21 mit der (normierten) Trägerfrequenz  $f_T \cdot T = 4$ ,
  - AWGN-Kanal mit  $f_M \cdot T = 4$ ,  $B_n \cdot T = 6$ ,  $E_B/N_0 = 9$  dB,
  - phasenrichtige Synchrondemodulation mit  $f_T \cdot T = 4$ , kein Bandpaß,
  - Gauß-Tiefpaß  $H_E(f)$  mit (normierter) Grenzfrequenz  $f_E \cdot T = 0.8$ ,
  - optimale Schwelle  $E_{\text{opt}} = 0$ , optimaler Detektionszeitpunkt  $T_{D,\text{opt}} = 0$ .
- a) Betrachten Sie alle Signale an den verschiedenen Punkten des Blockschaltbildes und beschreiben Sie die wesentlichen Unterschiede zur BPSK. Wählen Sie für diesen Unterpunkt ein vernachlässigbar kleines Rauschsignal ( $E_B/N_0 = 80$  dB).
- b) Setzen Sie wieder  $E_B/N_0 = 9$  dB und betrachten Sie die Leistungsdichtespektren. Wie groß ist insbesondere  $\Phi_n(f)$  im Vergleich zur BPSK?
- c) Ermitteln Sie mit dem Programm "psk" für  $E_B/N_0 = 9$  dB die mittlere und die ungünstigste Bitfehlerwahrscheinlichkeit ( $p_B$  bzw.  $p_U$ ) des 4QAM-Systems und vergleichen Sie diese mit den Ergebnissen bei BPSK (vgl. D6c). Wählen Sie hierzu wieder den Gauß-Tiefpaß mit  $f_E \cdot T = 0.8$ . Alle anderen Parameter seien optimal, insbesondere gelte  $\Delta\varphi_T = 0^\circ$  (d.h. ideale Phasensynchronisation).

$\Delta\varphi_T = 0^\circ$	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(q_d)$	$p_U$	$10 \cdot \lg(q_U)$
BPSK (vgl. D6c)						
4QAM						

- d) Betrachten Sie auch die Phasendiagramme bei BPSK und 4QAM. Interpretieren Sie letzteres mit der Entscheidungsregel der QPSK. Führen Sie diesen Versuch außer mit  $E_B/N_0 = 9$  dB auch für  $E_B/N_0 = 3$  dB (sehr starke Störungen) sowie  $E_B/N_0 = 80$  dB (quasi-rauschfrei) durch. Woran erkennt man den Einfluß von Impulsinterferenzen?

- e) Es sei nun  $E_B/N_0 = 9$  dB. Ermitteln Sie die mittlere und die ungünstigste Fehlerwahrscheinlichkeit ( $p_B$  bzw.  $p_U$ ) von BPSK- und 4QAM-Systemen für den Fall, daß zwischen dem sende- und empfangsseitigen Trägersignal eine Phasendifferenz von  $\Delta\varphi_T = 30^\circ$  besteht. Interpretieren Sie die Ergebnisse anhand des Phasendiagramms.

$\Delta\varphi_T = 30^\circ$	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(q_d)$	$p_U$	$10 \cdot \lg(q_U)$
BPSK						
4QAM						

- f) Wie wird das Sinkensignal  $v(t)$  bei einer Phasenabweichung von  $90^\circ$  verfälscht? Betrachten Sie hierzu auch jeweils die Phasendiagramme bei BPSK und 4QAM.
- g) Nur wenn Sie noch Zeit und Lust haben sollten: Wählen Sie nun einen Sinusstörer und versuchen Sie, durch geeignete Wahl der Systemparameter (Störfrequenz, Störampplitude, TP-Grenzfrequenz) die schönsten Störmuster im Phasendiagramm zu erhalten.

## D8 Zweiwegekanal

Bisher wurde der Kanalfrequenzgang stets als ideal angenommen:  $H_K(f) = 1$ . Nun soll der im Abschnitt 1.4.6 beschriebene Zweiwegekanal untersucht werden. Dabei werden die weiteren Systemeinstellungen von D6 beibehalten ("Standardsystem BPSK"). Die Parameter des Zweiwegekanals seien wie im Programm "psk" voreingestellt:

$\tau/T = 0.63$  (relative Verzögerungszeit des zweiten Ausbreitungsweges),

$f_{\text{Notch}}/T = 0.28$  (Notch-Frequenz, bezogen auf die Bitfrequenz),

$\alpha_0 = 1$  (frequenzunabhängiger Dämpfungsfaktor),

$\alpha_\tau = 0.4$  (Amplitude der reflektierten Welle).

- a) Betrachten Sie die BPSK-Signale im quasi-rauschfreien Fall ( $E_B/N_0 = 80$  dB). Beschreiben Sie die wesentlichen Unterschiede zum idealen Kanal ( $H_K(f) = 1$ ).

b) Betrachten Sie auch die Leistungsdichtespektren der Nutzsignale  $\Phi_s(f)$ ,  $\Phi_{rS}(f) = \Phi_k(f)$ ,  $\Phi_{bS}(f)$  und  $\Phi_{dS}(f)$ . Wie wurden diese durch den Zweiwegekanal verändert?

c) Geben Sie die mittlere die ungünstigste Bitfehlerwahrscheinlichkeit ( $p_B$  bzw.  $p_U$ ) für das BPSK-System mit gaußförmigem Empfangsfilter ( $f_E \cdot T = 0.8$ ) an, und zwar für  $E_B/N_0 = 9$  dB. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem idealen Kanal (Versuch D6c).

Kanal	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(Q_d)$	$p_U$	$10 \cdot \lg(Q_U)$
ideal (vgl. D6c)						
Zweiwege- Kanal						

## D9 Inkohärente Demodulation bei ASK und FSK

Zum Abschluß dieses Praktikumsversuchs "Digitale Modulationsverfahren" betrachten wir inkohärente Demodulatoren. Darunter versteht man Empfangseinrichtungen, die ohne Kenntnis der Trägerphase von  $z(t)$  das Sinkensignal  $v(t)$  aus dem Empfangssignal  $r(t)$  rekonstruieren können (vgl. Vorbereitungsfrage V5). Bild 3.2 zeigt mit dem Hüllkurvendemodulator eine mögliche Realisierungsform eines inkohärenten Demodulators. Dieser Demodulator kann allerdings nur bei ASK und FSK eingesetzt werden – nicht jedoch bei PSK – und setzt weiter voraus, daß die Störungen am Eingang bereits durch einen Bandpaß begrenzt werden. Das Eingangssignal ist dementsprechend das Signal  $r_B(t)$ .

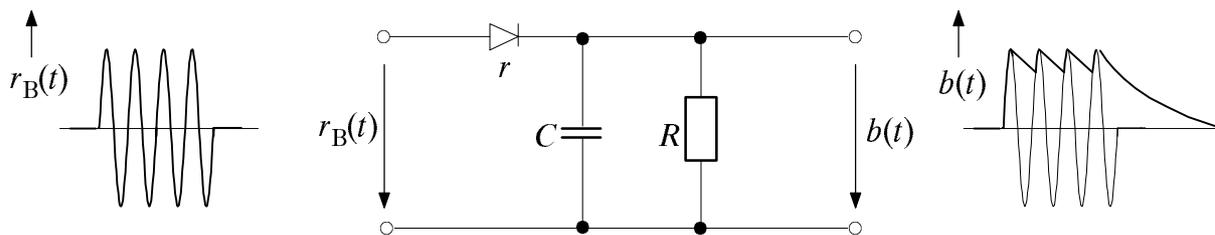


Bild 3.2: Im Programm modellierter Hüllkurvendemodulator und zugehörige Signale.

Dieser Demodulator besteht aus einer Diode mit dem differentiellen Widerstand  $r \ll R$  und einem parallel geschalteten RC-Glied. Solange das Eingangssignal  $r_B(t)$  größer als das Ausgangssignal  $b(t)$  ist, lädt sich die Kapazität  $C$  über die relativ kleine Zeitkonstante  $T_{\text{ein}} = r \cdot C$  auf. In diesem Bereich folgt das Ausgangssignal  $b(t)$  dem Eingangssignal  $r_B(t)$ . Wird dagegen  $r_B(t)$  kleiner als  $b(t)$ , so sperrt die Diode, und  $C$  entlädt sich mit der deutlich größeren Zeitkonstanten  $T_{\text{aus}} = R \cdot C$  über den Widerstand  $R$  exponentiell.

Starten Sie das Programm "dmv" mit dem Menüpunkt "Standardsystem ASK" wieder neu. Folgendes Übertragungssystem ist damit gesetzt:

- ASK mit (normierter) Trägerfrequenz  $f_T \cdot T = 4$ ,
- AWGN-Kanal mit  $f_M \cdot T = 4$ ,  $B_n \cdot T = 6$ ,  $E_B/N_0 = 12$  dB,
- kein Bandpaß am Empfängereingang,
- phasenrichtige Synchrondemodulation mit  $f_T \cdot T = 4$ ,
- Gauß-Tiefpaß  $H_E(f)$  mit (normierter) Grenzfrequenz  $f_E \cdot T = 0,8$ ,
- optimale Schwelle  $E_{\text{opt}} = 0,25$ , optimaler Detektionszeitpunkt  $T_{D,\text{opt}} = 0$ .

- a) Ermitteln Sie mit dem Programm "dmv" die mittlere und die ungünstigste Bitfehlerwahrscheinlichkeit ( $p_B$  bzw.  $p_U$ ) dieses ASK-Systems mit Synchrondemodulation. *Hinweis:* Verwenden Sie hier den Menüpunkt "F"; im Versuch D2d haben Sie den gleichen Versuch bereits mit dem Menüpunkt "A" durchgeführt.

	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\varrho_d)$	$p_U$	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$
Synchron-Demodul.						

- (b) Ersetzen Sie nun den Synchrondemodulator durch den Hüllkurvendemodulator gemäß Bild 3.2 mit den Parametern  $T_{\text{ein}} = 0.05 \cdot T$  und  $T_{\text{aus}} = 0.25 \cdot T$  und ermitteln Sie mit dem Programm "dmv" (Menüpunkt "F") die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$ . Alle anderen Systemparameter seien wie unter Punkt a). Interpretieren Sie das Ergebnis, auch anhand der Zeitsignalverläufe.

	mit eingestellter Schwelle $E = 0.25$		mit opt. Schwelle $E_{\text{opt}} = \dots\dots$	
	$p_B$	$10 \cdot \lg(Q_d)$	$p_B$	$10 \cdot \lg(Q_d)$
HKD ohne BP				

*Hinweis:* Die Simulationsergebnisse von "dmv" bei Verwendung des Hüllkurvendemodulators können je nach Startwert deutlich differieren. Dies hängt u.a. damit zusammen, daß bei dieser Konstellation lediglich über 320 Augenlinien gemittelt wird. Alle Ergebnisse sind somit lediglich qualitativ zu verstehen.

- c) Die im Punkt b) festgestellte Degradation läßt sich deutlich vermindern, wenn die Rauschstörungen  $n(t)$  am Empfängereingang bereits durch einen (gaußförmigen) Bandpaß begrenzt werden. Wählen Sie die normierte Grenzfrequenz dieses Gauß-Bandpasses zu  $f_B \cdot T = 0.8$  (Mittenfrequenz  $f_M \cdot T = 4$ ) und ermitteln Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$ . Die Grenzfrequenz des nachfolgenden Gauß-Tiefpasses sei weiterhin  $f_E \cdot T = 0.8$ .

	mit eingestellter Schwelle $E = 0.25$		mit opt. Schwelle $E_{\text{opt}} = \dots\dots$	
	$p_B$	$10 \cdot \lg(Q_d)$	$p_B$	$10 \cdot \lg(Q_d)$
HKD mit BP				

- (d) Tragen Sie die anderen vom Programm "dmv" ausgegebenen Werte in nachfolgende Tabelle ein. Diese haben folgende Bedeutung: Die inneren Begrenzungen des Augendiagramms ohne Störungen zum Detektionszeitpunkt  $T_D$  sind  $o(T_D)$  und  $u(T_D)$ . Damit gilt für die vertikale Augenöffnung:  $\delta(T_D) = o(T_D) - u(T_D)$ . Durch das Rauschen  $n(t)$  werden nun die oberen Augenlinien im Mittel um  $m_o$  nach oben verschoben, die Streuung der einzelnen Abtastwerte beträgt  $\sigma_o$  (alle diese Werte sind auf  $s_0$  normiert zu verstehen). Entsprechend wird mit  $m_u$  der Mittelwert der Verschiebungen der unteren Augenlinien bezeichnet, während  $\sigma_u$  die dazugehörige Streuung angibt.

$o(T_D)$	$m_o$	$\sigma_o$	$u(T_D)$	$m_u$	$\sigma_u$

Interpretieren Sie diese Zahlenwerte, insbesondere auch im Vergleich zu den Simulationsergebnissen des kohärenten Empfängers gemäß der Teilaufgabe a).

- (e) Interpretieren Sie den optimalen Schwellenwert. Zeigen Sie, daß für diesen gilt:

$$E_{\text{opt}} = \frac{(o(T_D) + m_o) \cdot \sigma_u + (u(T_D) + m_u) \cdot \sigma_o}{\sigma_o + \sigma_u} . \quad (3.1)$$

- (f) Betrachten Sie für die eingestellte Konfiguration mit Hüllkurvendemodulator die Signale  $r(t)$ ,  $r_B(t)$ ,  $b(t)$ ,  $d(t)$  und  $v(t)$  an den verschiedenen Punkten des Empfängers und beschreiben Sie diese. *Hinweis:* Die Wirkungsweise des Hüllkurvendemodulators kann außer mit dem Menüpunkt "Z" auch mit Menüpunkt "H" verdeutlicht werden.

Betrachten Sie nun das FSK-System mit den Modulationsfrequenzen  $f_1 = 5/T$  und  $f_0 = 3/T$ . Aufgrund dieser Modulationsart ist nun (näherungsweise) die Schwelle  $E = 0$  einzustellen. Die Demodulation in den beiden Zweigen des Zweifilter-Empfängers sei im Gegensatz zum Versuch D4 nun inkohärent (Hüllkurvendemodulator).

g) Zeigen Sie anhand der verschiedenen Zeitsignalverläufe und des Augendiagramms, daß der inkohärente Empfänger nach Bild 1.13 völlig versagt, wenn auf die beiden Bandpässe am Empfängereingang verzichtet wird. Warum?

h) Die beiden zur Rauschleistungsbegrenzung erforderlichen (Gauß-)Bandpässe am Empfängereingang seien nun auf die beiden Modulationsfrequenzen  $f_1 = 5/T$  und  $f_0 = 3/T$  abgestimmt. Die beiden Grenzfrequenzen von Bandpaß und Tiefpaß seien gleich:  $f_B \cdot T = 0.8$  (Bandpaß) und  $f_E \cdot T = 0.8$  (Tiefpaß). Beschreiben Sie die Signale.

(i) Ermitteln Sie mit dem Programm "dmv" die mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  dieses FSK-Systems mit inkohärentem Zweifilter-Empfänger, und zwar wieder für  $E_B/N_0 = 12$  dB. Tragen Sie die Ausgabewerte in die nachfolgende Tabelle ein und interpretieren Sie das Ergebnis im Vergleich zur inkohärenten ASK (Unterpunkt c).

mit eingestellter Schwelle $E = 0$		mit opt. Schwelle $E_{\text{opt}} = \dots\dots$	
$p_B$	$10 \cdot \lg(Q_d)$	$p_B$	$10 \cdot \lg(Q_d)$

$o(T_D)$	$m_o$	$\sigma_o$	$u(T_D)$	$m_u$	$\sigma_u$

# 4 Musterlösungen der Vorbereitungsfragen

## V1 Bitfehlerwahrscheinlichkeit

$$a) E_B = s_0^2 \cdot T_B = (4V)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^6} \text{s} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2\text{s} \quad \text{mit } T_B = T$$

$$E_B/N_0 = \frac{8 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2\text{s}}{10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}} = 8 \quad (\text{entspricht } 9.03 \text{ dB})$$

$$p_B = Q(\sqrt{2E_B/N_0}) = Q(4) = 3.17 \cdot 10^{-5}$$

b) Beim AWGN-Kanal besteht der optimale Empfänger aus einem Matched-Filter und einem einfachen Schwellenwertentscheider. Bei rechteckförmigen Sendeimpulsen ist die Impulsantwort des Matched-Filters ebenfalls rechteckförmig. Eine mögliche Realisierungsform hierfür ist ein Integrator (über eine Symboldauer  $T$ ).

c) Mit Näherung (2.1):

$$p_B = \frac{1}{2} \cdot \text{erfc}(\sqrt{E_B/N_0}) = \frac{1}{2} \cdot \text{erfc}(\sqrt{8}) \approx \frac{1}{2 \cdot \sqrt{8\pi}} \cdot e^{-8} = 3.35 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{exakt: } p_B \approx 3.17 \cdot 10^{-5} \quad \underline{\text{Fehler ca. } 5.7 \%} \quad (\text{zu groß})$$

Mit Näherung (2.2):

$$p_B = \frac{1}{2} \cdot \text{erfc}(\sqrt{8}) \approx \frac{1}{2 \cdot \sqrt{8\pi}} \cdot e^{-8} \cdot (1 - \frac{1}{16}) = 3.14 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{exakt: } p_B \approx 3.17 \cdot 10^{-5} \quad \underline{\text{Fehler ca. } (-) 1 \%} \quad (\text{zu klein})$$

Näherung 1 stellt gleichzeitig eine obere Schranke für die BFW dar.

Näherung 2 ist genauer, aber immer kleiner als die tatsächliche BFW.

d) Aus Fehlerwahrscheinlichkeitskurve folgt:  $10 \cdot \lg(E_B/N_0) = 6.75 \text{ dB}$  ( $E_B/N_0 \approx 4.75$ ). Dieser Wert ist gegenüber Punkt a) um ca. den Faktor 1.7 geringer. Daraus folgt, daß die Symboldauer ebenfalls um diesen Faktor geringer sein kann. Also gilt:

$$R_B = 1/T_B = 1.7 \cdot 2 = 3.4 \text{ Mbit/s.}$$

e) Bei gleichem  $E_B/N_0$  ist auch die Bitfehlerwahrscheinlichkeit gleich:  $p_B = 3.17 \cdot 10^{-5}$ . Bei festem  $s_0$  ist die Energie pro Bit bei BPSK nur halb so groß wie bei der Basisbandübertragung. Mit  $s_0 = \sqrt{2} \cdot 4V = 5.657 \text{ V}$  ergibt sich deshalb wieder  $E_B/N_0 = 8$ .

f) Es gelten hinsichtlich Matched-Filter, Detektionsgrundimpuls und -störleistung die gleichen Aussagen wie beim bipolaren Basisbandsystem. Die optimale Entscheidungsschwelle ist nun  $E_{\text{opt}} = g_d(0)/2$ . Die Augenöffnung ist genau halb so groß. Somit gilt:

$$p_B = Q\left(\frac{g_d(0)/2}{\sigma_d}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{s_0^2 \cdot T}{2 \cdot N_0}}\right).$$

g)  $N_0$  muß nun um den Faktor 4 kleiner sein, also gilt:  $N_0 = 0.25 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}$ .

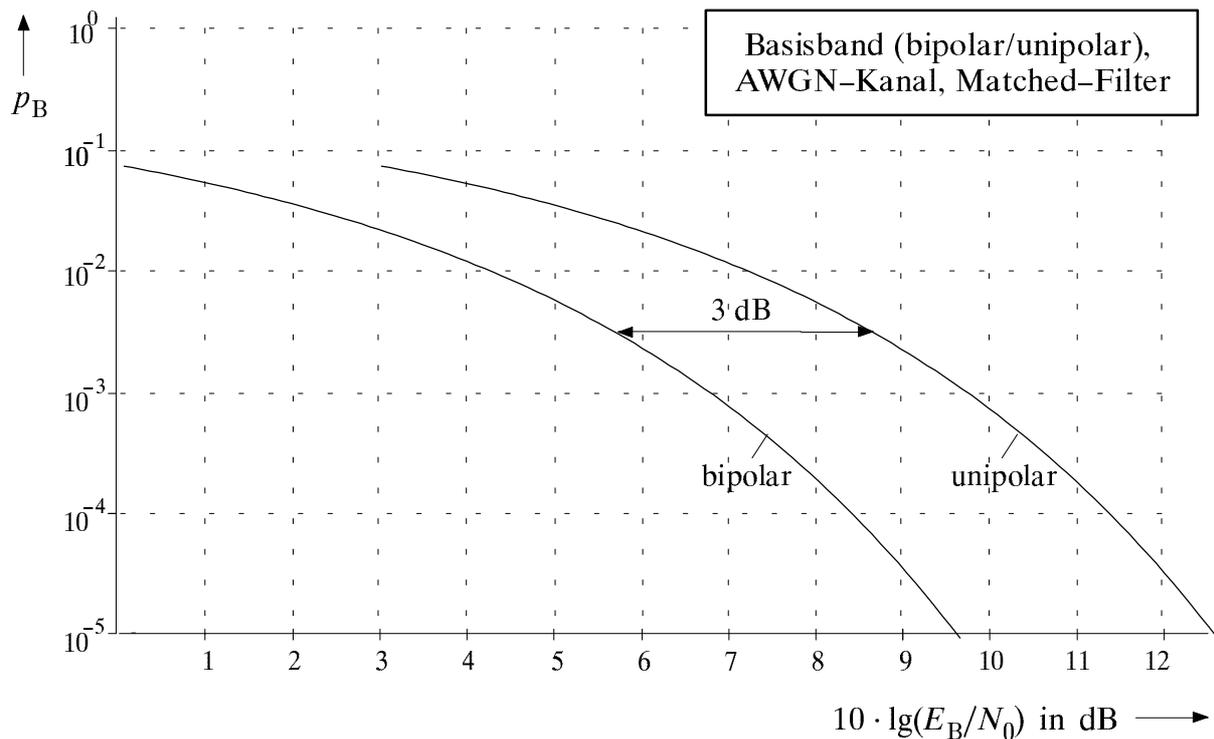
h) Hier gilt:

$$E_B = \frac{1}{2} \cdot s_0^2 \cdot T$$

Daraus folgt:

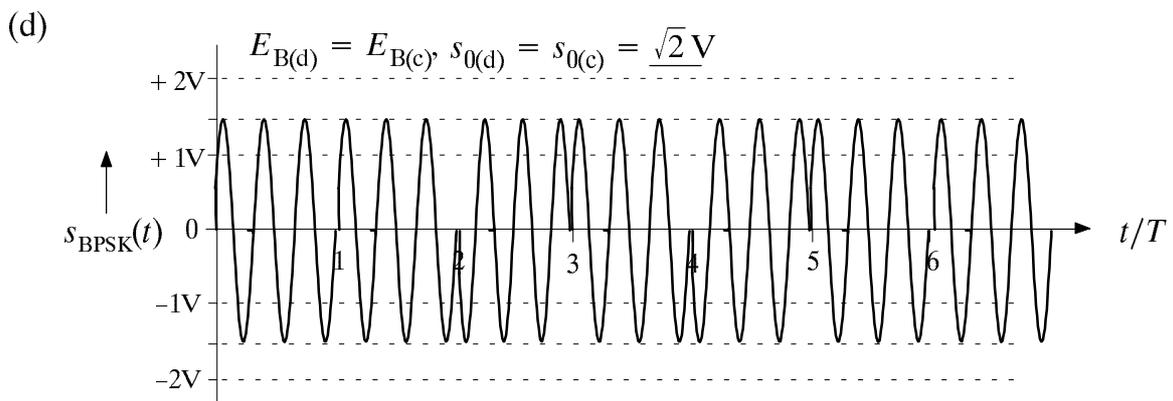
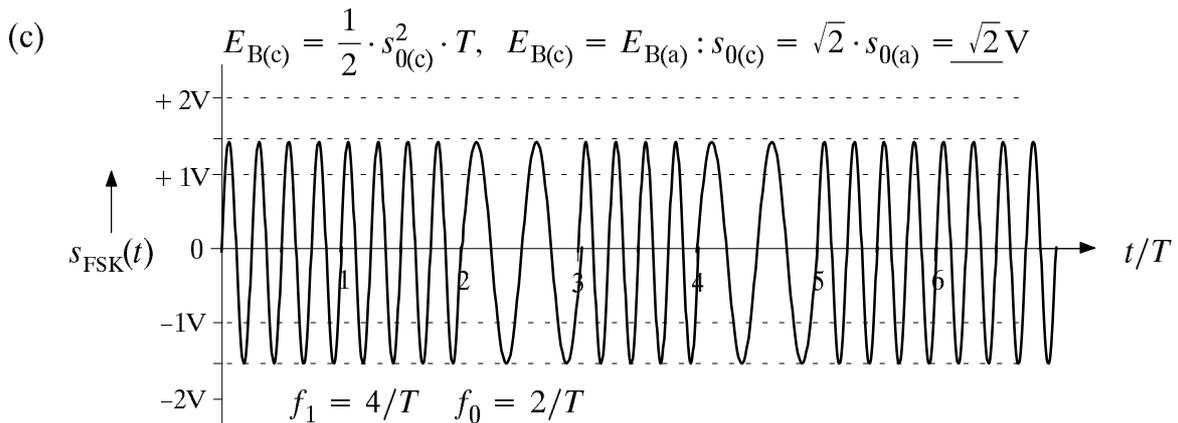
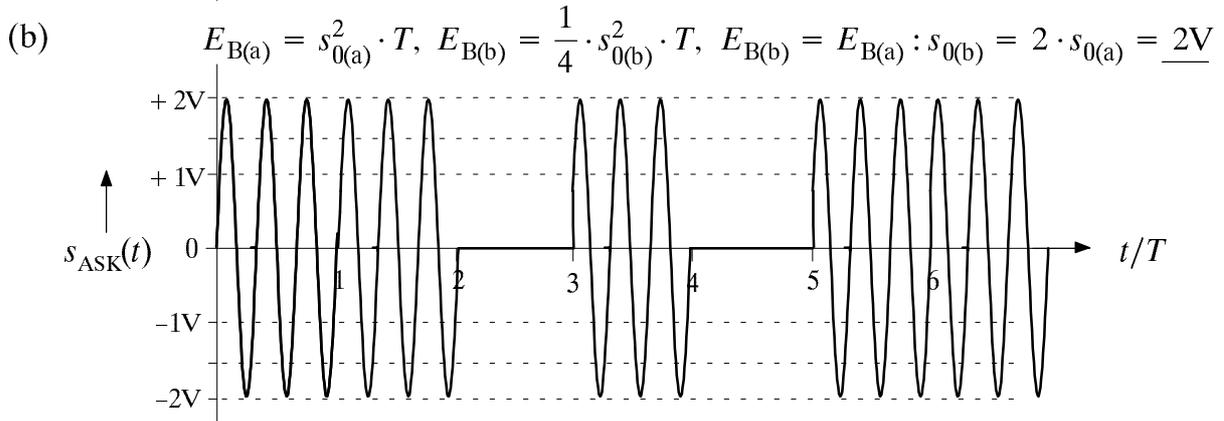
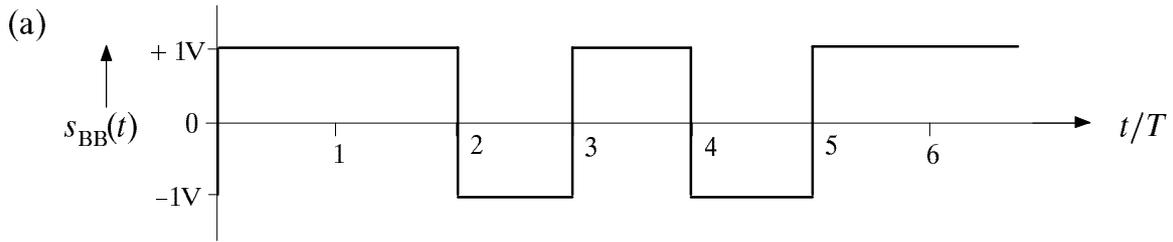
$$p_B = Q(\sqrt{E_B/N_0}) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}(\sqrt{E_B/(2N_0)}) .$$

Aufgrund der logarithmischen Darstellung ist der Kurvenverlauf für das unipolare System um  $3.01 \text{ dB} \approx 3 \text{ dB}$  nach rechts verschoben.



- i) Das unipolare System mit  $10 \cdot \lg(E_B/N_0) = 12 \text{ dB}$  besitzt die gleiche Bitfehlerwahrscheinlichkeit wie das bipolare System mit  $10 \cdot \lg(E_B/N_0) = 8.99 \text{ dB}$  ( $\approx 9 \text{ dB}$ ). Diese wurde in Punkt a) berechnet:  $p_B \approx 3.17 \cdot 10^{-5}$ .
- j) Das ASK-System hat die gleiche Bitfehlerwahrscheinlichkeit wie das unipolare Basisbandsystem, wenn man den Vergleich bei gleichem  $E_B/N_0$  durchführt:  $p_B = 3.17 \cdot 10^{-5}$ .
- k) Bei BPSK bzw. bipolarer Basisbandübertragung ist der geforderte Wert nach Punkt d):  $10 \cdot \lg(E_B/N_0) = 6.75 \text{ dB}$ . Bei ASK oder unipolarer Basisbandübertragung muß dieser Wert um ca.  $3 \text{ dB}$  erhöht werden. Also muß gelten:  $10 \cdot \lg(E_B/N_0) \geq 9.75 \text{ dB}$ .

## V2: Signalverläufe bei ASK, FSK- und PSK



### V3 Beschreibung von Bandpaßkanälen

$$a) \quad H_K(f) = H_{K,BP}(f) = H_{K,TP}(f) * [\delta(f-f_M) + \delta(f+f_M)]$$

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \circ \end{array} \\ h_K(t) = h_{K,BP}(t) = h_{K,TP}(t) \cdot 2 \cdot \cos(2\pi \cdot f_M \cdot t)$$

$$\Rightarrow h_K(t) = 2\Delta f_K \cdot \exp(-\pi \cdot \Delta f_K^2 \cdot t^2) \cdot \cos(2\pi \cdot f_M \cdot t)$$

Die TP-Impulsantwort  $h_{K,TP}(t)$  ist bis auf den Faktor 2 gleich der Einhüllenden der BP-Impulsantwort  $h_{K,BP}(t)$ .

b) Nach Gl. (1.45) gilt bei phasensynchronen Trägersignalen:

$$H_{MKD}(f) = \frac{1}{2} \cdot [H_K(f-f_T) + H_K(f+f_T)] .$$

Mit  $f_T=f_M$ :

$$H_{MKD}(f) = \frac{1}{2} \cdot \left[ 2 \cdot \exp\left[-\pi \cdot \left(\frac{f}{\Delta f_K}\right)^2\right] + \exp\left[-\pi \cdot \left(\frac{f-2 \cdot f_M}{\Delta f_K}\right)^2\right] \right]$$

Dann gilt für tiefe Frequenzen:  $+ \exp\left[-\pi \cdot \left(\frac{f+2 \cdot f_M}{\Delta f_K}\right)^2\right] \Big]$

$$H_{MKD}(f) = \exp\left[-\pi \cdot \left(\frac{f}{\Delta f_K}\right)^2\right]$$

c) "Gauß" gefaltet mit "Gauß" ergibt wieder "Gauß". D.h., der Detektionsgrundimpuls  $g_d(t)$  ist ebenfalls gaußförmig, aber um den Faktor  $\sqrt{2}$  breiter als  $h_{K,TP}(t)$ , vorausgesetzt, es gilt  $\Delta f_E = \Delta f_K$ .

d) Damit erhält man für tiefe Frequenzen:

$$H_{MKD}(f) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \exp\left[-\pi \cdot \left(\frac{f-f_E}{\Delta f_K}\right)^2\right] + \exp\left[-\pi \cdot \left(\frac{f+f_E}{\Delta f_K}\right)^2\right] \right]$$

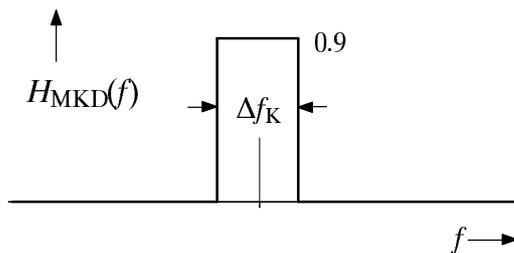
e) Im Fall d)

### V4 Äquivalentes Tiefpaßmodell

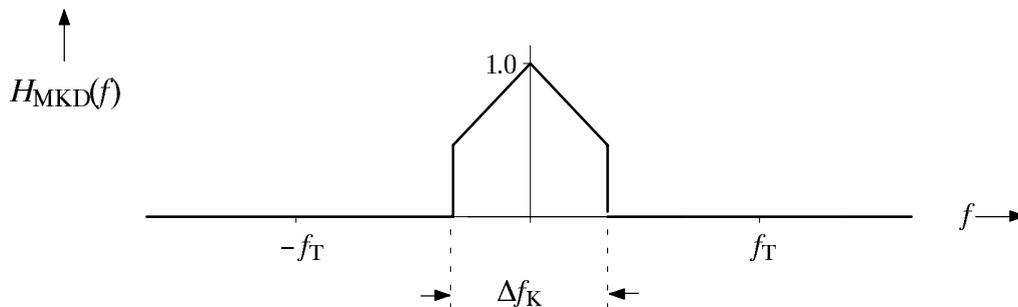
a) Die äquivalente Tiefpaßfunktion  $H_{K,TP}(f)$  des Kanals ergibt sich aus  $H_K(f)$  durch Abschneiden der negativen Frequenzanteile sowie Verschieben um  $f_T$  nach links. Dagegen wird bei Frequenzgängen (im Gegensatz zu Spektren) auf das Verdoppeln der positiven Frequenzanteile verzichtet. (Grund: Würde man in beiden Fällen verdoppeln, ergäbe sich im Ausgangsspektrum aufgrund der Multiplikation ein Fehler).

Die dazugehörige Zeitfunktion  $h_{K,TP}(t)$  ist im vorliegenden Fall komplex, da  $H_K(f)$  nicht symmetrisch um  $f_T$  ist. Die Funktion  $H_{K,TP}(f)$  bezieht sich im Gegensatz zu  $H_{MKD}(f)$  ausschließlich auf den Kanal, berücksichtigt also nicht Modulator und Demodulator.

- b) Demgegenüber beschreibt der äquivalente Basisbandfrequenzgang  $H_{\text{MKD}}(f)$  den Einfluß des gesamten Übertragungssystems, bestehend aus Modulator, Übertragungskanal und Demodulator (vorausgesetzt ist hierbei stets ein Synchrondemodulator) auf das zu übertragende Digitalsignal. Die dazugehörige Zeitfunktion  $h_{\text{MKD}}(t)$  ist reell, d.h.  $H_{\text{MKD}}(f)$  hat stets einen geraden Realteil und einen ungeraden Imaginärteil.
- c) Da der Kanalfrequenzgang nicht symmetrisch der Trägerfrequenz ist, muß von der allgemeineren Gleichung (1.44) ausgegangen werden.
- d) Die resultierende Übertragungsfunktion ist rechteckförmig und reell, wenn man die Anteile bei der doppelten Frequenz außer acht läßt.



- e) Alle Signale sind bis auf den Faktor 0.9 identisch, da sich für beide Funktionen  $H_{\text{K}}(f)$  bis auf diesen Faktor genau die gleiche resultierende Übertragungsfunktion  $H_{\text{MKD}}(f)$  ergeben. D.h.: Durch die Schräglage der Übertragungsfunktion entstehen keine weiteren Verzerrungen, sondern lediglich eine frequenzunabhängige Dämpfung.
- f) Der Imaginärteil von  $H_{\text{K}}(f)$  müßte unsymmetrisch um die Trägerfrequenz sein.
- g) Analog zu Punkt d) ergibt sich hier:



- h)  $H_{\text{MKD}}(f)$  kann aus einem rechteckförmigen und einem dreieckförmigen Anteil zusammengesetzt werden:

$$h_{\text{MKD}}(t) = \frac{\Delta f_{\text{K}}}{2} \cdot \text{si}(\pi \cdot \Delta f_{\text{K}} \cdot t) + \frac{\Delta f_{\text{K}}}{4} \cdot \text{si}^2\left(\pi \cdot \frac{\Delta f_{\text{K}}}{2} \cdot t\right).$$

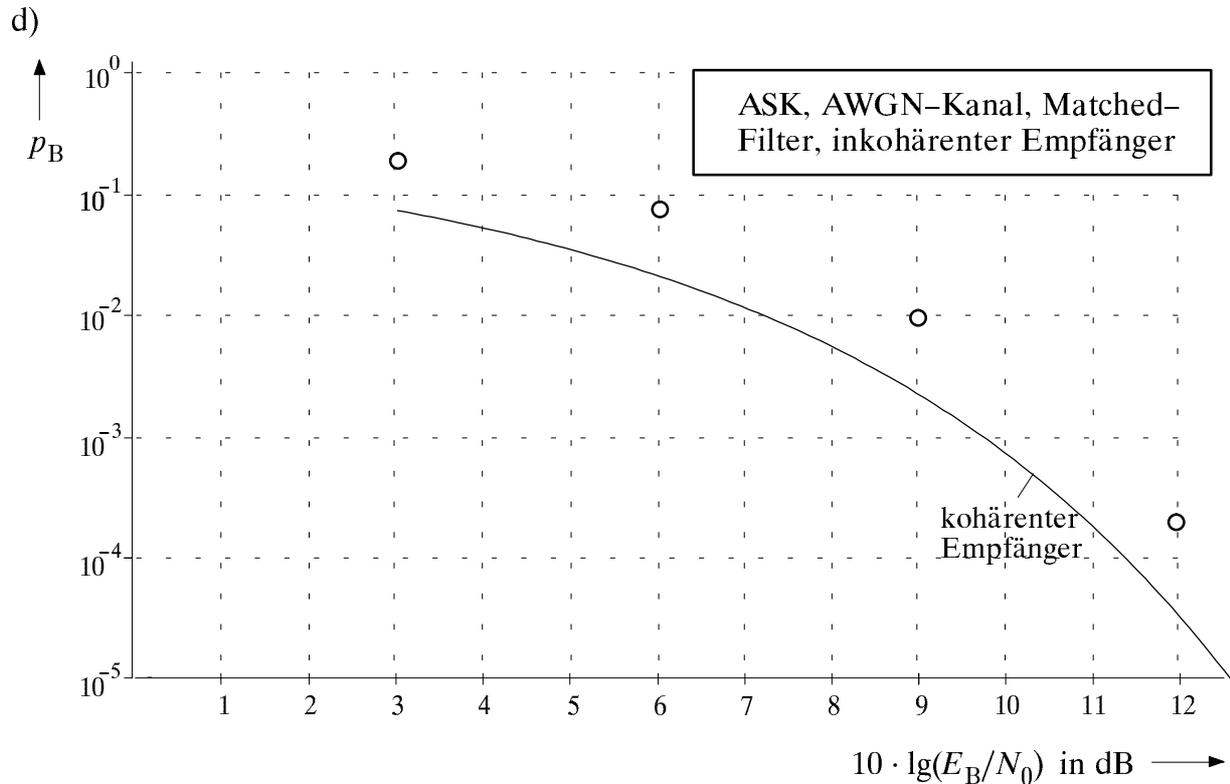
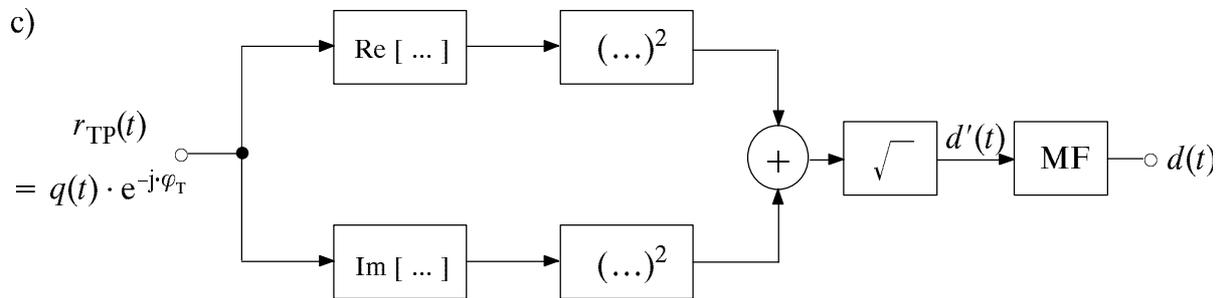
## V5 Inkohärente ASK-Demodulation

$$\begin{aligned} \text{a) } b_I(t) &= r(t) \cdot 2 \cos(\omega_T \cdot t) = q(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T) \cdot 2 \cos(\omega_T \cdot t) \\ &= q(t) \cdot \cos(\varphi_T) + q(t) \cdot \cos(2 \cdot \omega_T \cdot t - \varphi_T) \quad \Rightarrow \quad b'_I(t) = q(t) \cdot \cos(\varphi_T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_Q(t) &= r(t) \cdot 2 \sin(\omega_T \cdot t) = q(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T) \cdot 2 \sin(\omega_T \cdot t) \\ &= q(t) \cdot \sin(\varphi_T) + q(t) \cdot \sin(2 \cdot \omega_T \cdot t - \varphi_T) \quad \Rightarrow \quad b'_Q(t) = q(t) \cdot \sin(\varphi_T) \end{aligned}$$

$$d'(t) = \sqrt{b'_I(t)^2 + b'_Q(t)^2} = \sqrt{q(t)^2}, \text{ und zwar unabhängig vom Phasenwinkel.}$$

b) Falls  $q(t)$  nicht negativ:  $d'(t) = q(t)$

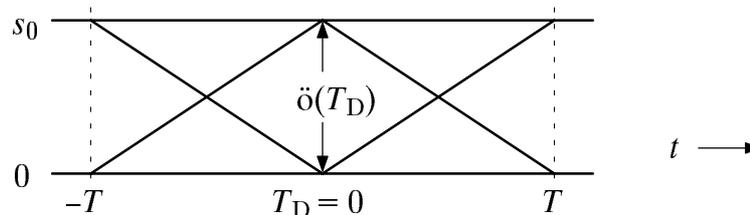


e) Im vorliegenden Beispiel stets kleiner als 1 dB.

## 5 Musterlösung der Versuchsdurchführung

### D1 Untersuchungen zum Basisbandsystem

- a) Ohne Störungen ergibt sich aus dem rechteckförmigen Sendesignal  $s(t)$  aufgrund der Faltung mit der (rechteckförmigen) Impulsantwort  $h_{MF}(t)$  des akausalen Matched-Filters ein dreieckförmiges Detektionssignal  $d(t)$ . Der optimale Detektionszeitpunkt ist somit  $T_{D,opt} = 0$ . Durch die Störungen  $n(t)$  ist dem Nutzsinal  $d_S(t)$  nun noch ein Störanteil  $d_N(t)$  überlagert, dessen Streuung  $\sigma_d$  jedoch wegen des (Matched-)Filters deutlich kleiner ist als die Streuung  $\sigma_n$  von  $n(t)$ . Bei fehlerfreier Übertragung ist das Sinkensignal  $v(t)$  bis auf eine Zeitverschiebung identisch mit dem Sendesignal  $s(t)$ .
- b) Der Detektionsgrundimpuls  $g_d(t)$  ist dreieckförmig. Das Matched-Filter ist hier als akausal angesetzt; deshalb tritt das Impulsmaximum  $s_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf. Ohne Berücksichtigung von Störungen ergibt sich somit das hierfür typische Auge:

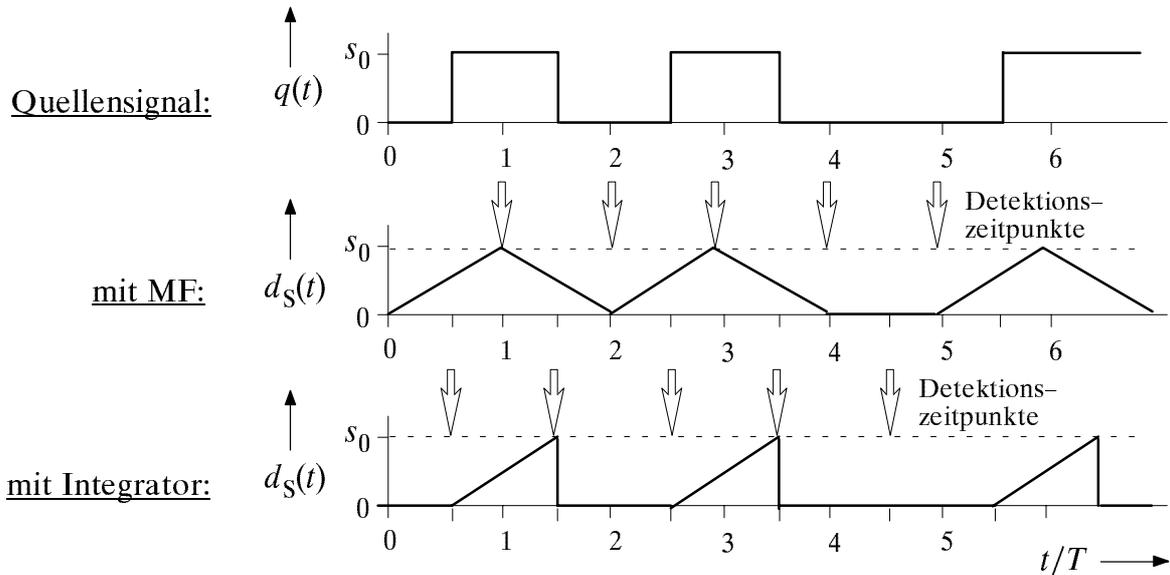


Die auf  $s_0$  normierte Augenöffnung ist somit 1. Der Effektivwert der Störungen ergibt sich nach dem Programm zu  $\sigma_d \approx 0.126$ . Daraus folgt für das Sinken-SNR näherungsweise der gleiche Wert wie für  $E_B/N_0$ . Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit erhält man z.B. aus den Tabellen im Anhang zu  $p_B = Q(\sqrt{\varrho_d}) \approx 0.343 \cdot 10^{-4}$ .

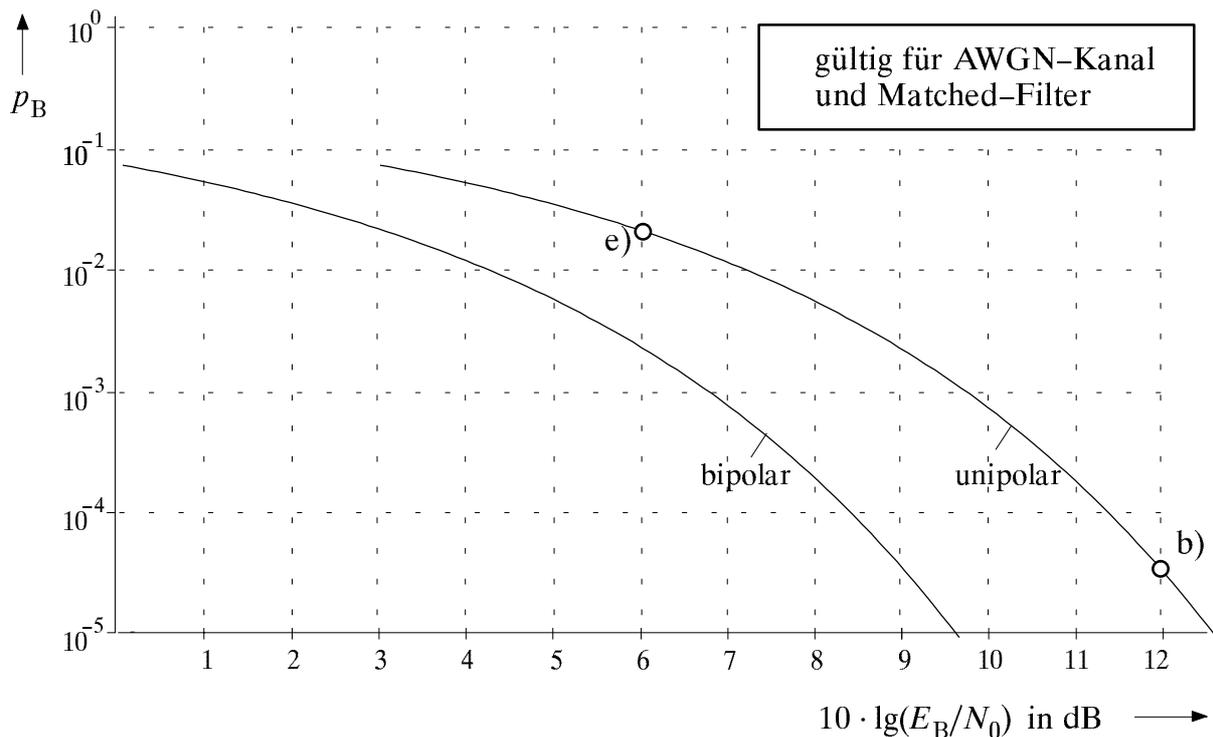
$10 \cdot \lg(E_B/N_0)$	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\varrho_d)$
12 dB (Punkt b)	1.000	0.126	$0.343 \cdot 10^{-4}$	12.00 dB
6 dB (Punkt e)	1.000	0.251	$0.230 \cdot 10^{-1}$	6.00 dB

- c) Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit ist gegenüber Punkt b) unverändert. Daraus folgt auch, daß sich auch hier der Störeffektivwert  $\sigma_d \approx 0.126$  ergibt. Beim Matched-Filter stimmt der im Fenster "Zeitsignal/Detektionssignal" ausgegebene, per Simulation ermittelte Wert innerhalb der Simulationsgenauigkeit gut mit dem theoretischen Ergebnis überein (z.B.:  $\sigma_d \approx 0.134$  beim voreingestellten Startwert). Nicht so dagegen beim Integrator. Der Grund hierfür ist, daß hier der Effektivwert der Störungen während einer Symboldauer  $T$  stets zunimmt. Entscheidend für die Fehlerwahrscheinlichkeit ist der Effektivwert zu den Detektionszeitpunkten (hier:  $\sigma_d \approx 0.126$ ). Über alle Abtastwerte gemittelt ergibt sich ein kleinerer Wert (z.B.  $\sigma_d \approx 0.077$ ).

Da der Integrator im Gegensatz zum Matched-Filter im Programm kausal realisiert wurde, ändert sich der Detektionszeitpunkt von  $T_D = 0$  auf  $T_D = T/2$ .



- d) Aufgrund der unipolaren Signale ist die optimale Entscheiderschwelle  $E_{\text{opt}} = 0.5$ . Mit  $E = 0.6$  erhöht sich die Bitfehlerwahrscheinlichkeit von  $0.343 \cdot 10^{-4}$  auf  $0.362 \cdot 10^{-3}$ .
- e) Bezüglich des Nutzsignals ändert sich gegenüber Punkt b) nichts. Dagegen ist nun die Rauschleistungsdichte  $N_0$  am Empfängereingang – und damit auch die Rauschleistung am Entscheider – viermal so groß und der Störeffektivwert  $\sigma_d$  verdoppelt sich. Weiterhin gilt:  $\varrho_d \approx E_B/N_0$ . Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit ist nun gegenüber Punkt b) um fast 3 Zehnerpotenzen größer. Im Augendiagramm mit Störungen erkennt man einige (zum Detektionszeitpunkt) falsch detektierte Linien (gelb dargestellt).
- f) Die vom Programm ausgegebenen Werte passen exakt zu obigen Kurven.



## D2 ASK-System mit Synchrondemodulation

- a) Das ASK-Sendesignal  $s(t)$  hat einen Verlauf vergleichbar Bild 1.8(b). Das Empfangssignal  $r(t)$  erhält man durch die additive Überlagerung des Rauschsignals  $n(t)$ . Nach Zusetzen des empfangsseitigen Trägersignals ergibt sich das Signal  $b(t)$  mit einem Anteil der doppelten Trägerfrequenz ( $2f_T$ ). Nach dem Matched-Filter erkennt man den  $2f_T$ -Anteil durch einen leicht wellenförmigen Verlauf. Das Tiefpaßsignal  $d(t)$  nach dem Synchrondemodulator ist aufgrund der im Programm verwendeten Amplitude  $\hat{z}_E = 1$  des empfangsseitigen Trägersignals nur halb so groß wie bei der Basisbandübertragung (vgl. D1). Deshalb liegt die optimale Schwelle bei  $E_{\text{opt}} = 0.25$ . Ansonsten sind gegenüber D1 keine Unterschiede festzustellen.
- b) Augenöffnung und Störeffektivwert sind nur halb so groß wie in D1(b) bzw. (e). Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit und der Sinkenstörabstand sind dagegen nahezu identisch. Theoretisch müßten sie sogar exakt gleich sein.

$10 \cdot \lg(E_B/N_0)$	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(Q_d)$
12 dB	0.500	0.063	$0.346 \cdot 10^{-4}$	12.00 dB
6 dB	0.500	0.125	$0.230 \cdot 10^{-1}$	6.00 dB

- c) Durch die Phasenabweichung wird sowohl der Grundimpuls als auch die vertikale Augenöffnung um  $\cos(\Delta\varphi_T) = 0.867$  kleiner. Entsprechend muß auch die Schwelle von 0.250 heruntergesetzt werden:  $E_{\text{opt}} = 0.217$ . Der Sinkenstörabstand verringert sich um den Faktor  $\cos^2(\Delta\varphi_T) = 0.75$  entsprechend 1.25 dB.

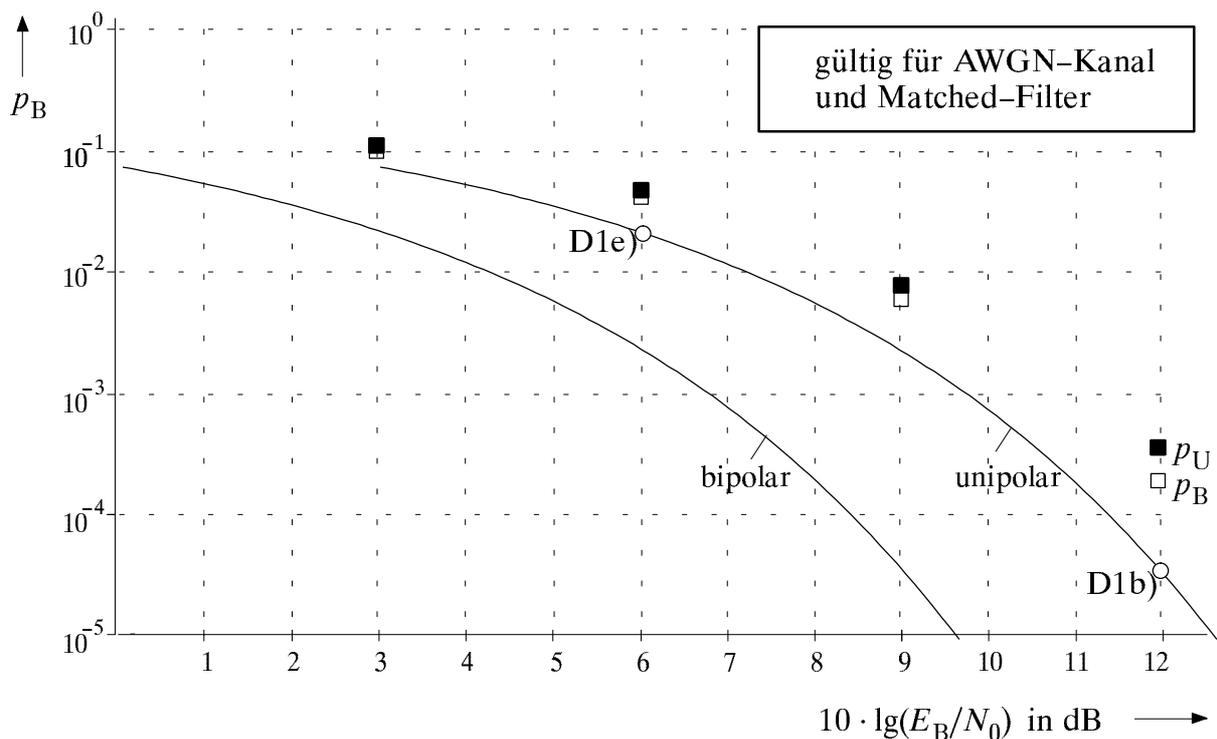
Phasenabweichung	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(Q_d)$
$\Delta\varphi_T = 0^\circ$ (Aufgabe b)	0.500	0.063	$0.346 \cdot 10^{-4}$	12.00 dB
$\Delta\varphi_T = 30^\circ$ (Aufgabe c)	0.433	0.063	$0.282 \cdot 10^{-3}$	10.75 dB

d)

$E_B/N_0$	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\varrho_d)$	$p_U$	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$
3 dB	0.457	0.187	0.101	2.11 dB	0.112	1.72 dB
6 dB	0.457	0.133	$0.359 \cdot 10^{-1}$	5.11 dB	$0.425 \cdot 10^{-1}$	4.72 dB
9 dB	0.457	0.094	$0.556 \cdot 10^{-2}$	8.09 dB	$0.750 \cdot 10^{-2}$	7.72 dB
12 dB	0.457	0.067	$0.175 \cdot 10^{-3}$	11.07 dB	$0.296 \cdot 10^{-3}$	10.72 dB

e) Die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve  $p_B$  des suboptimalen Systems (weiße Rechtecke) liegt stets oberhalb des optimalen Systems (weiße Kreise). Der vertikale Abstand zwischen den weißen Rechtecken und den weißen Kreisen ist um so größer, je kleiner die Fehlerwahrscheinlichkeiten sind, d.h. je größer  $E_B/N_0$  ist. Dagegen ist der horizontale Abstand zwischen den weißen Rechtecken und der durchgezogenen Kurve nahezu konstant und beträgt ca. 1 dB. Dieser Abstand ist gleich der Differenz zwischen  $E_B/N_0$  (in dB) und  $\varrho_d$  (in dB), also ca. 0.9 dB.

Die schwarzen Rechtecke kennzeichnen die ungünstigste Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_U$ , die eine obere Schranke für  $p_B$  angibt. Bei kleinem  $E_B/N_0$  gilt:  $p_B \approx p_U$ . Der horizontale Abstand zwischen den schwarzen Rechtecken und der durchgezogenen Kurve ist konstant 1.28 dB. Dies läßt sich wie folgt begründen: Ein optimales System mit Matched-Filter benötigt für  $0.296 \cdot 10^{-3}$  nicht  $E_B/N_0 = 12$  dB, sondern nur 10.72 dB.



### D3 Untersuchungen zum Rauschen

$$a) \quad 10 \cdot \lg(E_B/N_0) = 12 \text{ dB} \quad \Rightarrow \quad E_B/N_0 = 10^{1.2} = 15.85$$

$$\text{Bei ASK gilt mit } T_B = T: \quad E_B = \frac{1}{4} \cdot s_0^2 \cdot T$$

$$\Rightarrow \quad \frac{N_0}{s_0^2 \cdot T} = \frac{1}{4 \cdot 15.85} = 0.01578$$

$$\text{Das Programm liefert: } \Phi_n(f) = \frac{N_0}{2} = 0.00789 \quad \Rightarrow \quad N_0 = 0.01578$$

$$\text{unnormiert: } N_0 = 0.01578 \cdot s_0^2 \cdot \frac{1}{R_B} = 7.1 \cdot 10^{-8} \frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \quad (\text{bezogen auf } 1\Omega)$$

$$b) \quad \sigma_n^2 = \overline{n(t)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(f) df = N_0 \cdot B_n = 0.01578 \cdot s_0^2 \cdot T \cdot \frac{20}{T} = 0.3156 \cdot s_0^2$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_n/s_0 \approx 0.562$$

Im Fenster "Störsignal" wird als empirisch ermittelter Wert ausgegeben:

$$\sigma_n/s_0 \approx 0.540 \quad (\text{gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Simulation})$$

c) Für den optimalen ASK-Empfänger gilt nach Gl. (1.29) mit  $\hat{z}_E = 1$ :

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{4} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \text{si}^2(\pi f T) df = \frac{N_0}{4T} = 0.00395 \cdot s_0^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_d}{s_0} \approx 0.0628$$

Für den BB-Empfänger mit Gauß-Tiefpaß gilt nach Gl. (1.19):

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_E(f)|^2 df = \frac{N_0}{\sqrt{2}} \cdot f_E \cdot$$

Die ASK mit Synchrondemodulator unterscheidet sich um den Faktor  $\hat{z}_E^2/2$ .

Mit  $\hat{z}_E = 1$ :

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot f_E = \frac{0.01578 \cdot s_0^2 \cdot T}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot f_E = \frac{0.01578 \cdot 0.8}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot s_0^2 = 0.00446 \cdot s_0^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sigma_d}{s_0} \approx 0.0668$$

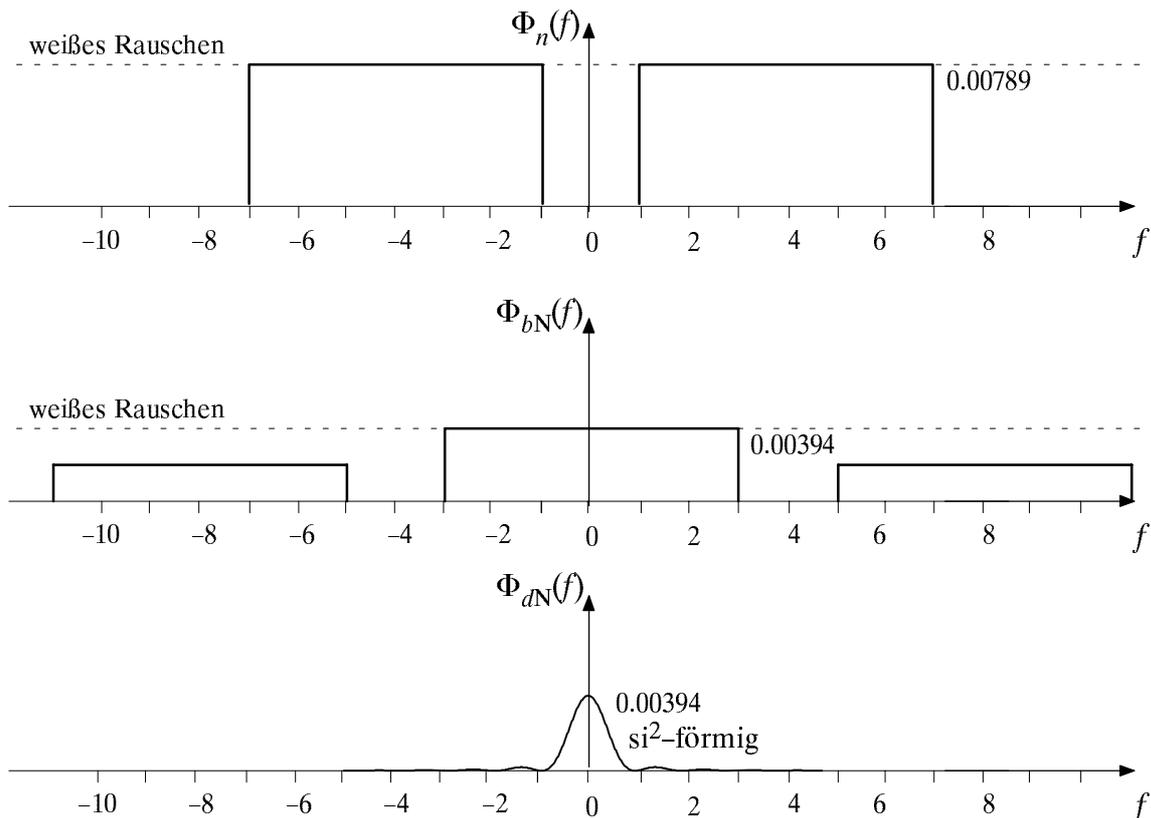
	optimaler Empfänger			Empfänger mit Gauß-Tiefpaß		
	$\frac{\sigma_d}{s_0}$ (anal.)	$\frac{\sigma_d}{s_0}$ ("dmv")	$10 \cdot \lg(Q_d)$	$\frac{\sigma_d}{s_0}$ (anal.)	$\frac{\sigma_d}{s_0}$ ("dmv")	$10 \cdot \lg(Q_d)$
$B_n \cdot T = 20$ ( $f_M \cdot T = 0$ )	0.0628	0.063	12.00 dB	0.0668	0.067	11.07 dB
$B_n \cdot T = 6$ ( $f_M \cdot T = 4$ )	—	0.062	12.08 dB	—	0.067	11.07 dB

Der suboptimale Gauß-Empfänger mit  $f_E \cdot T = 0.8$  weist eine um 0.53 dB größere Störleistung als das Matched-Filter auf. Der um 0.93 dB kleinere Sinkenstörabstand ist zusätzlich auf die Impulsinterferenzen (kleinere Augenöffnung) zurückzuführen.

d) Analog zu b) gilt:

$$\sigma_n^2 = N_0 \cdot B_n = 0.01578 \cdot s_0^2 \cdot T \cdot \frac{6}{T} = 0.0947 \cdot s_0^2 \Rightarrow \sigma_n/s_0 \approx 0.308$$

Die Simulation liefert hier:  $\sigma_n/s_0 \approx 0.292$  (variiert nach Startwert)



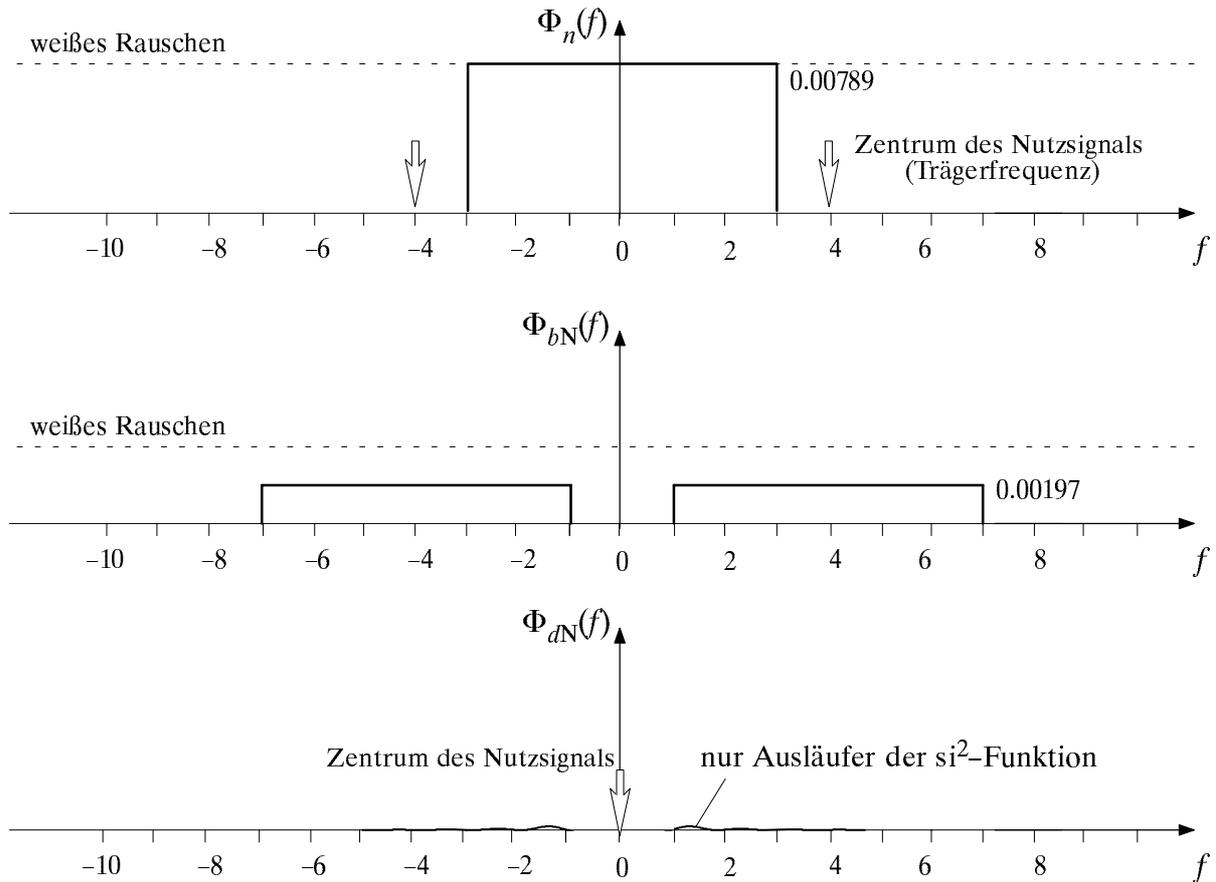
e) Wie aus obiger Skizze hervorgeht, hat bei bandbegrenztem Rauschen  $n(t)$  der Rauschanteil  $b_N(t)$  nur Spektralanteile im TP-Bereich von  $-B_n/2$  bis  $+B_n/2$ . Somit ergibt sich beim optimalen Empfänger (Matched-Filter) eine etwas kleinere Störleistung:

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{4} \cdot \int_{-B_n/2}^{+B_n/2} \text{si}^2(\pi f T) df < \frac{N_0}{4T}$$

Aufgrund dieses geringfügig kleineren Wertes von  $\sigma_d$  ergibt sich nun ein größerer Sinken-Störabstand (12.08 anstelle von 12.00 dB). Das bedeutet: Bandbegrenztes Rauschen ist (etwas) weniger kritisch als "echtes" weißes Rauschen.

Beim Gauß-Tiefpaß ist dagegen kein Unterschied festzustellen, da dessen Frequenzgang bei der normierten Frequenz  $f=3$  nur noch vernachlässigbar kleine Anteile hat.

f) Das Tiefpaß-Rauschen (siehe folgende Skizze) liegt in einem Frequenzbereich, der das ASK-System wenig stört. Somit beträgt der Effektivwert des Detektionsstörsignals nur mehr  $\sigma_d = 0.013$  und die Bitfehlerwahrscheinlichkeit ist kleiner als  $10^{-40}$ .



## D4 Untersuchungen am FSK-System

- Das FSK-Sendesignal  $s(t)$  kann man sich aus 2 überlagerten ASK-Sendesignalen zusammengesetzt denken. Im oberen Zweig des Empfängers wird mit der Frequenz  $f_1$  synchrondemoduliert. In den Bereichen, in denen das Sendesignal  $s(t)$  die Frequenz  $f_1$  aufweist, ist im Signal  $b_1(t)$  wie bei der Demodulation eines ASK-Signals mit der Trägerfrequenz  $f_T = f_1$  ein Gleichanteil mit überlagertem  $2f_T$ -Anteil festzustellen. Dagegen ergibt die Frequenz  $f_0$  im Sendesignal  $s(t)$  nur Interferenzen im Signal  $b_1(t)$ , die sich durch den nachfolgenden Tiefpaß eliminieren lassen. Für den unteren Zweig (Signal  $b_0(t)$ ) gilt sinngemäß das gleiche Prinzip. Das Differenzsignal  $b(t) = b_1(t) - b_0(t)$  hat somit einen positiven Gleichanteil, falls  $q(t)$  im gleichen Zeitbereich positiv ist. Ist  $q(t) = 0$ , so ist der Gleichanteil negativ. Das Detektionssignal  $d(t)$  ist deshalb bipolar.
- Aufgrund des bipolaren Detektionssignals  $d(t)$  gilt:  $E_{\text{opt}} = 0$ .
- Die Augenöffnung ist gegenüber der ASK doppelt so groß (sogar etwas mehr), der Störeffektivwert  $\sigma_d$  ist aber aufgrund der Subtraktion um den Faktor  $\sqrt{2}$  größer. Bei einem Systemvergleich bei konstanter Sendeamplitude  $s_0$  würde deshalb das FSK-System gegenüber der ASK um ca. 3 dB besser abschneiden. Da aber die FSK gegenüber der ASK auch eine um 3 dB größere Sendeleistung aufweist, sind bei konstantem  $E_B/N_0$  beide Systeme innerhalb der Simulationsgenauigkeit gleich gut. Der Unterschied um ca. 0.24 dB dürfte von Simulationsungenauigkeiten (wahrscheinlich des FSK-Systems) herrühren.

	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\varrho_d)$	$p_U$	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$
FSK (D4c)	0.939	0.133	$0.146 \cdot 10^{-3}$	11.18 dB	$0.206 \cdot 10^{-3}$	10.96 dB
ASK (D2d)	0.457	0.067	$0.175 \cdot 10^{-3}$	11.07 dB	$0.296 \cdot 10^{-3}$	10.72 dB

## D5 Leistungsdichtespektren der Nutzsingnale

- a) Das LDS  $\Phi_q(f)$  setzt sich aufgrund des stochastischen binären Rechtecksignals aus einem kontinuierlichen,  $\text{si}^2$ -förmigen Anteil und aufgrund der unipolaren Signalform aus einer Diracfunktion an der Stelle  $f=0$  zusammen. Dieses LDS wird durch Gl. (1.26) beschrieben.  $\Phi_s(f)$  hat die gleiche Form wie in Bild 1.9(b) dargestellt. Da  $H_K(f)=1$  ist, gilt  $\Phi_{rS}(f) = \Phi_s(f)$ . Das Leistungsdichtespektrum  $\Phi_{bS}(f)$  nach dem Synchrondemodulator ist im Tiefpaßbereich bis auf den Faktor 0.25 identisch mit  $\Phi_q(f)$ . Weiterhin beinhaltet  $\Phi_{bS}(f)$  jedoch noch  $\text{si}^2$ -förmige Anteile um die doppelte Trägerfrequenz. Mit Gl. (1.26) und der für tiefe Frequenzen gültigen Näherung  $\Phi_{bS}(f) \approx \Phi_q(f)/4$  gilt:

$$\Phi_{bS}(f) \approx \frac{T}{16} \cdot s_0^2 \cdot \text{si}^2(\pi \cdot f \cdot T) + \frac{s_0^2}{16} \cdot \delta(f) .$$

$\Phi_{dS}(f)$  ergibt sich aus  $\Phi_{bS}(f)$  durch Multiplikation mit  $|H_E(f)|^2$ .

- b) Während sich bei ASK das kontinuierliche LDS  $\Phi_s(f)$  aus **einem**  $\text{si}^2$ -förmigen Anteil um die Trägerfrequenz beschreiben läßt, gibt es bei FSK zwei solche Anteile bei den Frequenzen  $f_0$  und  $f_1$ . Das gleiche gilt für die jeweiligen diskreten Signalanteile. Dies läßt sich z.B. wieder dadurch erklären, daß man das FSK-Signal als Summe zweier ASK-Signale darstellen kann. Das LDS  $\Phi_{bS}(f)$  unterscheidet sich bei ASK und FSK deutlich, bei tiefen Frequenzen allerdings näherungsweise nur um den Faktor 2 (die Werte bei FSK sind größer als bei ASK).  $\Phi_{dS}(f)$  hat mit guter Näherung die gleiche Form wie bei ASK, ist aber auch um ca. den Faktor 2 größer.
- c) Im Detektionssignal läßt sich eine überlagerte Cosinusschwingung der (normierten) Frequenz  $f=1$  erkennen. Diese resultiert aus den Intermodulationsprodukten  $f_1 - f_0$  , sowie  $f_0 - f_1$  ' und läßt sich durch das Tiefpaßfilter nicht mehr ausreichend beseitigen. Das Augendiagramm ist nahezu unipolar. Auch bei optimaler Schwelle, die gegenüber richtiger Synchrondemodulation ( $E=0$ ) deutlich nach oben verschoben werden muß, vermindert sich das Sinken-SNR gegenüber dem Versuch D4c um fast 6 dB.
- d) Im Unterschied zur ASK sind bei BPSK die Nutzsingnale bipolar. Gegenüber obigen Gleichungen (Punkt a) sind deshalb die Leistungsdichtespektren der Nutzsingnale um den Faktor 4 größer und die Diraclinien in den einzelnen LDSen nicht vorhanden.

## D6 BPSK-System

- a) Das BPSK-Sendesignal  $s(t)$  ergibt sich aus der Multiplikation des Trägers  $z(t)$  mit dem hier bipolar anzusetzenden Quellsignal  $q(t)$ . Für das modulierte Signal gilt im Gegensatz zu Gl. (1.40) und zu Bild 1.14:

$$s(t) = \begin{cases} + s_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f_T \cdot t) & \text{für } a_v = +1, \\ - s_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f_T \cdot t) & \text{für } a_v = -1. \end{cases}$$

Entsprechend Gl. (1.39) kann hierfür auch geschrieben werden:

$$s(t) = -s_0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot f_T \cdot t + \frac{\pi}{2} \cdot a_v\right).$$

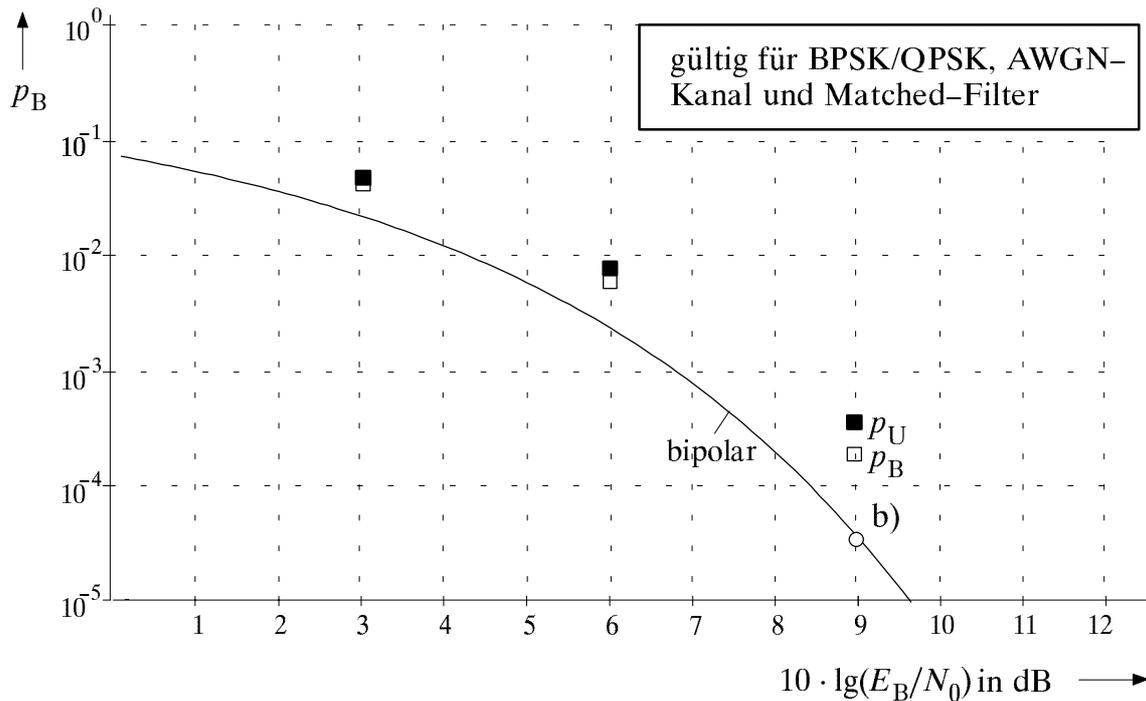
Daraus folgt: Die Trägerphase beträgt  $180^\circ$ , wenn man von der Systembeschreibung des Abschnitts 1.4.1 ausgeht. Alle anderen Signale lassen sich analog zur ASK deuten.

- b) Der theoretische Wert, gültig für nicht bandbegrenzt weißes Rauschen, wäre nach Abschnitt 1.4.3:  $10 \cdot \lg(\varrho_d) = 10 \cdot \lg(E_B/N_0) + 10 \cdot \lg(2) = 12.01 \text{ dB}$  und  $p_B = 0.267 \cdot 10^{-4}$ . Das Programm "psk" liefert einen geringfügig größeren Wert:  $10 \cdot \lg(\varrho_d) = 12.13 \text{ dB}$ . Der Grund hierfür ist ebenso wie im Versuch D3c, daß hier der Simulation bandbegrenzt weißes Rauschen zugrundeliegt ( $B_n \cdot T = 6$ ).

c)

$10\lg(E_B/N_0)$	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\varrho_d)$	$p_U$	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$
3 dB	0.908	0.266	$0.369 \cdot 10^{-1}$	5.05 dB	$0.440 \cdot 10^{-1}$	4.64 dB
6 dB	0.908	0.189	$0.586 \cdot 10^{-2}$	8.03 dB	$0.799 \cdot 10^{-2}$	7.64 dB
9 dB	0.908	0.134	$0.194 \cdot 10^{-3}$	11.00 dB	$0.333 \cdot 10^{-3}$	10.64 dB

- d) Verschiebt man die Kurvenverläufe der ASK um 3 dB nach links, so erhält man die BPSK-Kurve. Dies gilt sowohl für den optimalen Empfänger (mit Matched-Filter bzw. Integrator) als auch für den suboptimalen Empfänger mit Gauß-Tiefpaß. Der Grund hierfür ist, daß das BPSK-System genau das gleiche Basisbandmodell wie das ASK-System aufweist. Die aufgrund von  $H_E(f)$  entstehenden Impulsinterferenzen machen sich deshalb bei beiden Systemen in gleicher Weise bemerkbar. Die obige Tabelle im Vergleich zur entsprechenden Tabelle des Versuchs D2d) zeigt, daß die Augenöffnung bei BPSK doppelt so groß ist wie bei ASK. Die Streuung  $\sigma_d$  ist dagegen nur um den Faktor  $\sqrt{2}$  größer. Diese Vergrößerung hängt damit zusammen, daß der Vergleich bei konstantem  $E_B/N_0$  durchgeführt wird. Da die Energie pro Bit ( $E_B$ ) bei BPSK jedoch doppelt so groß ist wie bei ASK, ist bei BPSK auch  $N_0$  um den Faktor 2 größer, und dementsprechend der Effektivwert um  $\sqrt{2}$ .



- e) Innerhalb der Simulationsgenauigkeit ist kein Unterschied feststellbar. Augenöffnung und Störeffektivwert sind beim BB-System jeweils doppelt so groß wie bei BPSK.

## D7 Quaternäre Phasenumtastung

- a) Die Symboldauer  $T$  der Teilsignale  $q_I(t)$  und  $q_Q(t)$  im Inphase- bzw. Quadraturzweig ist doppelt so groß wie die Symboldauer  $T_B$  des Quellensignals  $q(t)$ ;  $T_B$  wird im folgenden mit "Bitdauer" bezeichnet. Das jeweils erste Bit von  $q(t)$  innerhalb von  $T$  wird dem Signal  $q_I(t)$ , das zweite Bit dem Signal  $q_Q(t)$  zugeordnet. Das Signal  $s_I(t)$  ergibt sich aus der Multiplikation eines cos-förmigen Trägers  $z_I(t)$  mit  $q_I(t)$ , das Signal  $s_Q(t)$  aus der Multiplikation eines "minus-sinus"-förmigen Trägers  $z_Q(t)$  mit  $q_Q(t)$ . Die Amplituden beider Orthogonalsignale sind jeweils  $1/\sqrt{2}$ , so daß der Maximalwert des Sendesignals  $s(t)$  wieder  $s_0$  ergibt. Da  $z_I(t)$  und  $z_Q(t)$  zueinander orthogonal sind, können die beiden Zweige unabhängig voneinander synchrondemoduliert werden. Die anschließenden Nutzsignale unterscheiden sich von denen bei BPSK alle nur um den Faktor  $1/\sqrt{2}$ .
- b) Alle in a) gemachten Aussagen bestätigen sich auch anhand der LDS. Das LDS  $\Phi_n(f)$ , normiert auf  $s_0^2 \cdot T$ , ist bei 4QAM (QPSK) nur halb so groß wie bei BPSK, da auch die "Energie pro Bit" nur halb so groß ist und  $E_B/N_0$  als konstant vorausgesetzt wird.

c)

$\Delta\varphi_T = 0^\circ$	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(Q_d)$	$p_U$	$10 \cdot \lg(Q_U)$
BPSK (vgl. D6c)	0.908	0.134	$0.194 \cdot 10^{-3}$	11.00 dB	$0.333 \cdot 10^{-3}$	10.64 dB
4QAM	0.642	0.094	$0.194 \cdot 10^{-3}$	11.00 dB	$0.333 \cdot 10^{-3}$	10.64 dB

Alle Nutzsingale und Störsingale sind genau um den Faktor  $1/\sqrt{2}$  kleiner als bei BPSK,  $p_B$  bzw.  $p_U$  unterscheiden sich bei BPSK und QPSK dagegen nicht.

- d) Das Phasendiagramm bestätigt die obigen Ergebnisse. Bei BPSK gibt es zwei Punktwolken, bei der QPSK vier. Gleichzeitig erkennt man die unterschiedliche Entscheidung bei der BPSK (positiver bzw. negativer Real- oder Imaginärteil) und der QPSK (entsprechend den vier Quadranten). Der Einfluß der Impulsinterferenzen ist bei der Einstellung " $E_B/N_0 = 80$  dB" feststellbar; auch ohne Rauschen liegen nicht alle Werte auf einen von 2 (bzw. 4) Punkten. Bei kleinerer Grenzfrequenz würde dieser Sachverhalt noch deutlicher zu sehen sein.
- e) Bei BPSK ist die Augenöffnung – ebenso wie alle Nutzsingale – um den Faktor  $\cos(\Delta\varphi_T) \approx 0.866$  kleiner. Damit verringert sich der Sinkenstörabstand um ca. 1.2 dB. Bei 4QAM bzw. QPSK wirkt sich der gleiche Phasenfehler stärker aus, da nicht nur jede Komponente um  $\cos(\Delta\varphi_T) \approx 0.866$  kleiner wird, sondern zudem die Augenöffnung auch durch die größer werdende Orthogonalkomponente verkleinert wird.

$\Delta\varphi_T = 30^\circ$	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(\varrho_d)$	$p_U$	$10 \cdot \lg(\varrho_U)$
BPSK	0.787	0.134	$0.104 \cdot 10^{-2}$	9.77 dB	$0.160 \cdot 10^{-2}$	9.39 dB
4QAM	0.203	0.094	$0.486 \cdot 10^{-1}$	4.40 dB	0.141	0.63 dB

- f) Nun sind die Quadranten sowohl bei BPSK als auch bei QPSK gegenüber ihren Soll-lagen verdreht. Die Fehlerwahrscheinlichkeit ist in beiden Fällen (fast) 50%.
- g) z.B.: 4QAM,  $f_n \cdot T = 4.2$ ,  $A_n = 1$ , Phase  $0^\circ$ .

## D8 Zweiwegekanal

- a) Aufgrund des Echos unterscheidet sich nun das Empfangssignal  $r(t)$  vom BPSK-Sendesignal  $s(t)$ . Die Einhüllende von  $r(t)$  ist nicht mehr konstant und es kann auch zu weiteren Phasensprüngen kommen. Auch die Signale  $b(t)$  und  $d(t)$  unterscheiden sich gegenüber  $H_K(f) = 1$  und der Detektionsgrundimpuls ist nicht mehr symmetrisch.
- b) Das LDS  $\Phi_k(f)$  ist schmaler als  $\Phi_s(f)$ , in der Nähe der Trägerfrequenz aber deutlich höher. Das Integral über  $\Phi_k(f)$  ergibt die Leistung des Kanalausgangssignals  $k(t)$ . Diese ist aufgrund des 2. Pfades sogar etwas größer als die Leistung des Sendesignals  $s(t)$ , die als das Integral über  $\Phi_s(f)$  berechnet werden kann. Diesen Zusammenhang erkennt man auch bei einem Vergleich der Signale  $s(t)$  und  $k(t)$ . Weiterhin ist zu erkennen, daß  $\Phi_k(f)$  nicht mehr symmetrisch um die Trägerfrequenz ist. Das Maxima von  $\Phi_k(f)$  ist nicht exakt bei  $f_T$ .

- c) Aufgrund der Verzerrungen ergibt sich eine kleinere Augenöffnung und damit eine größere Bitfehlerwahrscheinlichkeit. Der Sinkensignalrauschabstand ist beim Zweiwege-Kanal um 0.31 dB geringer. Bezüglich des ungünstigsten S/N-Verhältnisses ist der Unterschied noch größer (0.66 dB).

Kanal	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(q_d)$	$p_U$	$10 \cdot \lg(q_U)$
ideal (vgl. D6c)	0.908	0.134	$0.194 \cdot 10^{-3}$	11.00 dB	$0.333 \cdot 10^{-3}$	10.64 dB
Zweiwege-Kanal	0.842	0.134	$0.311 \cdot 10^{-3}$	10.69 dB	$0.805 \cdot 10^{-3}$	9.98 dB

## D9 Inkohärente Demodulation bei ASK und FSK

(Die nachfolgenden Ergebnisse sind quantitativ ohne Gewähr)

a)

	$\ddot{o}(T_D)$	$\sigma_d$	$p_B$	$10 \cdot \lg(q_d)$	$p_U$	$10 \cdot \lg(q_U)$
Synchron-Demodul.	0.457	0.067	$0.175 \cdot 10^{-3}$	11.07 dB	$0.296 \cdot 10^{-3}$	10.72 dB

- b) Hüllkurvendemodulation führt hier zu einer deutlich höheren Bitfehlerwahrscheinlichkeit, da ohne Bandpaß dem zu demodulierenden Signal größere Rauschstörungen überlagert sind. Selbst mit optimaler Schwelle  $E_{\text{opt}} = 0.411$  beträgt der Störabstandsverlust ca. 2.75 dB. Die Schwelle  $E = 0.25$  ist extrem ungünstig, da die Hüllkurvendemodulation der stark verrauschten Signale diese nach oben verschiebt.

	mit eingestellter Schwelle $E = 0.25$		mit opt. Schwelle $E_{\text{opt}} = \mathbf{0.411}$	
	$p_B$	$10 \cdot \lg(q_d)$	$p_B$	$10 \cdot \lg(q_d)$
HKD ohne BP	0.206	-1.72 dB	$0.614 \cdot 10^{-2}$	7.97 dB

- c) Durch die Rauschbegrenzung am Eingang wird das System deutlich verbessert. Mit optimaler Schwelle  $E_{\text{opt}} = 0.295$  ist das Ergebnis vergleichbar mit dem bei Synchron-demodulation (der feststellbare Störabstandsgewinn von 0.1 dB ist allerdings sicher auf Simulationsungenauigkeiten zurückzuführen).

	mit eingestellter Schwelle $E = 0.25$		mit opt. Schwelle $E_{\text{opt}} = \mathbf{0.295}$	
	$p_B$	$10 \cdot \lg(q_d)$	$p_B$	$10 \cdot \lg(q_d)$
HKD mit BP	$0.382 \cdot 10^{-2}$	8.52 dB	$0.257 \cdot 10^{-3}$	10.82 dB

d)

$o(T_D)$	$m_o$	$\sigma_o$	$u(T_D)$	$m_u$	$\sigma_u$
0.451	0.017	0.057	0.114	0.067	0.038

Sowohl  $o(T_D)$  als auch  $u(T_D)$  werden durch das Rauschen nach oben verschoben, die unteren Augenlinien jedoch deutlich mehr. Dagegen sind die Streuungen nahezu gleich:  $\sigma_o \approx \sigma_u$ .

Im Vergleich zum kohärenten Empfänger (mit  $\bar{o}(T_D) = 0.457$ ) ist die Augenöffnung des inkohärenten Empfängers deutlich kleiner:  $\bar{o}(T_D) = 0.451 - 0.114 = 0.337$ .

Die resultierende Grenzfrequenz, die aus  $f_B/T = 0.8$  und  $f_E/T = 0.8$  berechnet werden kann, ist nun 0.64, also deutlich kleiner als im Unterpunkt a ( $f_E/T = 0.8$ ).

- e) Wäre  $\sigma_o = \sigma_u$ , so würde man aus Gl. (3.1) erhalten:

$$E_{\text{opt}} = \frac{(o(T_D) + m_o) + (u(T_D) + m_u)}{2} \approx 0.325 .$$

Da hier  $\sigma_u$  deutlich kleiner als  $\sigma_o$  ist, ist es günstiger, den Schwellenwert etwas niedriger zu legen:  $E_{\text{opt}} \approx 0.295$ . Dieser Wert ergibt sich auch aus Gl. (3.1).

- f) Ein Vergleich der Signale  $r(t)$  und  $r_B(t)$  zeigt die Rauschbegrenzung durch den Bandpaß. Das Signal  $b(t)$  nach dem Hüllkurvendemodulator ergibt sich nach dem in Bild 3.2 dargelegten Prinzip. Durch den anschließenden Gauß–Tiefpaß wird der vorher "gezackte" Signalverlauf  $b(t)$  geglättet (Signal  $d(t)$ ).

*Hinweis:* Der Bandpaß dient zur Störleistungsbegrenzung vor dem Demodulator, während der Tiefpaß lediglich zur Glättung des Detektionssignals durch Ausfiltern der hohen Frequenzanteile benötigt wird. Der Bandpaß vor dem Demodulator sollte daher eigentlich eine geringere Bandbreite (Grenzfrequenz) besitzen als der Glättungstiefpaß nach dem Demodulator.

- g) Ohne die beiden Filter ist stets  $r_{B1}(t) = r_{B0}(t)$  und damit auch  $b_1(t) = b_0(t)$ . Damit ist das Differenzsignal  $b(t)$  immer 0. Gleiches gilt auch für das Detektionssignal  $d(t)$ .
- h) Die beiden Signale  $r_{B1}(t)$  und  $r_{B0}(t)$  haben nun vorwiegend nur in den Bereichen signifikante Signalanteile, zu denen im Sendesignal  $s(t)$  die Modulationsfrequenz  $f_1 = 5/T$  bzw.  $f_0 = 3/T$  vorhanden sind. Die Signale  $b_1(t)$  und  $b_0(t)$  ergeben sich aus  $r_{B1}(t)$  und  $r_{B0}(t)$  durch jeweilige Hüllkurvendemodulation. Durch Differenzbildung und Tiefpaßfilterung entsteht das Signal  $d(t)$ , das bipolar ( $E = 0$ ) entschieden werden kann.
- i) Die Ergebnisse sind vergleichbar wie bei der ASK. Im Gegensatz zur kohärenten FSK ist nun die Schwelle  $E = 0$  nicht mehr optimal. Der Grund hierfür liegt darin, daß bei Vorhandensein von Rauschen die unteren und oberen Augenlinien durch die inkohärente Demodulation (etwas) unterschiedlich beeinflusst werden (siehe Punkt h).

mit eingestellter Schwelle $E = 0$		mit opt. Schwelle $E_{\text{opt}} = \mathbf{0.014}$	
$P_B$	$10 \cdot \lg(Q_d)$	$P_B$	$10 \lg(Q_d)$
$0.708 \cdot 10^{-3}$	10.08 dB	$0.650 \cdot 10^{-3}$	10.15 dB

$o(T_D)$	$m_o$	$\sigma_o$	$u(T_D)$	$m_u$	$\sigma_u$
0.368	-0.085	0.098	-0.338	0.086	0.097

**Anhang: Tabellen der Fehlerfunktionen**

$x$	$20 \cdot \lg(x)$	$\phi(x)$	$Q(x)$	$0,5 \cdot \operatorname{erfc}(x)$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}x} e^{-x^2}$
0.0	$-\infty$ dB	0.500000	0.500000E+00	0.500000E+00	$\infty$
0.2	-13.979 dB	0.579260	0.420740E+00	0.388649E+00	0.135517E+01
0.4	-7.959 dB	0.655422	0.344578E+00	0.285804E+00	0.600963E+00
0.6	-4.437 dB	0.725747	0.274253E+00	0.198072E+00	0.328018E+00
0.8	-1.938 dB	0.788145	0.211855E+00	0.128950E+00	0.185933E+00
1.0	0.000 dB	0.841345	0.158655E+00	0.786496E-01	0.103777E+00
1.2	1.584 dB	0.884930	0.115070E+00	0.448430E-01	0.556967E-01
1.4	2.923 dB	0.919243	0.807567E-01	0.238577E-01	0.283824E-01
1.6	4.082 dB	0.945201	0.547993E-01	0.118259E-01	0.136295E-01
1.8	5.105 dB	0.964070	0.359303E-01	0.545475E-02	0.613774E-02
2.0	6.021 dB	0.977250	0.227504E-01	0.233887E-02	0.258337E-02
2.2	6.848 dB	0.986097	0.139035E-01	0.931423E-03	0.101388E-02
2.4	7.604 dB	0.991802	0.819755E-02	0.344257E-03	0.370380E-03
2.6	8.299 dB	0.995339	0.466119E-02	0.118017E-03	0.125774E-03
2.8	8.943 dB	0.997445	0.255513E-02	0.375066E-04	0.396614E-04
3.0	9.542 dB	0.998650	0.134990E-02	0.110453E-04	0.116044E-04
3.2	10.103 dB	0.999313	0.687138E-03	0.301288E-05	0.314825E-05
3.4	10.630 dB	0.999663	0.336929E-03	0.760996E-06	0.791538E-06
3.6	11.126 dB	0.999841	0.159109E-03	0.177931E-06	0.184347E-06
3.8	11.596 dB	0.999928	0.723480E-04	0.385020E-07	0.397557E-07
4.0	12.041 dB	0.999968	0.316713E-04	0.770863E-08	0.793640E-08
4.2	12.465 dB	0.999987	0.133457E-04	0.142774E-08	0.146619E-08
4.4	12.869 dB	0.999995	0.541254E-05	0.244585E-09	0.250611E-09
4.6	13.255 dB	0.999998	0.211246E-05	0.387480E-10	0.396247E-10
4.8	13.625 dB	0.999999	0.793328E-06	0.567606E-11	0.579440E-11
5.0	13.979 dB	1.000000	0.286652E-06	0.768730E-12	0.783543E-12
5.2	14.320 dB	1.000000	0.996443E-07	0.962455E-13	0.979642E-13
5.4	14.648 dB	1.000000	0.333204E-07	0.111384E-13	0.113233E-13
5.6	14.964 dB	1.000000	0.107176E-07	0.119142E-14	0.120985E-14
5.8	15.269 dB	1.000000	0.331574E-08	0.117780E-15	0.119481E-15
6.0	15.563 dB	1.000000	0.986589E-09	0.107599E-16	0.109054E-16
6.2	15.848 dB	1.000000	0.282316E-09	0.908340E-18	0.919860E-18
6.4	16.124 dB	1.000000	0.776883E-10	0.708539E-19	0.716989E-19
6.6	16.391 dB	1.000000	0.205579E-10	0.510666E-20	0.516397E-20
6.8	16.650 dB	1.000000	0.523095E-11	0.340042E-21	0.343644E-21
7.0	16.902 dB	1.000000	0.127981E-11	0.209191E-22	0.211284E-22
7.2	17.147 dB	1.000000	0.301063E-12	0.118891E-23	0.120015E-23
7.4	17.385 dB	1.000000	0.680922E-13	0.624192E-25	0.629792E-25
7.6	17.616 dB	1.000000	0.148065E-13	0.302727E-26	0.305304E-26
7.8	17.842 dB	1.000000	0.309536E-14	0.135621E-27	0.136717E-27
8.0	18.062 dB	1.000000	0.622097E-15	0.561215E-29	0.565533E-29
8.2	18.276 dB	1.000000	0.120194E-15	0.214511E-30	0.216084E-30
8.4	18.486 dB	1.000000	0.223240E-16	0.757313E-32	0.762593E-32
8.6	18.690 dB	1.000000	0.398579E-17	0.246937E-33	0.248584E-33
8.8	18.890 dB	1.000000	0.684079E-18	0.743680E-35	0.748421E-35
9.0	19.085 dB	1.000000	0.112859E-18	0.206852E-36	0.208113E-36
9.2	19.276 dB	1.000000	0.178976E-19	0.531368E-38	0.534471E-38
9.4	19.463 dB	1.000000	0.272817E-20	0.126064E-39	0.126766E-39
9.6	19.645 dB	1.000000	0.399722E-21	0.276196E-41	0.277737E-41
9.8	19.825 dB	1.000000	0.562928E-22	0.560519E-43	0.560519E-43
10.0	20.000 dB	1.000000	0.761985E-23	0.140130E-44	0.140130E-44

Die vorherige Tabelle gilt für äquidistante  $x$ -Werte, die nachfolgende für äquidistante dB-Werte.

$x$	$20 \cdot \lg(x)$	$\phi(x)$	$Q(x)$	$0,5 \cdot \operatorname{erfc}(x)$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}x} e^{-x^2}$
1.000	.00 dB	0.841345	0.158655E+00	0.786496E-01	0.103777E+00
1.029	.25 dB	0.848307	0.151693E+00	0.727642E-01	0.950314E-01
1.059	.50 dB	0.855258	0.144742E+00	0.670652E-01	0.867179E-01
1.090	.75 dB	0.862184	0.137816E+00	0.615667E-01	0.788379E-01
1.122	1.00 dB	0.869073	0.130927E+00	0.562820E-01	0.713922E-01
1.155	1.25 dB	0.875910	0.124090E+00	0.512231E-01	0.643805E-01
1.189	1.50 dB	0.882682	0.117318E+00	0.464013E-01	0.578013E-01
1.223	1.75 dB	0.889374	0.110626E+00	0.418262E-01	0.516521E-01
1.259	2.00 dB	0.895971	0.104029E+00	0.375061E-01	0.459288E-01
1.296	2.25 dB	0.902458	0.975417E-01	0.334476E-01	0.406256E-01
1.334	2.50 dB	0.908820	0.911804E-01	0.296553E-01	0.357354E-01
1.372	2.75 dB	0.915040	0.849600E-01	0.261321E-01	0.312490E-01
1.413	3.00 dB	0.921104	0.788959E-01	0.228786E-01	0.271559E-01
1.454	3.25 dB	0.926997	0.730031E-01	0.198936E-01	0.234433E-01
1.496	3.50 dB	0.932704	0.672961E-01	0.171734E-01	0.200970E-01
1.540	3.75 dB	0.938211	0.617891E-01	0.147111E-01	0.171010E-01
1.585	4.00 dB	0.943505	0.564953E-01	0.125009E-01	0.144377E-01
1.631	4.25 dB	0.948573	0.514269E-01	0.105323E-01	0.120881E-01
1.679	4.50 dB	0.953405	0.465951E-01	0.879383E-02	0.100320E-01
1.728	4.75 dB	0.957990	0.420097E-01	0.727250E-02	0.824821E-02
1.778	5.00 dB	0.962321	0.376790E-01	0.595387E-02	0.671483E-02
1.830	5.25 dB	0.966390	0.336096E-01	0.482252E-02	0.540952E-02
1.884	5.50 dB	0.970194	0.298063E-01	0.386224E-02	0.430983E-02
1.939	5.75 dB	0.973728	0.262719E-01	0.305640E-02	0.339355E-02
1.995	6.00 dB	0.976993	0.230074E-01	0.238829E-02	0.263899E-02
2.054	6.25 dB	0.979989	0.200113E-01	0.184142E-02	0.202531E-02
2.113	6.50 dB	0.982720	0.172803E-01	0.139980E-02	0.153275E-02
2.175	6.75 dB	0.985192	0.148075E-01	0.104828E-02	0.114294E-02
2.239	7.00 dB	0.987413	0.125871E-01	0.772675E-03	0.839009E-03
2.304	7.25 dB	0.989391	0.106087E-01	0.560054E-03	0.605749E-03
2.371	7.50 dB	0.991139	0.886107E-02	0.398796E-03	0.429712E-03
2.441	7.75 dB	0.992669	0.733107E-02	0.278682E-03	0.299204E-03
2.512	8.00 dB	0.993996	0.600439E-02	0.190908E-03	0.204260E-03
2.585	8.25 dB	0.995134	0.486564E-02	0.128054E-03	0.136557E-03
2.661	8.50 dB	0.996101	0.389863E-02	0.839995E-04	0.892946E-04
2.738	8.75 dB	0.996913	0.308676E-02	0.538158E-04	0.570355E-04
2.818	9.00 dB	0.997587	0.241331E-02	0.336273E-04	0.355362E-04
2.901	9.25 dB	0.998138	0.186176E-02	0.204635E-04	0.215656E-04
2.985	9.50 dB	0.998584	0.141612E-02	0.121089E-04	0.127275E-04
3.073	9.75 dB	0.998939	0.106116E-02	0.695578E-05	0.729274E-05
3.162	10.00 dB	0.999217	0.782701E-03	0.387211E-05	0.404995E-05
3.255	10.25 dB	0.999432	0.567725E-03	0.208500E-05	0.217578E-05
3.350	10.50 dB	0.999595	0.404562E-03	0.108385E-05	0.112858E-05
3.447	10.75 dB	0.999717	0.282936E-03	0.542794E-06	0.564021E-06
3.548	11.00 dB	0.999806	0.193986E-03	0.261307E-06	0.270989E-06