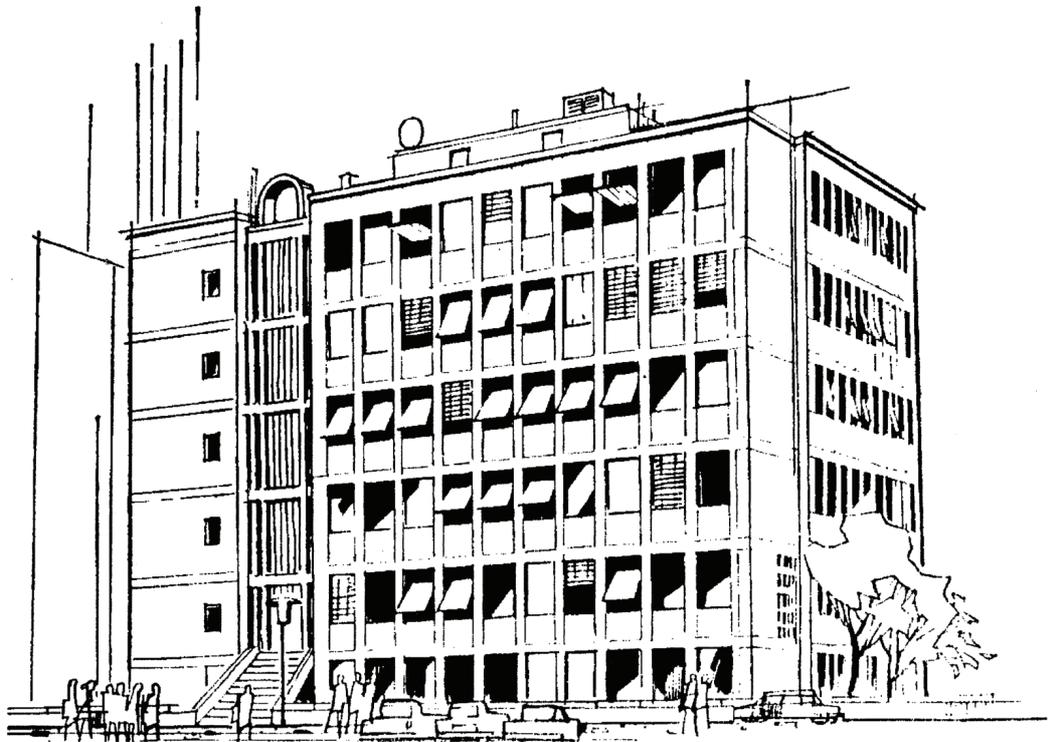


---

G. Söder: Simulation digitaler Übertragungssysteme

# Analoge Modulationsverfahren

Lehrstuhl für Nachrichtentechnik  
Technische Universität München





## Vorwort

Der erste Versuch *Analoge Modulationsverfahren* des Praktikums *Simulation digitaler Übertragungssysteme* soll die in Vorlesungen und Übungen erläuterte Theorie der analogen Amplituden-, Frequenz- und Phasenmodulation anschaulich darstellen, sowie deren wesentliche Gemeinsamkeiten und Unterschiede verdeutlichen. Behandelt werden neben den systemtheoretischen Beschreibungen der in der Praxis eingesetzten Modulatoren und Demodulatoren insbesondere die Auswirkungen von linearen und nichtlinearen Verzerrungen sowie die Beeinträchtigung durch Rauschen. Weiterhin wird auf die Möglichkeit der Basisbanddarstellung von Bandpaßsignalen näher eingegangen.

Vielleicht erscheint es manchen von Ihnen als unlogisch und zudem im Zeitalter der Digitalsysteme auch als unangemessen, daß der erste Versuch eines Praktikums namens *Digitale Übertragungssysteme* die altherbekannten Analogsysteme behandelt. Ich kann mich dieser Meinung aus zwei Gründen nicht anschließen: Zum einen sind auch die heute eingesetzten Modulationsverfahren (z.B. ASK, FSK, BPSK, QPSK, DQPSK, QAM) nichts anderes als – eventuell leicht abgewandelte – Varianten der Analogverfahren mit digitalem Nachrichtensignal. Zum anderen läßt sich die typische, nachrichtentechnische Vorgehensweise bei der Beschreibung und Untersuchung von Bandpaßsystemen anhand von AM, FM und PM sehr viel allgemeingültiger aufzeigen als bei ASK, FSK und PSK.

Die vorliegende Anleitung gliedert sich in die drei Kapitel *Theoretische Grundlagen*, *Vorbereitungsfragen* und *Versuchsdurchführung*. Anhand dieses Heftes und des zugrundeliegenden Lehrprogramms "amv" sollte ein Teilnehmer mit Grundkenntnissen der Nachrichtentechnik in der Lage sein, sich die wesentlichen Merkmale der analogen Modulationsverfahren in etwa 8 Stunden (jeweils ca. 4 Stunden für Vorbereitung sowie Versuchsdurchführung) zu erarbeiten.

Die Musterlösungen der Vorbereitungsfragen und der Versuchsdurchführung sind am Ende des Heftes (ab Seite 67) beigelegt. Ich möchte an dieser Stelle – ebenso ausdrücklich wie überflüssig – erwähnen, daß Sie sicher einen besseren Lernerfolg erzielen, wenn Sie diese Musterlösungen nur zur Kontrolle Ihrer Ergebnisse benutzen. Auf Seite IV finden Sie noch eine Zusammenstellung einschlägiger Literaturstellen, die für eine erfolgreiche Versuchsdurchführung durchaus nützlich sein können, jedoch nicht vorausgesetzt werden. Hierfür müßte diese Anleitung ausreichen.

Das interaktive WINDOWS-Demonstrations- und Lehrprogramm "amv" wurde von Herrn *Dipl.-Ing. Andreas Widmann* im Zeitraum vom 1. 6. 1995 bis zum 11. 1. 1996 im Rahmen seiner von mir betreuten Diplomarbeit am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik der Technischen Universität München mit großer Sorgfalt konzipiert und implementiert. Herr *Armin Erben* hat während seiner Zulassungsarbeit im Studiengang "Lehramt an beruflichen Schulen" Programmteile zur Darstellung der Amplitudenmodulation erstellt.

Das lauffähige Programm und die Postscript-Dateien der Versuchsanleitung (erstellt mit INTERLEAF bzw. WINWORD) finden Sie auf der zugehörigen CD im Verzeichnis \LNTWIN\AMV bzw. \TEXTE\SIM2\AMV\PS. Die Installation des ausführbaren Programms erfolgt wie unter WINDOWS üblich. Ebenso gelten für die Programmbe-  
nutzung die unter WINDOWS üblichen Konventionen, insbesondere auch hinsichtlich  
Hilfefunktionen. Die theoretischen Grundlagen sowie Vorbereitungsfragen und Ver-  
suchsdurchführung, beide jeweils mit Musterlösungen, sind auch direkt vom Programm  
aus abrufbar (allerdings unterscheiden sich derzeit die Online-Texte noch geringfügig  
von dieser Anleitung).

Die Autoren danken Herrn *Dr.-Ing. Dieter Heidner* vom Lehrstuhl für Nachrichtentechnik der TU München, dessen PASCAL-Lehrprogramme uns häufig gut verwertbare Anregungen gaben. Bei der Erstellung der theoretischen Grundlagen wurde öfters das Vorlesungsmanuskript von Herrn *em. Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Hans Marko* und die von seinem damaligen Übungsassistenten, Herrn *Prof. Dr.-Ing. Jürgen Franz* (jetzt Fachhochschule Düsseldorf), erstellte Aufgabensammlung zu Rate gezogen. Ebenso danke ich meinen Kollegen, Herrn *Dr.-Ing. Klaus Eichin*, Herrn *Prof. Dr.-Ing. Frowin Derr* (jetzt Fachhochschule Ulm) und Herrn *Dr.-Ing. Norbert Hanik* (jetzt Telekom Berlin) für viele wertvolle Diskussionen und Anregungen.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg und Spaß beim Durcharbeiten dieses Versuches.

München, im Oktober 1999

Günter Söder

*Hinweis:* Das Lehrprogramm "amv" ist Bestandteil des Softwarepaketes *LNTwin*, das wir ebenso wie die Programme der Reihe *LNTsim* an Hochschuleinrichtungen zu günstigen Konditionen weitergeben. Bei diesbezüglichen Fragen – aber auch bei Kritik jeder Art – wenden Sie sich bitte an:

Priv.-Doz. Dr.-Ing. habil. Günter Söder  
Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Technische Universität München  
D-80290 München, Tel: (089) 289-23486, Fax: (089) 289-23490  
Email: guenter.soeder@ei.tum.de

Unter gleicher Adresse können Sie die Videos *Amplitudenmodulation* (von Reinhold Wilhelm) und *Winkelmodulation* (von Ronald Posch) erhalten. Beide wurden als Zulassungsarbeiten für das Lehramt an beruflichen Schulen erstellt. Dauer jeweils 30 Minuten.

## Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Theoretische Grundlagen</b>                                   | <b>1</b>  |
| 1.1      | <b>Allgemeines</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1.1    | Blockschaltbild eines Nachrichtenübertragungssystems             | 1         |
| 1.1.2    | Zielsetzungen von Modulation und Demodulation                    | 2         |
| 1.1.3    | Allgemeingültiges Modell der Modulation                          | 3         |
| 1.1.4    | Darstellungsformen harmonischer Schwingungen                     | 4         |
| 1.2      | <b>Amplitudenmodulation (AM)</b>                                 | <b>6</b>  |
| 1.2.1    | Ideale Amplitudenmodulation                                      | 6         |
| 1.2.2    | ZSB-Amplitudenmodulation mit Träger                              | 9         |
| 1.2.3    | Zeigerdiagramm und Ortskurve                                     | 11        |
| 1.2.4    | ESB-Amplitudenmodulation   | 14        |
| 1.3      | <b>AM-Demodulation</b>   | <b>17</b> |
| 1.3.1    | Synchrondemodulation   | 17        |
| 1.3.2    | Hüllkurvendemodulation   | 18        |
| 1.4      | <b>Winkelmodulation (PM, FM)</b>                                 | <b>20</b> |
| 1.4.1    | Winkelfunktion bei Phasenmodulation                              | 20        |
| 1.4.2    | Realisierung eines Phasenmodulators (Ringmodulator)              | 21        |
| 1.4.3    | Phasenmoduliertes Signal bei cosinusförmigem Nachrichtensignal   | 21        |
| 1.4.4    | Winkelfunktion bei Frequenzmodulation                            | 23        |
| 1.4.5    | Frequenzmoduliertes Signal bei cosinusförmigem Nachrichtensignal | 23        |
| 1.4.6    | Spektren bei Winkelmodulation                                    | 24        |
| 1.5      | <b>Demodulation winkelmodulierter Signale</b>                    | <b>26</b> |
| 1.5.1    | Ideale Phasendemodulation  | 26        |
| 1.5.2    | Näherungsweise Phasendemodulation mit Ringmodulator              | 26        |
| 1.5.3    | FM-Demodulation  | 27        |
| 1.6      | <b>Verzerrungen</b>  | <b>28</b> |
| 1.6.1    | Lineare Kanalverzerrungen  | 28        |
| 1.6.2    | Lineare Verzerrungen im demodulierten AM-Signal                  | 28        |
| 1.6.3    | Nichtlineare Verzerrungen durch Hüllkurvendemodulation           | 29        |
| 1.6.4    | Bandbegrenzung eines winkelmodulierten Signals                   | 31        |
| 1.7      | <b>Einfluß von Rauschstörungen</b>                               | <b>32</b> |
| <b>2</b> | <b>Vorbereitungsfragen</b>                                       | <b>35</b> |
| V1       | Spektrum der Amplitudenmodulation                                | 35        |
| V2       | Einseitenband-Amplitudenmodulation                               | 36        |
| V3       | Synchrondemodulation   | 38        |
| V4       | Frequenzmodulation   | 39        |
| V5       | Nichtlineare Verzerrungen  | 41        |
| V6       | Lineare Verzerrungen   | 43        |
| V7       | Einfluß von Rauschstörungen                                      | 45        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>3</b> | <b>Versuchsdurchführung</b> .....                    | <b>47</b> |
| D1       | Reelles und komplexes Signal .....                   | 47        |
| D2       | Signale und Spektren bei ZSB-Modulation .....        | 49        |
| D3       | Synchrondemodulation .....                           | 51        |
| D4       | Zeigerdiagramm und Ortskurve .....                   | 53        |
| D5       | Hüllkurvendemodulation .....                         | 55        |
| D6       | Einseitenbandmodulation .....                        | 57        |
| D7       | Phasenmodulation .....                               | 59        |
| D8       | Zusammenhang zwischen PM und FM .....                | 61        |
| D9       | PM bei einer Summe harmonischer Schwingungen .....   | 62        |
| D10      | Bandbegrenzung bei Phasenmodulation .....            | 63        |
| D11      | Lineare Verzerrungen .....                           | 65        |
| <b>4</b> | <b>Musterlösungen der Vorbereitungsfragen</b> .....  | <b>67</b> |
| <b>5</b> | <b>Musterlösungen der Versuchsdurchführung</b> ..... | <b>73</b> |

## Literaturverzeichnis

- [1] Hagenauer, J.: *Vorlesungsmanskript zur Vorlesung "Nachrichtentechnik 2"*. Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Technische Universität München, 1998.
- [2] Mäusl, R.: *Analoge Modulationsverfahren*. Heidelberg: Hüthig-Verlag, 1988.
- [3] Marko, H.: *Vorlesungsmanskript zur Vorlesung "Nachrichtentechnik 2"*. Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Technische Universität München, 1989.
- [4] Marko, H.: *Methoden der Systemtheorie*. 3. Auflage. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [5] Söder, G.: *Modellierung, Simulation und Optimierung von Nachrichtensystemen*. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [6] Söder, G.: *Vorlesungsmanskript zur Vorlesung "Nachrichtentechnik 2 (LB)"*. Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Technische Universität München, 1999.
- [7] Stadler, E.: *Modulationsverfahren*. Würzburg: Vogel-Buchverlag, 1986.

# 1 Theoretische Grundlagen

**Inhalt:** Dieser Versuch soll die Eigenschaften der analogen Modulationsverfahren (Amplituden-, Frequenz- und Phasenmodulation) und die zugehörigen Demodulatoren anhand von Signalverläufen, Spektren, Zeigerdiagrammen und Ortskurven verdeutlichen. Außerdem werden die Auswirkungen von (linearen und nichtlinearen) Verzerrungen auf das demodulierte Signal beschrieben und auf die Möglichkeit der Basisbanddarstellung von Bandpaßsignalen ausführlicher eingegangen.

## 1.1 Allgemeines

Die im folgenden definierten und interpretierten Systemgrößen spielen nicht nur zur Beschreibung der klassischen analogen Modulationsverfahren eine große Rolle, sondern sind auch für das Verständnis der heute üblichen digitalen Modulationsverfahren wie *ASK (Amplitude Shift Keying)*, *FSK (Frequency Shift Keying)* und *PSK (Phase Shift Keying)* von großer Wichtigkeit. Diese sind Thema des zweiten Praktikumstermins.

### 1.1.1 Blockschaltbild eines Nachrichtenübertragungssystems

Bild 1.1 zeigt ein sehr allgemeines Modell eines Nachrichtenübertragungssystems, das für Analog- und Digitalübertragung in gleicher Weise gültig ist. Die *Nachrichtenquelle* liefert das zu übertragende Quellensignal  $q(t)$ , das sowohl ein Sprach- bzw. Musiksignal (z.B. bei Telefon und Rundfunk), ein Bildsignal (z.B. beim Fernsehen bzw. Satellitenbilder) oder ein Datensignal (z.B. zur Prozeßsteuerung, Datei im Internet) bezeichnen kann.

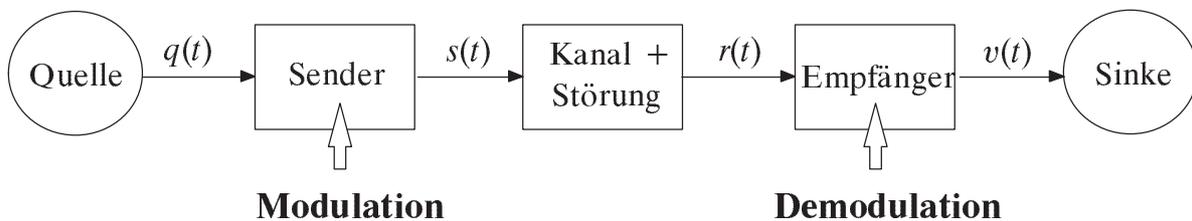


Bild 1.1: Allgemeines Modell eines Nachrichtenübertragungssystems.

Das Quellensignal  $q(t)$  soll über den Kanal, der beispielsweise eine elektrische Leitung (Zweidrahtleitung, Koaxialkabel), ein Lichtwellenleiter (Glasfaser) oder eine Funkverbindung (z.B. Mobilfunk, Richtfunk, Satellitenverbindung etc.) sein kann, zur räumlich entfernten Sinke übertragen werden. Diese kennzeichnet z.B. einen Anrufaufzeichner, ein Videoband oder einen Host im Internet.

Das Sinkensignal  $v(t)$  am anderen Ende des Übertragungssystems soll sich "möglichst wenig" vom Quellensignal  $q(t)$  unterscheiden. Im Idealfall sollte  $v(t) = q(t)$  sein. Ist das Nachrichtensystem wenigstens verzerrungs- und rauschfrei, so muß gelten:

$$v(t) = \alpha \cdot q(t - \tau) . \quad (1.1)$$

Hierbei beschreibt  $\alpha < 1$  einen frequenzunabhängigen Dämpfungsfaktor und  $\tau$  eine (bei unidirektionaler Übertragung nicht weiter störende) Signalverzögerung.

Häufig ist der Übertragungskanal für eine direkte Übertragung des Quellensignals  $q(t)$  ungeeignet, z.B. weil dieses für ihn ungünstige Frequenzen beinhaltet. Abhilfe schafft hier möglicherweise eine geeignete Signalumsetzung beim Sender (*Modulation*) und die entsprechende Signalmrücksetzung beim Empfänger (*Demodulation*).

### 1.1.2 Zielsetzungen von Modulation und Demodulation

#### a) Anpassung des Sendesignals an die Übertragungseigenschaften des Kanals:

Verschiebung des Nachrichtensignals in eine andere Frequenzlage mit günstigeren Kanaleigenschaften durch Zusetzen eines höherfrequenten Trägersignals.

Beispiele:

- *Rundfunk*: Sprache und Musik im Frequenzbereich von 15 Hz ... 20 kHz (sehr gute Qualität); Funkübertragung ist jedoch erst ab ca. 100 kHz möglich; deshalb vorher Umsetzung auf 525 ... 1610 kHz (MW) bzw. 87.5 ... 108 MHz (UKW).
- *Fernsehen*: Bildsignal im Bereich 0 ... 5 MHz (gute Qualität für Analogtechnik) wird umgesetzt auf 41 ... 68 / 174 ... 223 MHz (VHF) bzw. 470 ... 850 MHz (UHF).
- *Mobilfunk*: C-Netz (analog, 450 MHz), D-Netz (digital "D1", "D2", 900 MHz), E-Netz (digital, 1.8 GHz).
- *Glasfaser*: Umsetzung des elektrischen Signals in Licht, d.h. auf Frequenzen zwischen 200 und 350 THz (entsprechend 1.55 bis 0.85  $\mu\text{m}$  Wellenlänge).
- *Modem*: Umsetzung des niederratigen (z.B. rechteckförmigen) Datensignals in ein höherfrequentes (sinusförmiges) Signal, da eine Telefonleitungen für sehr niedrige Frequenzen ("Gleichstrom") ungeeignet ist.

#### b) Anpassung an das Störspektrum:

Verschieben des Nutzsignals in einen Frequenzbereich, in dem (äußere) Störungen nur eine untergeordnete Rolle spielen.

#### c) Bündelung von Kanälen (Frequenzmultiplex):

Mehrere Sprachsignale (Kanäle) werden sendeseitig mit unterschiedlichen Trägerfrequenzen moduliert, zusammengefaßt und gemeinsam übertragen. Die notwendige Kanalseparierung beim Empfänger erfolgt durch Demodulation mit unterschiedlichen Trägerfrequenzen und anschließender Filterung.

Beispiel: Hierarchischer Aufbau des Fernsprechnetzes

- 3 Kanäle à 4 kHz ergeben eine Vorgruppe (12 kHz),
- 4 Vorgruppen à 12 kHz ergeben eine Primärgruppe (48 kHz),
- bis zu 10800 Kanäle (V10800) mit ca. 60 MHz Gesamtbandbreite.

#### d) Verbesserung des Signalrauschabstandes (Qualität):

Bessere Rauschunterdrückung (meßbar durch einen größeren Störabstand) und damit eine höhere Qualität auf Kosten einer größeren Bandbreite. Beispiele hierfür sind FM (Frequenzmodulation), PCM (Pulsmodulation), Spread Spectrum-Systeme.

### 1.1.3 Allgemeingültiges Modell der Modulation

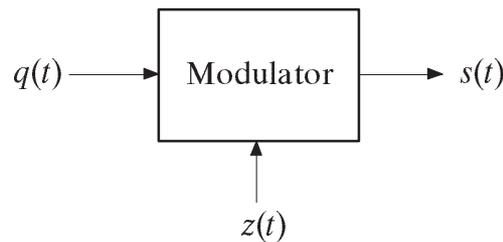


Bild 1.2: Ein sehr allgemeines Modell eines (analogen) Modulators.

Das modulierte Signal  $s(t)$ , im folgenden auch *Sendesignal* genannt, wird aus dem (niederfrequenten) Nachrichtensignal  $q(t)$  unter Zuhilfenahme eines höherfrequenten Trägersignals  $z(t)$  erzeugt (Bild 1.2). Dieses sei eine harmonische Schwingung, gekennzeichnet durch die Amplitude  $\hat{z}$ , die Träger(kreis)frequenz  $\omega_T = 2\pi f_T$  und die Trägerphase  $\varphi_T$ :

$$z(t) = \hat{z} \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T) . \quad (1.2)$$

Entsprechend dieser, auch bei der Fourierreihendarstellung verwendeten Definition bedeutet ein positiver Wert von  $\varphi_T$  eine Verzögerung gegenüber einem cosinusförmigen Verlauf. Beispielsweise steht der Phasenwinkel  $\varphi_T = 90^\circ$  für das Sinussignal.

Anzumerken ist, daß zur Beschreibung der Modulationsverfahren meist der Phasenwinkel mit umgekehrtem Vorzeichen verwendet wird. Um mit der einschlägigen Literatur übereinzustimmen, wird dies auch hier berücksichtigt. Mit  $\phi_T = -\varphi_T$  gilt somit auch:

$$z(t) = \hat{z} \cdot \cos(\omega_T \cdot t + \phi_T) . \quad (1.3)$$

Das Sendesignal lautet in allgemeiner (allerdings etwas vereinfacht dargestellter) Form:

$$s(t) = a(t) \cdot \cos(\omega(t) \cdot t + \phi(t)) . \quad (1.4)$$

Hierbei bezeichnen:  $a(t)$  eine zeitabhängige Amplitude,  
 $\omega(t)$  eine zeitabhängige (Kreis-)Frequenz,  
 $\phi(t)$  eine zeitabhängige Phase.

Als Sonderfälle sind in Gl. (1.4) enthalten:

- **Amplitudenmodulation (AM):**  
 Hier ändert sich der Verlauf der Amplitude  $a(t)$  entsprechend dem Nachrichtensignal  $q(t)$ , während die Frequenz  $\omega(t) = \omega_T$  und die Phase  $\phi(t) = \phi_T$  jeweils konstant sind.
- **Phasenmodulation (PM):**  
 Bei konstanter Amplitude  $a(t) = \hat{z}$  und konstanter Frequenz  $\omega(t) = \omega_T$  ändert sich die Phasenlage  $\phi(t)$  entsprechend dem Nachrichtensignal  $q(t)$ .
- **Frequenzmodulation (FM):**  
 Die Amplitude  $a(t) = \hat{z}$  und die Phase  $\phi(t) = \phi_T$  sind entsprechend dem Trägersignal  $z(t)$  konstant, der Frequenzverlauf  $\omega(t)$  ändert sich mit  $q(t)$ . *Hinweis:* In Abschnitt 1.4 wird gezeigt werden, daß bei FM die Verhältnisse doch etwas komplizierter sind.

Gemeinsam ist all diesen Modulationsarten, daß  $s(t)$  ein Bandpaßsignal ist und somit in allen Fällen entsprechend den Abschnitten 1.1.4 bzw. 1.2.3 dargestellt werden kann.

### 1.1.4 Darstellungsformen harmonischer Schwingungen

Die Darstellungsmöglichkeiten eines Bandpaßsignals sollen hier am einfachsten Beispiel, nämlich für ein unmoduliertes Signal  $s(t)$ , aufgezeigt werden. Die in Bild 1.3 skizzierte harmonische Schwingung ist durch drei Parameter für alle Zeiten  $t$  eindeutig festgelegt.

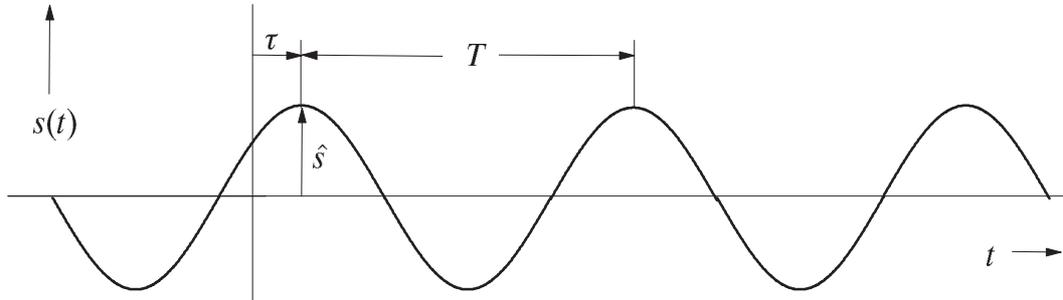


Bild 1.3: Harmonische Schwingung  $s(t)$ .

Als Parameter wurden hier die Amplitude  $\hat{s}$ , die Periodendauer  $T$  sowie die Verschiebung  $\tau$  gegenüber einer Cosinusfunktion gewählt. Somit kann geschrieben werden:

$$s(t) = \hat{s} \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot (t - \tau)}{T}\right) . \quad (1.5)$$

Um auf die übliche Darstellungsform entsprechend Gl. (1.2),

$$s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T) , \quad (1.6)$$

zu kommen, sind folgende Umrechnungen notwendig:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T} , \quad \varphi_T = \omega_T \cdot \tau = 2\pi \cdot \frac{\tau}{T} . \quad (1.7)$$

Der Phasenwinkel  $\varphi_T$  hat somit das gleiche Vorzeichen wie die Verzögerungszeit  $\tau$  ( $\varphi_T$  jedoch das umgekehrte). Ein positiver Wert von  $\varphi_T$  sagt deshalb aus, daß – wie beispielsweise in Bild 1.3 dargestellt – die Schwingung gegenüber einem Cosinussignal nachläuft.

Die Spektralfunktion  $S(f) \bullet \text{---} \circ s(t)$  besteht aus zwei Diracfunktionen bei  $\pm f_T$ , wobei  $f_T = \omega_T/(2\pi) = 1/T$  ist, und (im allgemeinen) komplexen Impulsgewichten:

$$S(f) = \frac{\hat{s}}{2} \cdot e^{-j\varphi_T} \cdot \delta(f - f_T) + \frac{\hat{s}}{2} \cdot e^{j\varphi_T} \cdot \delta(f + f_T) . \quad (1.8)$$

Es wird sich in den späteren Abschnitten zeigen, daß durch die Einführung des analytischen Signals  $s_+(t)$  und der dazugehörigen Spektralfunktion  $S_+(f) \bullet \text{---} \circ s_+(t)$  manche Eigenschaften der Bandpaßsignale leichter interpretiert werden können. Dabei gilt:

$$S_+(f) = S(f) \cdot (1 + \text{sign}(f)) , \quad (1.9)$$

wobei die Signumfunktion für positives  $f$  gleich  $+1$  und für negatives  $f$  gleich  $-1$  ist. Die durch Gl. (1.9) beschriebene Operation entspricht demnach einem "Abschneiden" der negativen und dem Verdoppeln der positiven Frequenzanteile der Spektralfunktion  $S(f)$ . Bild 1.4 verdeutlicht diesen Sachverhalt für ein cosinusförmiges Signal ( $\varphi_T = 0$ ).

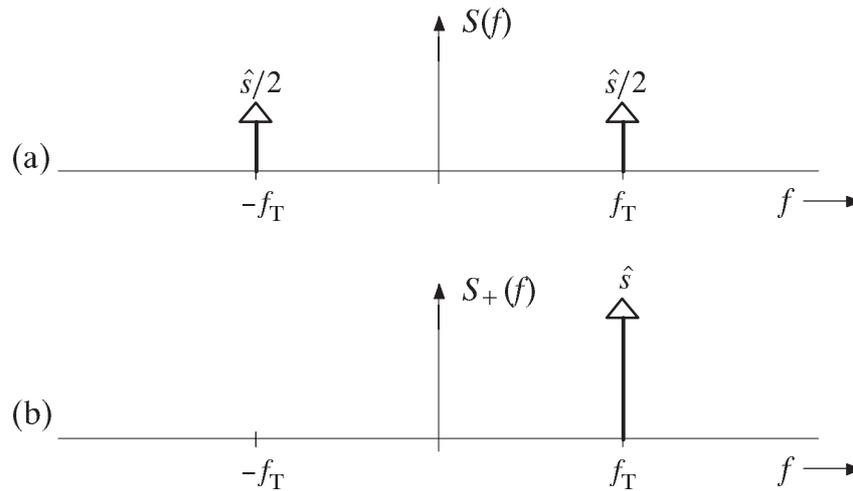
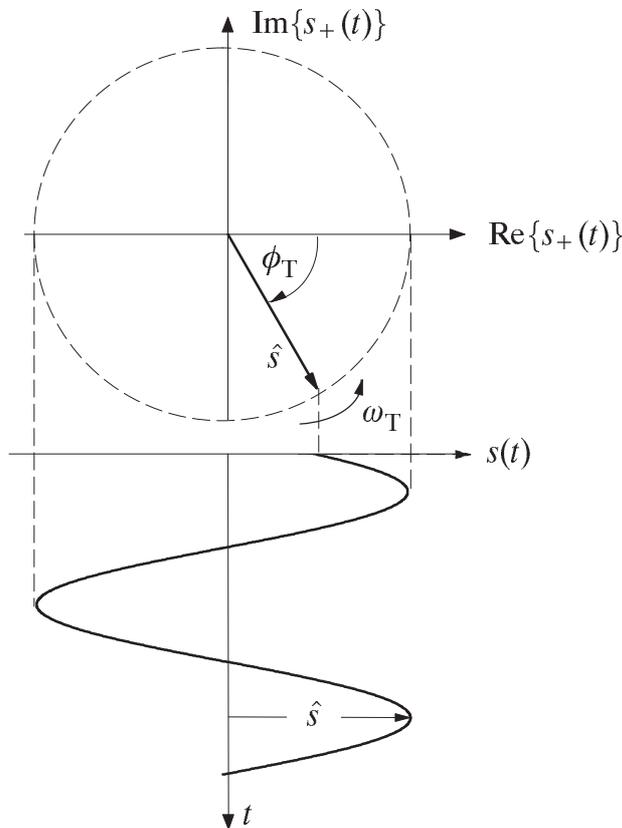


Bild 1.4: (a) Spektrum  $S(f)$  eines cosinusförmigen Signals  $s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega_T \cdot t)$ ,  
 (b) Spektrum  $S_+(f)$  des dazugehörigen analytischen Signals  $s_+(t) = \hat{s} \cdot e^{j\omega_T t}$ .

Das zu  $s(t)$  gemäß Gl. (1.6) gehörige analytische Signal lautet (mit der Phase  $\varphi_T$ ):

$$s_+(t) = \hat{s} \cdot e^{j(\omega_T t - \varphi_T)} . \tag{1.10}$$

Dieses Ergebnis erhält man aus der Fourierrücktransformation von  $S_+(f)$  durch Anwendung des Verschiebungssatzes (vgl. Kapitel 3, Versuch D1). Bild 1.5 zeigt das analytische Signal der harmonischen Schwingung  $s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega_T \cdot t - 60^\circ)$  in der komplexen Ebene.



1. Bei  $t=0$  gilt mit  $\varphi_T = -60^\circ$  :  

$$s_+(t=0) = \hat{s} \cdot e^{j\varphi_T} .$$
2. Zeiger dreht mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ("Kreisfrequenz")  $\omega_T$  in "positiver" Richtung (d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn) mit genau einer Umdrehung pro Periodendauer  $T$ .
3. Die Projektion von  $s_+(t)$  auf die reelle Achse ergibt das reelle Signal  $s(t)$ :  

$$s(t) = \text{Re}\{s_+(t)\} .$$

Bild 1.5: Darstellung des analytischen Signals  $s_+(t)$  einer harmonischen Schwingung ( $\varphi_T = 60^\circ, \phi_T = -60^\circ$ ) in der komplexen Ebene ("Zeigerdiagramm").

## 1.2 Amplitudenmodulation (AM)

Der Abschnitt 1.2.1 beschreibt die Zweiseitenband–Amplitudenmodulation ohne Träger (*Ideale Amplitudenmodulation*). Diese wird z.B. im UKW–Stereo–Rundfunk angewandt, indem man das Differenzsignal zwischen dem linken und dem rechten Kanal bei 38 kHz ohne Träger amplitudenmoduliert. Anschließend werden das Summensignal der beiden Kanäle (welches im Frequenzbereich von 30 Hz bis 15 kHz liegt), ein Hilfsträger bei 19 kHz und das modulierte Differenzsignal zusammengefaßt und frequenzmoduliert.

Die in Abschnitt 1.2.2 behandelte *Zweiseitenband–Amplitudenmodulation mit Träger* findet im Rundfunk auf Kurz–, Mittel– und Langwelle noch heute Anwendung. Signalleistungen in der Größenordnung von 100 kW werden hier noch mit Röhren erzeugt.

Um bei der Übertragung von Telefongesprächen die Kanalbandbreite möglichst effizient zu nutzen, bedient man sich hierbei der *Einseitenband–Amplitudenmodulation* ohne Träger (siehe Abschnitt 1.2.4). Um allzu großen Schaltungsaufwand zu vermeiden, faßt man jeweils drei Gesprächskanäle zu Vorgruppen zusammen, die dann in einer gemeinsamen zweiten Umsetzungsstufe in die endgültige Frequenzlage gebracht werden.

Ein Kompromiß zwischen ESB– und ZSB–AM stellt die sogenannte *Restseitenbandmodulation (RSB–AM)* dar. Diese Modulationsart, die z.B. beim heutigen Farbfernsehen eingesetzt wird, entspricht einer ZSB–AM, bei der nur die trägernahen Anteile des unteren Seitenbandes übertragen werden. Auf eine detaillierte Beschreibung der Restseitenbandmodulation wird im Programm “*amv*” verzichtet. Gleiches gilt für die *Quadratur–Amplitudenmodulation (QAM)*, die z.B. beim digitalen Richtfunk zum Einsatz kommt. Hier werden beispielsweise zwei quaternär codierte Datensignale (d.h.: die Amplitude jedes dieser Signale kann vier verschiedene Werte annehmen) auf zueinander um  $90^\circ$  phasenverschobene Träger moduliert und die resultierenden Signale addiert. Das Ausgangssignal kann somit 16 verschiedene Zustände annehmen (*16QAM*).

### 1.2.1 Ideale Amplitudenmodulation

Bild 1.6(a) zeigt zwei Prinzipschaltbilder des idealen Amplitudenmodulators.

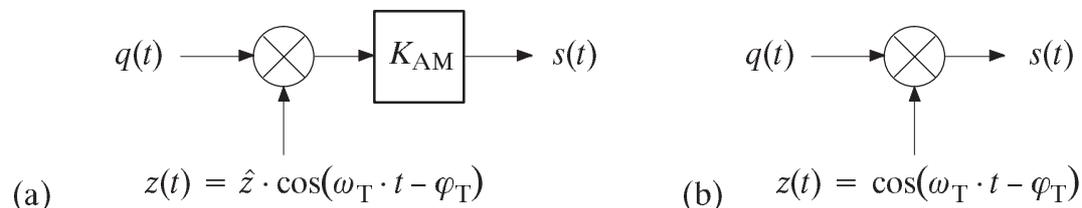


Bild 1.6: Zwei äquivalente Modelle des “Idealen Amplitudenmodulators”.

Das Quellensignal  $q(t)$  wird mit dem Trägersignal  $z(t)$  multipliziert, dessen Frequenz  $f_T = \omega_T / (2\pi)$  meist deutlich größer ist als die maximale im Signal  $q(t)$  vorkommende Nachrichtenfrequenz  $f_{N,\max}$ . Für das amplitudenmodulierte Signal gilt dann:

$$s(t) = K_{AM} \cdot q(t) \cdot z(t) . \quad (1.11)$$

Hierbei ist  $K_{AM}$  eine dimensionsbehaftete Konstante, z.B. mit der Einheit  $1/V$ . Wählt man die Konstante  $K_{AM} = 1/\hat{z}$ , so erhält man das vereinfachte Modell gemäß Bild 1.6(b) mit dem auf 1 normierten Trägersignal  $z(t)$ . Beide Modelle liefern das Sendesignal

$$s(t) = q(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T) . \quad (1.12)$$

Aus dieser Gleichung wird deutlich, daß bei dieser Art von Modulation die Frequenz und Phase (d.h. die Lage der Nulldurchgänge) des Trägersignals  $z(t)$  im modulierten Signal  $s(t)$  erhalten bleiben, während die Amplituden der einzelnen Cosinushalbwellen durch das Nachrichtensignal  $q(t)$  verändert werden. Die Nulldurchgänge des Signals  $q(t)$  sind in  $s(t)$  zusätzlich enthalten. In der nachfolgenden Skizze ist das modulierte Signal  $s(t)$  für die beiden cosinusförmigen Signale  $q(t) = \hat{q} \cdot \cos(\omega_N \cdot t)$  und  $z(t) = \cos(\omega_T \cdot t)$  dargestellt.

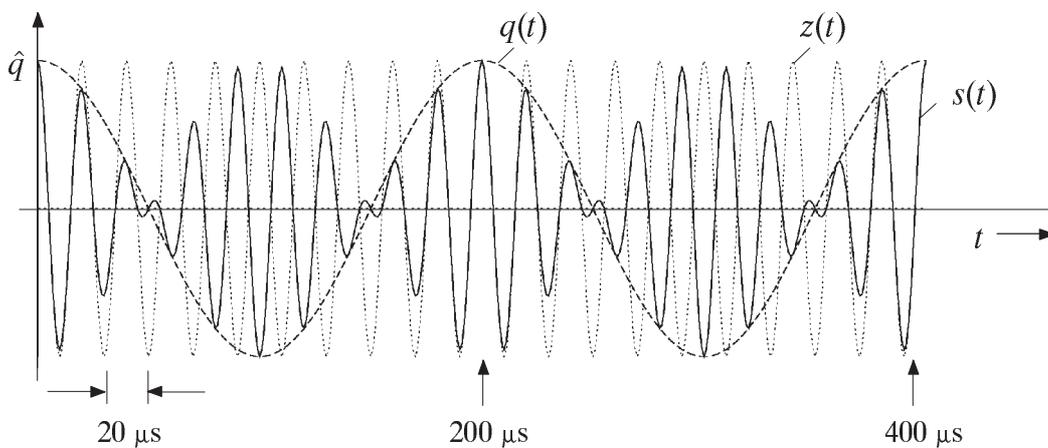


Bild 1.7: Beispiel eines ideal amplitudenmodulierten Signals ( $\omega_T = 50 \text{ kHz}$ ,  $\omega_N = 5 \text{ kHz}$ ).

Durch Anwendung des Faltungssatzes erhält man für das Spektrum des AM-Sendesignals ("\*" kennzeichnet die Faltungsoperation):

$$S(f) = Q(f) * Z(f) , \quad (1.13)$$

wobei die Fourierkorrespondenzen  $Q(f) \bullet \text{---} \circ q(t)$  sowie

$$z(t) = \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T) , \quad \omega_T = 2\pi \cdot f_T$$

$$\downarrow$$

$$Z(f) = \frac{1}{2} \cdot e^{-j\varphi_T} \cdot \delta(f - f_T) + \frac{1}{2} \cdot e^{j\varphi_T} \cdot \delta(f + f_T) \quad (1.14)$$

einzusetzen sind. Hier und im folgenden wird also das Trägersignal  $z(t)$  entsprechend Bild 1.6(b) stets auf 1 normiert betrachtet.

Die Spektralfunktion  $Z(f)$  setzt sich aus zwei diskreten Linien zusammen. Die Beträge der Gewichte sind jeweils  $1/2$ , der Phasenfaktor hängt von der Trägerphase  $\varphi_T$  ab. Da die Faltung einer beliebigen Funktion  $f(x)$  mit einer verschobenen Diracfunktion  $\delta(x - x_0)$  die verschobene Funktion  $f(x - x_0)$  ergibt, erhält man aus Gl. (1.13):

$$S(f) = \frac{1}{2} \cdot e^{-j\varphi_T} \cdot Q(f - f_T) + \frac{1}{2} \cdot e^{j\varphi_T} \cdot Q(f + f_T) . \quad (1.15)$$

Für das Folgende wird sehr oft das Trägersignal  $z(t) = \cos(\omega_T \cdot t)$  und damit die Trägerphase  $\varphi_T = 0$  vorausgesetzt. In diesem Sonderfall vereinfacht sich Gl. (1.15) zu

$$S(f) = \frac{1}{2} \cdot Q(f - f_T) + \frac{1}{2} \cdot Q(f + f_T) . \quad (1.16)$$

Der erste Term dieser Gleichung beschreibt den Anteil um  $+f_T$ , der zweite den Anteil um  $-f_T$ . Bild 1.8 verdeutlicht den Zusammenhang zwischen  $Q(f)$  und  $S(f)$ .

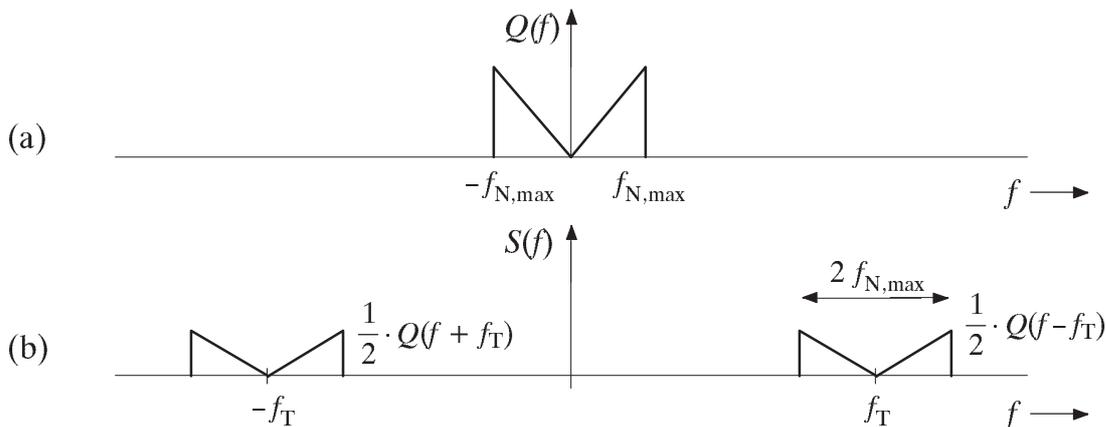


Bild 1.8: Spektren  $Q(f)$  und  $S(f)$  bei idealer Amplitudenmodulation (ZSB-AM ohne Träger).

Man erkennt folgende Eigenschaften des idealen AM-Modulators:

- Durch die Modulation wird das Tiefpaßspektrum  $Q(f)$  zu einem Bandpaßspektrum  $S(f)$  um die Trägerfrequenz ( $\pm f_T$ ).
- Ist  $Q(f)$  ein reelles Spektrum und das Trägersignal  $z(t)$  cosinusförmig (d.h.  $\varphi_T = 0^\circ$ ), so ist  $S(f)$  ebenfalls reell.
- Die erforderliche Bandbreite des Übertragungskanal ist doppelt so groß wie die Bandbreite des Nachrichtensignals.
- Im Spektrum  $S(f)$  des modulierten Signals ist kein zusätzlicher diskreter Anteil bei der Trägerfrequenz ( $\pm f_T$ ) vorhanden.

Aufgrund der beiden letztgenannten Eigenschaften bezeichnet man die Modulation gemäß Bild 1.6 auch als *Zweiseitenband-Amplitudenmodulation (ZSB-AM) ohne Träger*. Eine Realisierung eines solchen Modulators zeigt Bild 1.9.

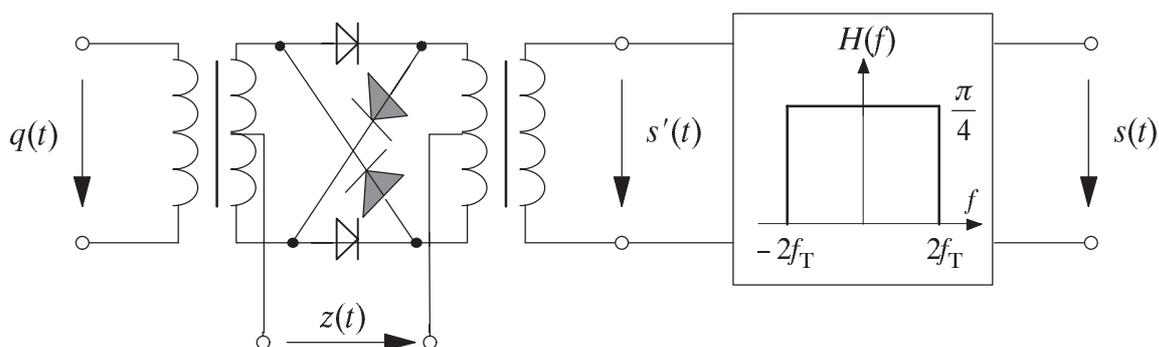


Bild 1.9: Realisierung der ZSB-AM (Doppel-Gegentakt-Diodenmodulator).

Das Trägersignal  $z(t)$  ist hierbei ein Cosinussignal, dessen Amplitude  $\hat{z}$  sehr viel größer als die Amplitude  $\hat{q}$  des Nachrichtensignals ist. Somit werden die Dioden als Schalter betrieben. Bei positiver Halbwelle (d.h. falls  $z(t) > 0$ ) leiten die "weißen" Dioden, während die grau hinterlegten Dioden sperren. Das Signal  $s'(t)$  ist somit gleich  $q(t)$ . Im anderen Fall (d.h. für  $z(t) < 0$ ) leiten die grau hinterlegten Dioden und die "weißen" sperren. Das Quellensignal wird somit umgepolt, und es ist  $s'(t) = -q(t)$ .

Aufgrund der Mittelanzapfungen der Übertrager heben sich die vom Trägersignal  $z(t)$  herreichenden induzierten Spannungen auf, so daß  $z(t)$  in den Signalen  $s'(t)$  und  $s(t)$  selbst nicht erscheint ("Amplitudenmodulation ohne Träger").

Die Schaltfunktion der Dioden erfolgt im Takt der Trägerfrequenz  $f_T$ . Das Ausgangssignal  $s'(t)$  läßt sich somit als Produkt des Quellensignals  $q(t)$  mit einem rechteckförmigen (weil  $\hat{z} \gg \hat{q}$ ) bipolaren Signal  $b(t)$  mit den möglichen Amplitudenwerten  $+1$  und  $-1$  deuten. Damit hat das Ausgangssignal  $s'(t) = q(t) \cdot b(t)$  nicht die Form von Gl. (1.12).

Das bipolare Rechtecksignal  $b(t)$  kann jedoch entsprechend der Fourierreihe wie folgt dargestellt werden:

$$b(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \left[ \cos(\omega_T \cdot t) - \frac{1}{3} \cdot \cos(3\omega_T \cdot t) + \frac{1}{5} \cdot \cos(5\omega_T \cdot t) \dots \right] \quad (1.17)$$

Daraus ist ersichtlich, daß durch eine Bandbegrenzung (z.B. auf die doppelte Trägerfrequenz) und eine Pegelanpassung (Dämpfung um den Faktor  $\pi/4$ ) auch hier genau die gewünschte Signalform  $s(t)$  nach Gl. (1.12) erreicht wird.

### 1.2.2 ZSB-Amplitudenmodulation mit Träger

Die Demodulation eines entsprechend Abschnitt 1.2.1 amplitudenmodulierten Signals ist technisch nicht einfach, da das am Empfänger ankommende Signal  $r(t)$  keine Information über das Trägersignal  $z(t)$  beinhaltet, dem Empfänger jedoch dessen Phase und Frequenz exakt bekannt sein muß (siehe Abschnitt 1.3.1). Um die Demodulation einfacher zu gestalten, wird dem Sendesignal  $s(t)$  zusätzlich Information über das Trägersignal  $z(t)$  hinzugefügt. Bild 1.10 verdeutlicht diesen Zusammenhang anhand der Spektren  $Q(f)$  und  $S(f)$ .

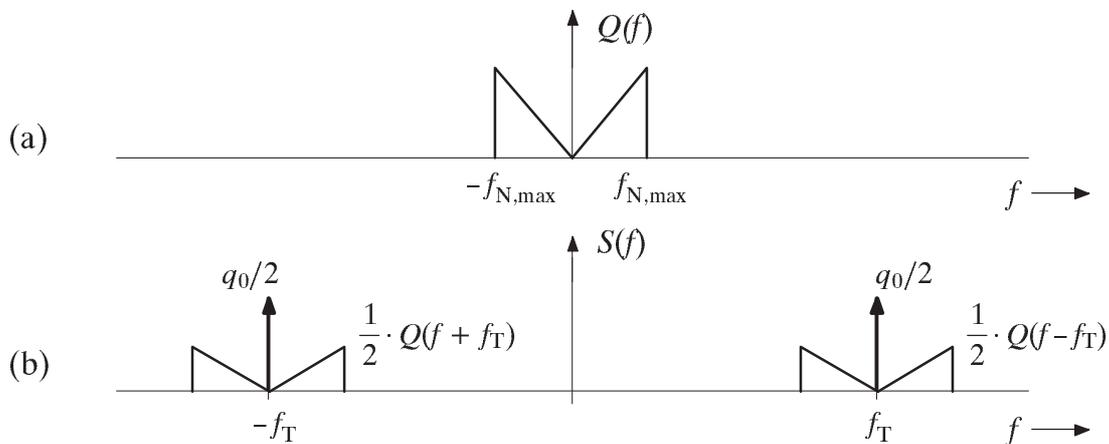


Bild 1.10: Spektren  $Q(f)$  und  $S(f)$  bei ZSB-AM mit Träger.

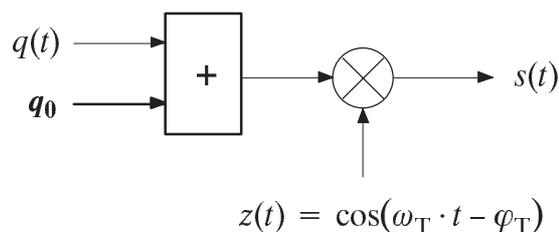


Bild 1.11: ZSB-Modulator mit Träger (Änderung gegenüber Bild 1.6 fett hervorgehoben).

Das Prinzipschaltbild eines ZSB-Amplitudenmodulators mit Träger ist in Bild 1.11 dargestellt. Die Signale  $q(t)$  und  $s(t)$  zeigt Bild 1.12.

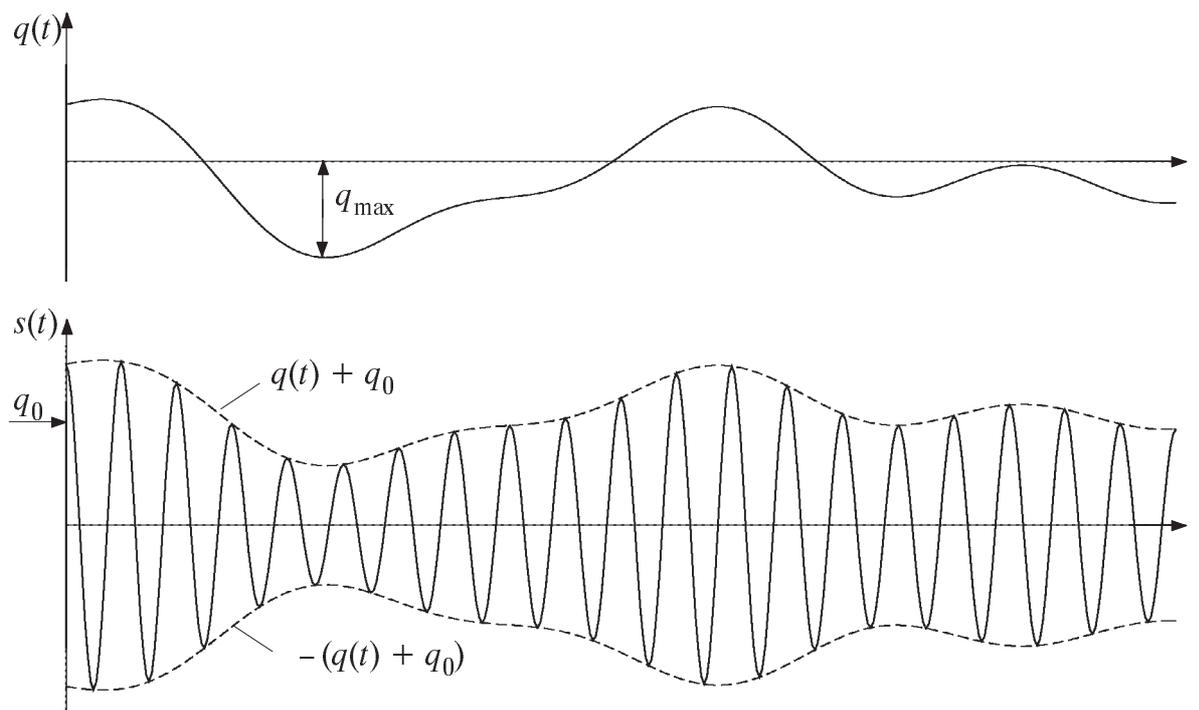


Bild 1.12: Signale  $q(t)$  und  $s(t)$  bei einem ZSB-Modulator mit Träger ( $\varphi_T = 0^\circ$ ).

Vor der Multiplikation mit dem Trägersignal  $z(t)$  wird dem Nachrichtensignal  $q(t)$  ein Gleichanteil  $q_0$  additiv überlagert, so daß für das Sendesignal gilt:

$$s(t) = (q(t) + q_0) \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T) = q(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T) + q_0 \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T) \quad (1.18)$$

Der erste Term des Sendesignals ist identisch mit dem modulierten Signal bei ZSB-AM ohne Träger (vgl. Abschnitt 1.2.1). Der zweite Term bewirkt die zusätzlichen Diracfunktionen im Spektrum  $S(f)$  bei der positiven und negativen Trägerfrequenz, deren Gewichte durch den Gleichanteil  $q_0$  bestimmt werden.

Eine Möglichkeit der Realisierung eines ZSB-Amplitudenmodulators mit Träger ist, die Summe  $x(t) = q(t) + z(t)$  aus Nachrichten- und Trägersignal auf ein nichtlineares Schaltungselement zu geben. Beispielsweise besitzt ein Feldeffekttransistor (FET) näherungsweise eine Kennlinie  $y(t) = f(x(t))$  mit quadratischem Anteil ( $c_1$  und  $c_2$  bezeichnen Konstante, die durch die Beschaltung des FET festgelegt sind):

$$y(t) = c_1 \cdot x(t) + c_2 \cdot x^2(t) \quad (1.19)$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man dann für das Ausgangssignal:

$$y(t) = c_1 \cdot q(t) + \underline{c_1 \cdot z(t)} + c_2 \cdot q^2(t) + \underline{2 \cdot c_2 \cdot q(t) \cdot z(t)} + c_2 \cdot z^2(t) . \quad (1.20)$$

Begrenzt man dieses Signal durch einen geeignet dimensionierten Bandpaß um die Trägerfrequenz, so entfallen alle in Gl. (1.20) nicht unterstrichenen Anteile. Es verbleiben nur der Träger (einfach unterstrichen) sowie das Modulationsprodukt (Seitenbänder, doppelt unterstrichen).

Als Maß für die Stärke der Modulation wird häufig der Modulationsgrad

$$m = \frac{q_{\max}}{q_0} \quad \text{mit} \quad q_{\max} = \text{Max}_t |q(t)| \quad (1.21)$$

angegeben. Die ZSB-AM ohne Träger ist in dieser Definition als Sonderfall für  $m \rightarrow \infty$  mitenthalten. Je größer der Modulationsgrad, desto mehr Energie wird für die eigentliche Modulation investiert. Dagegen wird bei sehr kleinem Modulationsgrad  $m$  die verfügbare Energie fast ausschließlich zur Übertragung des Gleichanteils  $q_0$  aufgewandt.

Ist der Modulationsgrad  $m < 1$ , d.h. der Maximalwert  $q_{\max}$  kleiner als der Gleichanteil  $q_0$ , so ist das Nachrichtensignal  $q(t)$  in der Hüllkurve von  $s(t)$  erkennbar (siehe Bild 1.12) und die in Abschnitt 1.3.2 beschriebene Hüllkurvendemodulation anwendbar.

Anmerkung: Das vorliegende Programm "amv" verwendet als Beschreibungsparameter für den Amplitudenmodulator den Gleichanteil  $q_0$  und nicht den Modulationsgrad  $m$ , da dieser auch von der Amplitude des Nachrichtensignals abhängt. Für ein gegebenes Nachrichtensignal  $q(t)$  kann der Modulationsgrad  $m$  mit Gl. (1.21) berechnet werden. Bei einem Sprachsignal (von seinen Eigenschaften her ein stochastisches Signal) wird mit  $q_{\max}$  meist derjenige Wert bezeichnet, der nur in 1% aller Zeiten überschritten wird.

### 1.2.3 Zeigerdiagramm und Ortskurve

Die bei Amplitudenmodulation entstehenden Signale lassen sich anschaulich anhand des sogenannten Zeigerdiagramms deuten. Hierbei wird das in Abschnitt 1.1.4 eingeführte analytische Signal  $s_+(t)$  in der komplexen Ebene betrachtet. Für ein unmoduliertes Signal ergibt sich ein mit der Kreisfrequenz  $\omega_T$  gleichmäßig rotierender Zeiger (vgl. Bild 1.5).

Im Fall einer ZSB-AM mit Träger gilt mit Gl. (1.18) für das reelle und das analytische (komplexe) Signal:

$$s(t) = (q(t) + q_0) \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T) , \quad (1.22)$$

$$s_+(t) = (q(t) + q_0) \cdot e^{j(\omega_T t - \varphi_T)} . \quad (1.23)$$

Es ist nochmals anzumerken, daß  $s_+(t)$  nicht wirklich existiert, sondern nur deshalb eingeführt wird, um schwierige algebraische Berechnungen zu vermeiden, indem man das Problem auf anschauliche geometrische Überlegungen zurückführt. Dies soll an einem einfachen Beispiel gezeigt werden, nämlich für das Nachrichtensignal

$$q(t) = \hat{q} \cdot \cos(\omega_N \cdot t - \varphi_N) . \quad (1.24)$$

Nach dem Satz von Euler kann hierfür auch geschrieben werden:

$$q(t) = \frac{\hat{q}}{2} \cdot e^{j(\omega_N t - \varphi_N)} + \frac{\hat{q}}{2} \cdot e^{-j(\omega_N t - \varphi_N)} = \frac{\hat{q}}{2} \cdot e^{-j\varphi_N} \cdot e^{j\omega_N t} + \frac{\hat{q}}{2} \cdot e^{j\varphi_N} \cdot e^{-j\omega_N t} . \quad (1.25)$$

Setzt man ein cosinusförmiges Trägersignal voraus ( $\varphi_T = 0^\circ$ ), so erhält man aus (1.23):

$$s_+(t) = \left( q_0 + \frac{\hat{q}}{2} \cdot e^{-j\varphi_N} \cdot e^{j\omega_N t} + \frac{\hat{q}}{2} \cdot e^{j\varphi_N} \cdot e^{-j\omega_N t} \right) \cdot e^{j\omega_T t} . \quad (1.26)$$

Betrachten wir die Zeitabhängigkeit dieses komplexen Signals, also das Zeigerdiagramm. Bei der hier dargestellten Zweiseitenband–Amplitudenmodulation mit Träger rotiert im Gegensatz zum unmodulierten Signal (d.h. für  $\hat{q} = 0$ ) nicht nur ein Zeiger mit konstanter Kreisfrequenz  $\omega_T$ , sondern der aus drei komplexen Zeigern bestehende Verbund.

Allgemein läßt sich das analytische Signal in folgender Form schreiben:

$$s_+(t) = s_{\text{TP}}(t) \cdot e^{j\omega_T t} , \quad (1.27)$$

wobei man  $s_{\text{TP}}(t)$  oft als das zum Bandpaßsignal  $s(t)$  zugehörige *äquivalente Tiefpaßsignal* bezeichnet. Bei den meisten Modulationsverfahren ist  $s_{\text{TP}}(t)$  ebenso wie  $s_+(t)$  komplex. Nur bei der hier betrachteten ZSB–AM ergibt sich ein reelles Signal, wie Bild 1.13 zeigt.

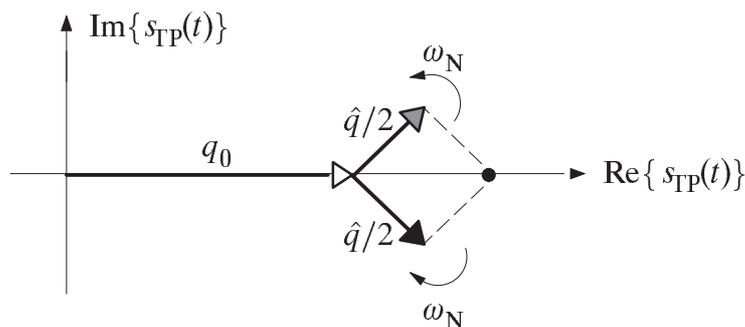


Bild 1.13: Äquivalentes Tiefpaßsignal  $s_{\text{TP}}(t)$  bei Zweiseitenband–Amplitudenmodulation (Anmerkung: Die Phase des Nachrichtensignals beträgt hier  $\varphi_N = -45^\circ$ ).

Bei ZSB–AM ist das äquivalente Tiefpaßsignal gleich dem Klammerausdruck von (1.26):

$$s_{\text{TP}}(t) = q_0 + \frac{\hat{q}}{2} \cdot e^{-j\varphi_N} \cdot e^{j\omega_N t} + \frac{\hat{q}}{2} \cdot e^{j\varphi_N} \cdot e^{-j\omega_N t} . \quad (1.28)$$

Der erste Term ergibt den Zeiger der Länge  $q_0$ . Dieser liegt in Richtung der reellen Achse. Der zweite und dritte Term der komplexen Amplitude werden durch die beiden Zeiger der Länge  $\hat{q}/2$  beschrieben, wobei der zweite Term durch die graue und der dritte durch die schwarze Pfeilspitze gekennzeichnet ist.

Die vektorielle Addition dieser 3 Zeiger ergibt das äquivalente Tiefpaßsignal zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Die Spitze des resultierenden Zeigers ist in Bild 1.13 als Punkt markiert. Für Zeiten  $t > 0$  drehen sich nun die beiden letztgenannten Zeiger mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ( $\omega_N$ ), aber in gegenläufigen Richtungen. Der den zweiten Term beschreibende Zeiger dreht aufgrund des positiven Exponenten in mathematisch positiver Richtung (entgegen dem Uhrzeigersinn). Der dritte Zeiger (schwarze Pfeilspitze) dreht dagegen wegen des negativen Exponenten mathematisch negativ.

Da diese beiden Zeiger stets mit gleicher Winkelgeschwindigkeit entgegengesetzt drehen, ist die Summe der drei Zeiger stets in Richtung des ersten Zeigers und somit reell. Der Endpunkt des resultierenden Zeigers liegt also stets auf der reellen Achse und kann zu den verschiedenen Zeitpunkten alle Werte zwischen  $q_0 - \hat{q}$  und  $q_0 + \hat{q}$  annehmen.

Man bezeichnet die Linie, auf der die Spitze des resultierenden Zeigers in der komplexen Ebene (Phasendiagramm) zu irgendeinem Zeitpunkt liegen kann, als die *Ortskurve*. Bei ZSB-AM unter idealen, verzerrungsfreien Bedingungen ist die Ortskurve stets eine horizontale Gerade. Weist dagegen der Kanal eine frequenzabhängige Dämpfung auf (d.h. Amplitudenverzerrungen), so sind die Zeiger unterschiedlich lang, und die Ortskurve der ZSB-AM wird zu einer Ellipse (siehe Abschnitt 1.6.2 und Versuch D11). In diesem Fall ist auch für  $m < 1$  keine verzerrungsfreie Demodulation möglich.

Zusammenfassend kann man sagen: Die Ortskurve stellt das (äquivalente) Tiefpaßsignal in der komplexen Ebene dar. Bei ZSB-AM (und nur bei dieser) ist  $s_{TP}(t) = q_0 + q(t)$ . Bei der Ortskurve wird der zeitabhängige Drehfaktor des Trägers außer acht gelassen im Gegensatz zum analytischen Signal  $s_+(t)$ , dessen Darstellung in der komplexen Ebene das Zeigerdiagramm ergibt (Rotation der Ortskurve entgegen dem Uhrzeigersinn mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega_T$ ). Bild 1.14 verdeutlicht den Zusammenhang zwischen den oben definierten Signalen  $s(t)$ ,  $s_+(t)$  und  $s_{TP}(t)$  anhand ihrer (normierten) Betragsspektren. Das Spektrum  $S_+(f)$  ergibt sich aus  $S(f)$  mit Gl. (1.9), vom Spektrum (b) zum Spektrum (c) kommt man über die Beziehung  $S_{TP}(f) = S_+(f + f_T)$ .

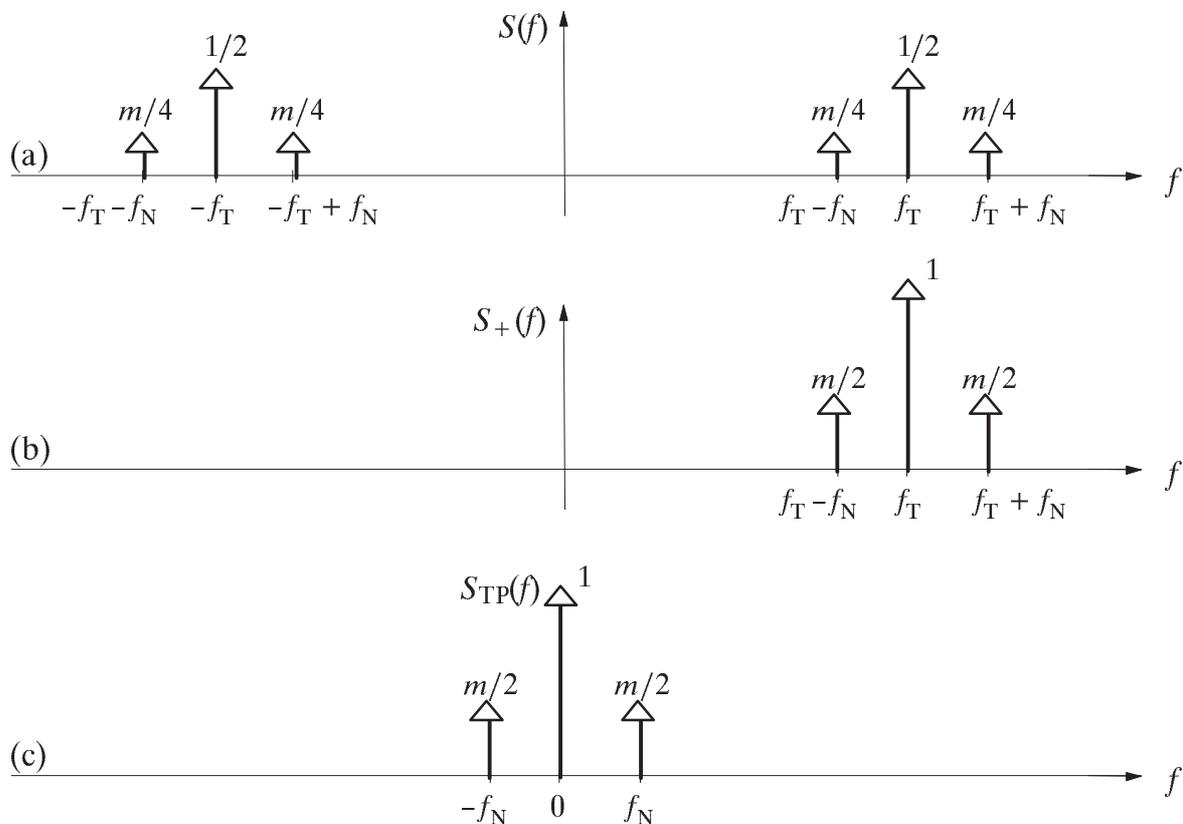


Bild 1.14: Spektren  $S(f)$ ,  $S_+(f)$  und  $S_{TP}(f)$  bei cosinusförmigem Nachrichtensignal und ZSB-AM (alle Spektren normiert, d.h.  $q_0 = 1$ ,  $\hat{q}/q_0 = m$ ).

### 1.2.4 ESB-Amplitudenmodulation

Die ZSB-Modulation (sowohl mit als auch ohne Träger) hat folgende Eigenschaften:

- Das ZSB-modulierte Signal  $s(t)$  benötigt die doppelte Bandbreite wie das zu übertragende Quellsignal  $q(t)$ .
- Die vollständige Information über  $q(t)$  steckt sowohl im oberen Seitenband (OSB) als auch im unteren Seitenband (USB). Das obere Seitenband liegt in Regellage, das untere in Kehrlage.

Deshalb genügt es, wenn man nur ein Seitenband überträgt. Man spricht dann von "Einseitenbandmodulation (ESB-AM)". Bild 1.15 verdeutlicht deren Eigenschaften im Frequenzbereich und gibt gleichzeitig eine Realisierungsform des ESB-Modulators an.

Bild 1.15(b) zeigt das Spektrum  $S(f)$  bei ZSB-AM, wobei das schematische Spektrum  $Q(f)$  entsprechend Skizze (a) zugrundeliegt. Man erkennt die Verdoppelung der Bandbreite (bei positiven und negativen Frequenzen jeweils  $2 \cdot f_{N,\max}$  anstelle von  $f_{N,\max}$ ).

Das ESB-Spektrum ergibt sich aus dem ZSB-Spektrum durch Filterung. Bei OSB-Modulation wird die untere Grenzfrequenz des Bandpasses zu  $f_T - f_\varepsilon$  gewählt ( $f_\varepsilon$  ist eine beliebig kleine positive Frequenz). Die obere Grenzfrequenz muß  $> f_T + f_{N,\max}$  sein.

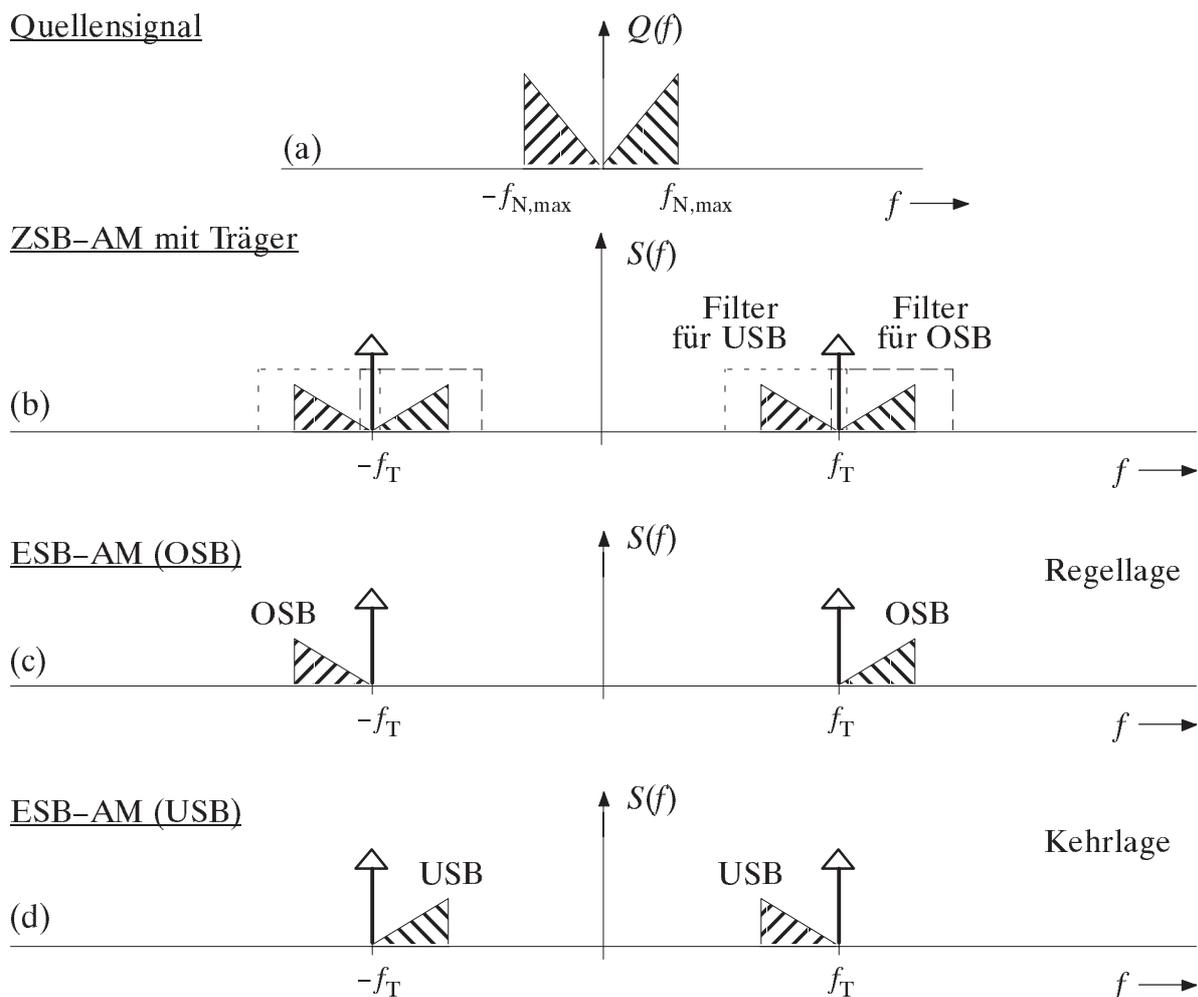


Bild 1.15: Spektren bei Einseitenbandmodulation (c), (d) im Vergleich zur ZSB-AM (b).

Das OSB-Spektrum  $S(f)$  beinhaltet somit nur das obere Seitenband und (nicht notwendigerweise) den Träger. Bild 1.15(c) zeigt, daß bei positiven Frequenzen das OSB-Spektrum die gleiche Lage wie das Nachrichtenspektrum  $Q(f)$  aufweist ("Regellage").

Dagegen ist bei USB-Modulation eine Kehrlage des Spektrums feststellbar. Das USB-Spektrum von Bild 1.15(d) ergibt sich aus dem ZSB-Spektrum beispielsweise durch Filterung mit einem Bandpaß, dessen untere Grenzfrequenz kleiner als  $f_T - f_{N,max}$  ist, während die obere Grenzfrequenz  $f_T + f_\varepsilon$  beträgt. Die erforderliche Filterfunktion ist in der Skizze (b) kurz-gestrichelt eingezeichnet. Auch hier bezeichnet  $f_\varepsilon$  eine beliebig kleine, aber positive Frequenz.

Bei ESB-Modulation definiert man den Modulationsgrad sinnvollerweise als

$$\mu = \frac{q_{max}}{2 \cdot q_0} . \tag{1.29}$$

Diese gegenüber der ZSB-AM abweichende Definition des Modulationsgrads ist hier auch durch eine unterschiedliche Nomenklatur berücksichtigt ( $\mu$  anstelle von  $m$ ).

Betrachten wir wie in Abschnitt 1.2.3 wieder ein cosinusförmiges Nachrichtensignal ( $\omega_N, \varphi_N = 0$ ) und ein cosinusförmiges Trägersignal ( $\omega_T, \varphi_T = 0$ ). Mit  $q_0 = 1$  (Normierung) und Gl. (1.29) kann somit für das Bandpaßsignal bei OSB-AM geschrieben werden:

$$s(t) = \cos(\omega_T \cdot t) + \mu \cdot \cos((\omega_T + \omega_N) \cdot t) . \tag{1.30}$$

Bild 1.16(a) zeigt das dazugehörige Spektrum, bestehend aus vier Diracfunktionen.

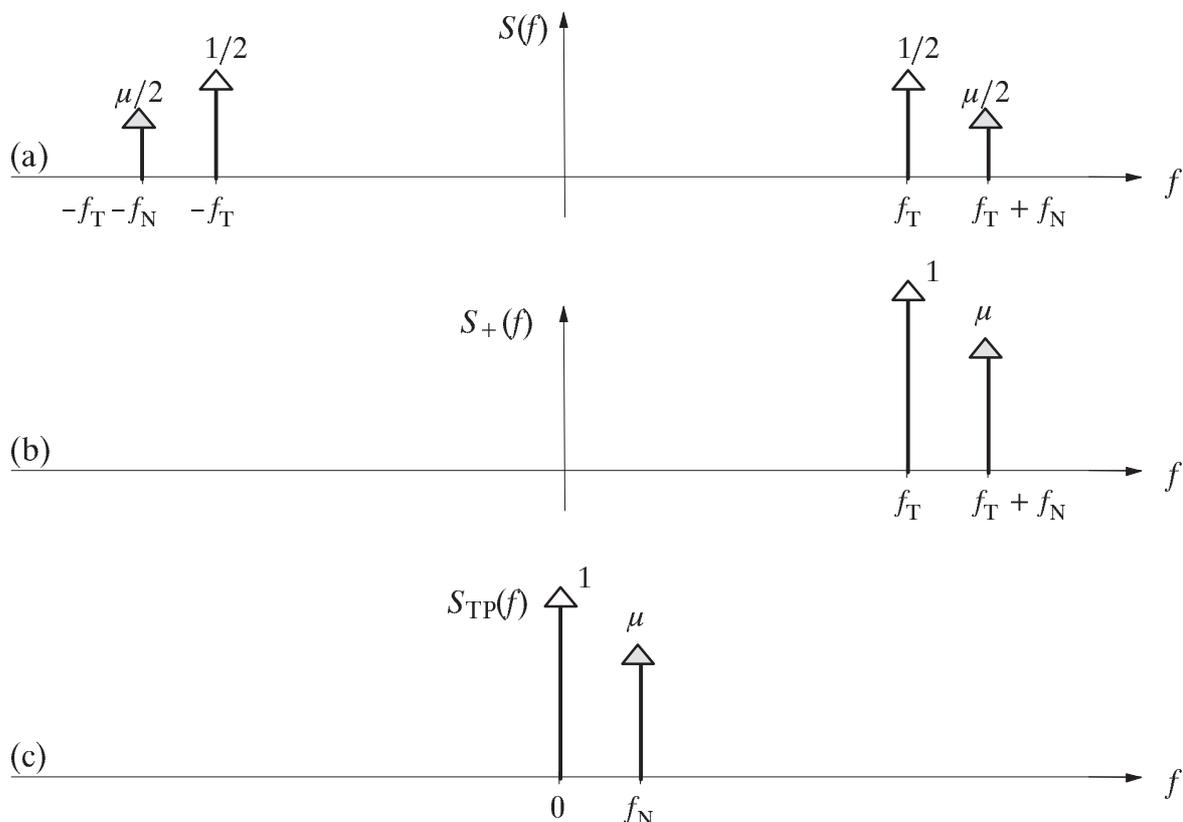


Bild 1.16: Spektren  $S(f)$ ,  $S_+(f)$  und  $S_{TP}(f)$  bei cosinusförmigem Nachrichtensignal und OSB-AM (alle Spektren normiert, d.h.  $q_0 = 1, \hat{q}/2q_0 = \mu$ ).

Das Spektrum  $S_+(f)$  des analytischen Signals erhält man wieder durch Abschneiden der Anteile bei negativen Frequenzen und Verdoppeln der Spektralanteile für  $f > 0$ . Von Bild 1.16(b) zu (c) kommt man durch Frequenzverschiebung um  $f_T$  nach links.

Damit erhält man für das äquivalente OSB-Tiefpaßsignal (wiederum normiert):

$$s_{\text{TP}}(t) = 1 + \mu \cdot e^{j\omega_N t} . \quad (1.31)$$

Das bedeutet: Bei ESB-AM verschwindet gegenüber Gl. (1.28) der dritte Term (OSB) bzw. der zweite Term (USB) und dementsprechend auch der schwarz- bzw. graugefüllte Zeiger. Hier ist die Ortskurve ein Kreis mit dem Mittelpunkt  $(1, 0)$  und dem Radius  $\mu$  (siehe Bild 1.17). Die Spitze des resultierenden Zeigers legt in einer Periodendauer  $1/f_N$  genau eine Kreisumdrehung entgegen dem Uhrzeigersinn (da OSB) zurück.

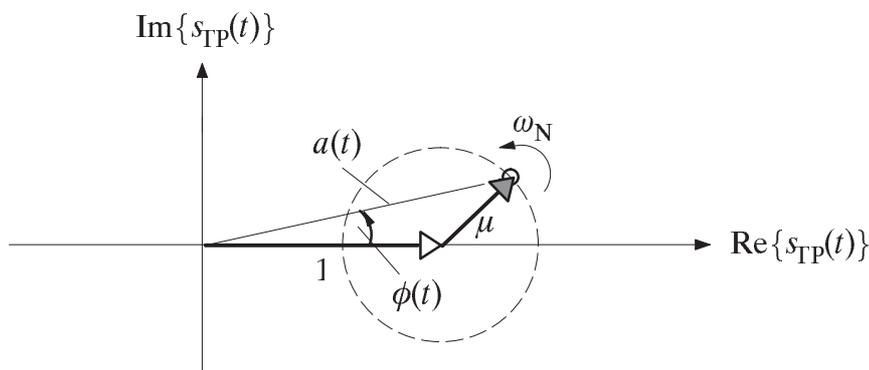


Bild 1.17: Ortskurve (normiert) bei cosinusförmigem Nachrichtensignal und OSB-AM.

Im Gegensatz zur ZSB-AM ist hier das äquivalente Tiefpaßsignal komplex. Es kann deshalb auch wie folgt dargestellt werden:

$$s_{\text{TP}}(t) = a(t) \cdot e^{j\phi(t)} . \quad (1.32)$$

Hierbei bezeichnet  $a(t)$  die Betragsfunktion und  $\phi(t)$  die Phasenfunktion.

Das Zeigerdiagramm – also das analytische Signal  $s_+(t)$  – erhält man wie in Abschnitt 1.2.3 beschrieben durch Rotation des gesamten Zeigerverbands der Ortskurve mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_T$ . Daraus kann das (tatsächliche) ESB-Bandpaßsignal  $s(t)$  wieder durch Realteilbildung (Projektion auf die reelle Achse) ermittelt werden.

Die Betragsfunktion  $a(t)$  des äquivalenten Tiefpaßsignals  $s_{\text{TP}}(t)$  gibt die Hüllkurve des reellen Bandpaßsignals  $s(t)$  an, während die Phasenfunktion  $\phi(t)$  die Abweichungen der Nulldurchgänge von  $s(t)$  gegenüber dem Trägersignal  $z(t)$  beschreibt.

Da bei ESB-AM nicht nur die Hüllkurve  $a(t)$ , sondern auch die Phasenfunktion  $\phi(t)$  entsprechend dem Nachrichtensignal  $q(t)$  beeinflusst wird, überlagert sich hier der gewünschten Amplitudenmodulation eine (unerwünschte) Phasenmodulation. Deshalb ist die verzerrungsfreie Demodulation eines ESB-modulierten Signals mit Hilfe eines Hüllkurvendemodulators nicht möglich (vgl. Abschnitt 1.3.2).

In der Vorbereitungsfrage V2 und der Versuchsdurchführung D6 werden die Eigenschaften der Einseitenbandmodulation noch eingehend behandelt.

## 1.3 AM-Demodulation

Amplitudenmodulation am Sender macht nur Sinn, wenn es möglich ist, am Empfänger diese Signalumsetzung wieder rückgängig zu machen, und zwar möglichst ohne Informationsverlust. Eine Möglichkeit hierzu bietet der Synchrondemodulator (Abschnitt 1.3.1). Bei Zweiseitenband-AM mit Träger – und nur bei dieser – ist jedoch auch mit dem Hüllkurvendemodulator (Abschnitt 1.3.2) eine verzerrungsfreie Demodulation möglich.

### 1.3.1 Synchrondemodulation

Die Synchrondemodulation ist sowohl bei ZSB-AM (egal ob mit oder ohne Träger) als auch bei ESB-AM anwendbar. Die folgende Beschreibung bezieht sich auf eine ideale AM (d.h. ZSB-AM ohne Träger). In Bild 1.18 ist das betrachtete Übertragungssystem einschließlich Synchrondemodulator (rechter gestrichelter Block) dargestellt.

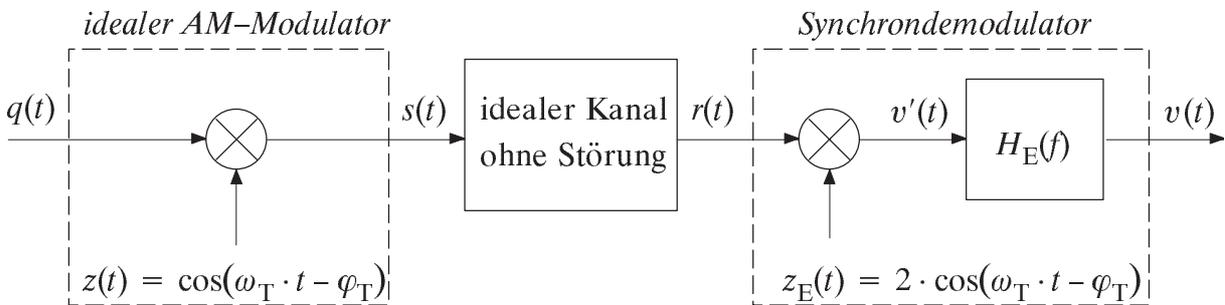


Bild 1.18: Übertragungssystem mit idealem AM-Modulator und Synchrondemodulator.

Unter der Voraussetzung eines idealen, verzerrungs- und störungsfreien Kanals gilt mit Gl. (1.12) für das Signal am Eingang des Synchrondemodulators:

$$r(t) = s(t) = q(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T) . \quad (1.33)$$

Im Synchrondemodulator wird dieses Signal mit dem empfängerseitigen Trägersignal

$$z_E(t) = 2 \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T) \quad (1.34)$$

multipliziert, das genau die gleiche Frequenz und Phasenlage wie das sendeseitige Trägersignal  $z(t)$  aufweisen muß. Das Ergebnis der Multiplikation ist das Signal

$$v'(t) = r(t) \cdot z_E(t) = 2 \cdot q(t) \cdot \cos^2(\omega_T \cdot t - \varphi_T) . \quad (1.35)$$

Mit der trigonometrischen Umformung

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot [1 + \cos(2 \cdot \alpha)] \quad (1.36)$$

erhält man daraus:

$$v'(t) = q(t) + q(t) \cdot \cos(2 \cdot \omega_T \cdot t - 2 \cdot \varphi_T) . \quad (1.37)$$

Der zweite Term liegt (symmetrisch) um die doppelte Trägerfrequenz. Ist  $f_T > f_{N,\max}$ , was in der Praxis stets zutrifft, so kann dieser Anteil durch ein ideales (rechteckförmiges) Tiefpaßfilter  $H_E(f)$  vollständig unterdrückt werden, und man erhält  $v(t) = q(t)$ .

Das bedeutet: Das Nachrichtensignal  $q(t)$  wird durch Synchrondemodulation vollständig und verzerrungsfrei rekonstruiert, falls

- die maximale NF-Frequenz  $f_{N,\max}$  kleiner als die Trägerfrequenz  $f_T$  ist,
- der Kanal innerhalb der Übertragungsbandbreite  $2 \cdot f_{N,\max}$  verzerrungsfrei ist,
- die Trägerfrequenzen bei Sender und Empfänger übereinstimmen,
- die Trägerphasenlagen bei Sender und Empfänger gleich sind.

In der Versuchsdurchführung D3 wird gezeigt, daß eine Phasenabweichung bei ZSB nur zu einer frequenzunabhängigen Dämpfung, aber nicht zu Verzerrungen führt. Dagegen kommt es zu einer – auch bei der Sprachübertragung deutlich hörbaren – Schwebung, wenn die Trägerfrequenzen von Sender und Empfänger nicht exakt übereinstimmen.

Wendet man die Synchrondemodulation bei einem ZSB-AM-Übertragungssystem mit Träger an, so muß anstelle des Tiefpaßfilters in Bild 1.18 ein Bandpaß eingesetzt werden, durch den auch der Gleichanteil  $q_0$  entfernt wird.

Anmerkung: Die Beschreibung des Synchrondemodulators erfolgte hier im Zeitbereich. Zu gleichen Ergebnissen kommt man bei der Berechnung im Frequenzbereich durch Anwendung der Faltungsoperation. Dies soll in Vorbereitungsfrage V3 geschehen.

### 1.3.2 Hüllkurvendemodulation

Aufgabe des Demodulators ist es, aus dem Empfangssignal  $r(t)$  das Sinkensignal  $v(t)$  zu gewinnen. Dieses sollte möglichst gleich dem gesendeten Nachrichtensignal  $q(t)$  sein.

Wie aus Bild 1.12 deutlich hervorgeht, ist bei ZSB-AM das Nachrichtensignal  $q(t)$  in der Hüllkurve des modulierten Signals erkennbar, falls der Modulationsgrad  $m < 1$  ist. Diese Eigenschaft kann zur Demodulation des Empfangssignals  $r(t)$  ausgenutzt werden.

Für die folgende Beschreibung setzen wir ideale Übertragungseigenschaften (keine Verzerrungen, kein Rauschen) voraus, so daß  $r(t) = s(t)$  gilt. Unter dieser Voraussetzung sind auch die äquivalenten Tiefpaßsignale identisch, und Ortskurve sowie Zeigerdiagramm gemäß Abschnitt 1.2.3 gilt auch für das Empfangssignal. Man spricht von *idealer Hüllkurvendemodulation*, wenn das Ausgangssignal gleich dem Betrag des äquivalenten Tiefpaßsignals  $r_{TP}(t)$  gesetzt wird (vgl. Abschnitt 1.2.4):  $v(t) = a_r(t) = |r_{TP}(t)|$ .

Eine (nicht ideale) Realisierungsform des Hüllkurvendemodulators zeigt Bild 1.19.

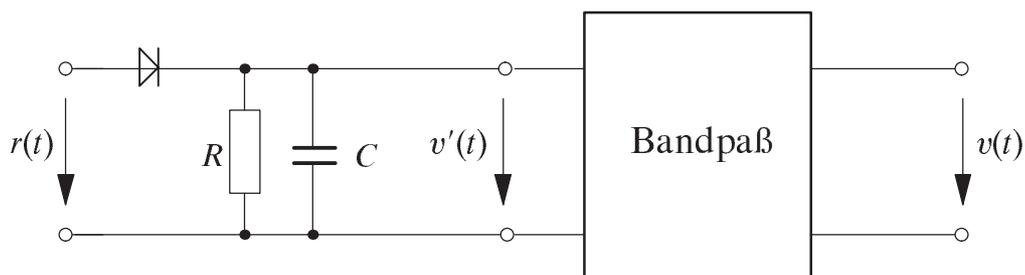


Bild 1.19: Hüllkurvendemodulator.

Das Empfangssignal  $r(t)$  wird zunächst über eine Diode, einen Widerstand  $R$  und eine Kapazität  $C$  geführt. Das Signal am Ausgang dieses Teilverpols sei  $v'(t)$ . Ist  $v'(t) < r(t)$ , so leitet die Diode, und die Kapazität lädt sich bis zum Spitzenwert auf, d.h. in diesem Bereich gilt  $v'(t) = r(t)$ . Ist dagegen  $v'(t)$  größer als das Empfangssignal  $r(t)$ , so sperrt die Diode und die Kapazität  $C$  entlädt sich über den Widerstand  $R$  exponentiell mit der Zeitkonstanten  $\tau = RC$ . Ist nun die Trägerfrequenz sehr viel größer als die maximale Nachrichtenfrequenz, so gibt  $v'(t)$  näherungsweise die Hüllkurve von  $r(t)$  wieder.

Als Faustformel für die Dimensionierung des Hüllkurvendemodulators kann gelten:

$$\frac{1}{f_T} \ll \tau \ll \frac{1}{f_{N,\max}} \quad (1.38)$$

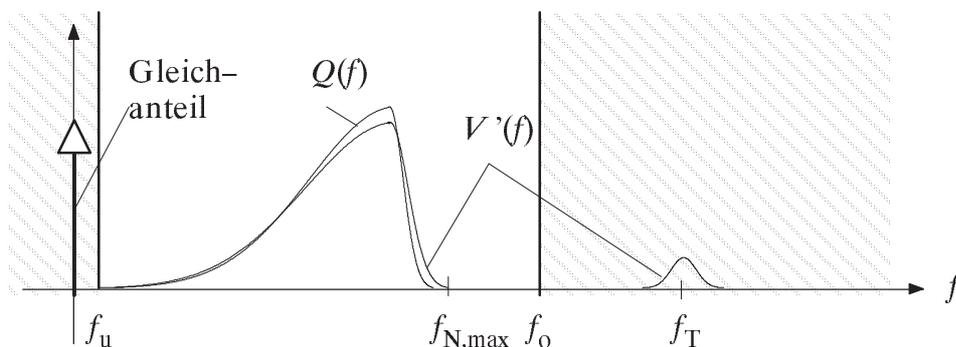
Weiterhin ist bei Verwendung eines Hüllkurvendemodulators im Empfänger bereits bei der Dimensionierung des Senders zu beachten, daß  $f_T \gg f_{N,\max}$  ist (Faktor 100 oder mehr).

Ein guter Kompromiß ist dann gegeben, wenn die Zeitkonstante entsprechend dem geometrischen Mittel gesetzt wird:

$$\tau_{\text{opt}} \approx \sqrt{\frac{1}{f_T \cdot f_{N,\max}}} \quad (1.39)$$

Ist die Zeitkonstante zu groß ( $\tau > \tau_{\text{opt}}$ ), so entlädt sich die Kapazität zu langsam und  $v'(t)$  kann der Hüllkurve nicht folgen. Ist die Zeitkonstante dagegen zu klein ( $\tau < \tau_{\text{opt}}$ ), so entlädt sich demzufolge die Kapazität zu schnell, so daß die Trägerfrequenz und deren Harmonische (Oberwellen) im Signal  $v'(t)$  verstärkt enthalten sind. Diese unerwünschten Frequenzanteile können durch den Bandpaß entfernt werden, ebenso wie der Gleichanteil  $q_0$  bei ZSB-AM mit Träger (siehe Bild 1.20). Es verbleiben jedoch Abweichungen zwischen  $Q(f)$  und  $V'(f)$  im interessierenden Frequenzbereich.

Wie in der Versuchsdurchführung D5 noch gezeigt werden wird, ist Hüllkurvendemodulation nur bei ZSB-AM mit einem Modulationsgrad  $m \leq 1$  anwendbar.



untere Grenzfrequenz  $f_u$ : Herausfiltern des Gleichanteils  $q_0$ .

obere Grenzfrequenz  $f_o$ : Herausfiltern unerwünschter Frequenzanteile um  $f_T$ , die bei der Hüllkurvendemodulation entstehen.

Bild 1.20: Zur Bedeutung des Bandpasses beim Hüllkurvendemodulator.

## 1.4 Winkelmodulation (PM, FM)

Jedes trägermodulierte Sendesignal kann in folgender Form angegeben werden:

$$s(t) = a(t) \cdot \cos(\psi(t)) . \quad (1.40)$$

Bei einer Amplitudenmodulation steckt die Information des Nachrichtensignals  $q(t)$  in der zeitabhängigen Amplitude  $a(t)$ , während die Winkelfunktion  $\psi(t) = \omega_T \cdot t + \phi_T$  allein durch Frequenz und Phase des Trägersignals  $z(t)$  vorgegeben ist.

Dagegen gilt sowohl bei Phasenmodulation (PM) als auch bei Frequenzmodulation (FM) für den Verlauf der Hüllkurve:  $a(t) = \hat{s}$ . (*Hinweis:* Im Programm "amv" ist stets vereinfachend  $\hat{s} = \hat{z} = 1 \text{ V}$  gesetzt.)

Aufgrund der konstanten Amplitude (Hüllkurve) ist hier die Ortskurve ein Kreisbogen mit Radius  $\hat{s}$ . Die vollständige Information über das Nachrichtensignal  $q(t)$  steckt jeweils in der Winkelfunktion  $\psi(t)$ , deren Abhängigkeit vom Nachrichtensignals  $q(t)$  in den Abschnitten 1.4.1 (PM) und 1.4.4 (FM) beschrieben wird.

Da zwischen PM und FM viele Gemeinsamkeiten bestehen, insbesondere dann, wenn das Nachrichtensignal  $q(t)$  eine harmonische Schwingung ist, beschreiben wir die beiden Verfahren gemeinsam durch die Winkelmodulation (WM) entsprechend der Gleichung

$$s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\psi(t)) . \quad (1.41)$$

Diese Gleichung gilt im Gegensatz zu Gl. (1.4) auch für die Frequenzmodulation exakt.

### 1.4.1 Winkelfunktion bei Phasenmodulation

Bei Phasenmodulation ist neben der Signalamplitude auch die Frequenz zeitunabhängig (nämlich gleich der Trägerfrequenz), so daß für die Winkelfunktion gilt:

$$\psi(t) = \omega_T \cdot t + \phi(t) = \omega_T \cdot t + \phi_T + K_{\text{PM}} \cdot q(t) . \quad (1.42)$$

Die Abhängigkeit der Winkelfunktion vom Nachrichtensignal  $q(t)$  ist linear und wird durch die Proportionalitätskonstante  $K_{\text{PM}}$  quantitativ beeinflußt. Hat  $q(t)$  die Einheit "V", so weist  $K_{\text{PM}}$  die Einheit "V<sup>-1</sup>" auf. Der Zahlenwert von  $K_{\text{PM}}$  ergibt sich ebenso wie die Anfangsphase  $\phi_T$  aus der Realisierungsform des Phasenmodulators (Abschnitt 1.4.2).

Die Ableitung der Winkelfunktion  $\psi(t)$  nach der Zeit bezeichnet man allgemein als die *Augenblickskreisfrequenz*

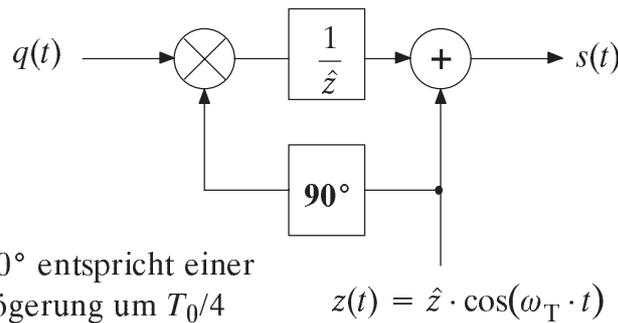
$$\omega_A(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} . \quad (1.43)$$

Für diese Größe gilt bei Phasenmodulation:

$$\omega_A(t) = \omega_T + K_{\text{PM}} \cdot \frac{dq(t)}{dt} . \quad (1.44)$$

Anzumerken ist, daß die Augenblicksfrequenz  $f_A(t) = \omega_A(t)/2\pi$  keine (physikalisch meßbare) Frequenz im herkömmlichen Sinne ist, sondern eine fiktive, zeitabhängige Größe, die sich aus der Winkelfunktion  $\psi(t)$  mathematisch ableiten läßt (vgl. V4c).

### 1.4.2 Realisierung eines Phasenmodulators (Ringmodulator)



Hinweis:  $90^\circ$  entspricht einer Signalverzögerung um  $T_0/4$

$$z(t) = \hat{z} \cdot \cos(\omega_T \cdot t)$$

Bild 1.21: Näherungsweise Realisierung der PM mit Ringmodulator (für kleine  $\eta$ ).

Vorausgesetzt wird hier die Trägerphase  $\phi_T = 0^\circ$ . Von einem idealen Phasenmodulator spricht man dann, wenn für das modulierte Signal entsprechend (1.41) und (1.42) gilt:

$$s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega_T \cdot t + K_{PM} \cdot q(t)) \quad (1.45)$$

Der in Bild 1.21 dargestellte Modulator liefert nur näherungsweise ein solches Signal:

$$s(t) = z(t) + \frac{1}{\hat{z}} \cdot z(t - T_0/4) \cdot q(t) = \underbrace{\hat{z} \cdot \cos(\omega_T \cdot t)}_{\text{Träger}} + \underbrace{q(t) \cdot \sin(\omega_T \cdot t)}_{\substack{\text{ZSB-AM ohne Träger} \\ \text{mit } 90^\circ\text{-Phasendrehung}}} \quad (1.46)$$

Ist der Maximalwert des Nachrichtensignals  $q(t)$  sehr viel kleiner als die Trägeramplitude  $\hat{z}$ , so ist die Hüllkurve  $a(t)$  in erster Näherung konstant und die Phase  $\phi(t)$  näherungsweise proportional zum Nachrichtensignal. Ist die Bedingung  $q_{\max} \ll \hat{z}$  dagegen nicht erfüllt, so kommt es zu nichtlinearen Verzerrungen (vgl. Abschnitt 1.6.3) und einer zusätzlichen (hier unerwünschten) Amplitudenmodulation.

### 1.4.3 Phasenmoduliertes Signal bei cosinusförmigem Nachrichtensignal

Als Sonderfall betrachten wir wieder ein cosinusförmiges Nachrichtensignal

$$q(t) = \hat{q} \cdot \cos(\omega_N \cdot t) \quad (1.47)$$

und einen cosinusförmigen Träger ( $\phi_T = 0^\circ$ ). Somit erhalten wir aus Gl. (1.43) für die Winkelfunktion bei Phasenmodulation:

$$\psi(t) = \omega_T \cdot t + K_{PM} \cdot \hat{q} \cdot \cos(\omega_N \cdot t) \quad (1.48)$$

Ähnlich dem Modulationsgrad  $m$  bei Amplitudenmodulation (vgl. Abschnitt 1.2.2) definiert man bei Winkelmodulation den Modulationsindex  $\eta$ . Je größer  $\eta$  ist, um so intensiver ist die Modulation. Bei Phasenmodulation gilt dabei folgende Definition:

$$\eta_{PM} = K_{PM} \cdot q_{\max} \quad (1.49)$$

Während die Konstante  $K_{PM}$  allein durch die Realisierung des Modulators bestimmt wird, hängt der Modulationsindex  $\eta_{PM}$  auch noch vom Maximalwert des Nachrichtensignals ab. Der Index "PM" in Gl. (1.49) soll deutlich machen, daß der Modulationsindex bei Frequenzmodulation anders zu berechnen sein wird.

Im hier betrachteten Sonderfall eines cosinusförmigen Nachrichtensignals ist  $q_{\max} = \hat{q}$  und damit  $\eta_{\text{PM}} = K_{\text{PM}} \cdot \hat{q}$ . Somit erhält man für das phasenmodulierte Signal:

$$s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\psi(t)) = \hat{s} \cdot \cos(\omega_{\text{T}} \cdot t + \eta \cdot \cos(\omega_{\text{N}} \cdot t)) . \quad (1.50)$$

Um später den Zusammenhang zwischen Frequenzmodulation und Phasenmodulation besser verdeutlichen zu können, ist hier verallgemeinert  $\eta_{\text{PM}} = \eta$  gesetzt.

Betrachten wir nun wie bei der Amplitudenmodulation das Zeigerdiagramm und die Ortskurve. Durch Erweiterung des reellen Signals gemäß Gl. (1.50) um einen entsprechenden Imaginärteil erhält man das komplexe, analytische Signal (*Zeigerdiagramm*):

$$s_{+}(t) = \hat{s} \cdot e^{j(\omega_{\text{T}} t + \eta \cdot \cos(\omega_{\text{N}} t))} . \quad (1.51)$$

Wie in Abschnitt 1.2.3 beschrieben, kommt man durch Abtrennen des mit  $\omega_{\text{T}}$  gleichmäßig rotierenden Drehzeigers zum äquivalenten Tiefpaßsignal

$$s_{\text{TP}}(t) = \hat{s} \cdot e^{j\eta \cdot \cos(\omega_{\text{N}} t)} . \quad (1.52)$$

Die graphische Darstellung dieses fiktiven Signals in der komplexen Ebene bezeichnet man als die *Ortskurve*. Bild 1.22 zeigt diese mit der Abkürzung  $\phi(t) = \eta \cdot \cos(\omega_{\text{N}} \cdot t)$ .

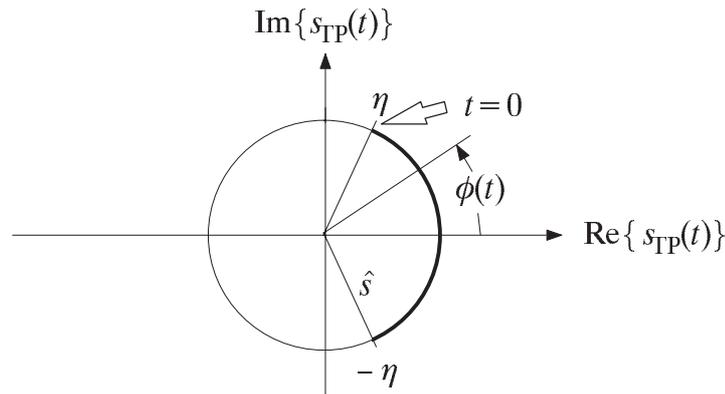


Bild 1.22: Ortskurve (Phasenmodulation, cosinusförmiges Nachrichtensignal,  $\eta = 1$ ).

Die Ortskurve der Phasenmodulation ist also ein Kreisbogen mit dem Radius  $\hat{s}$ . Da die  $\cos$ -Funktion nur Werte zwischen  $\pm 1$  liefert, sind Phasenwinkel  $\phi(t)$  des äquivalenten Tiefpaßsignals zwischen  $-\eta$  und  $+\eta$  möglich. Aufgrund dieser Eigenschaft bezeichnet man den Modulationsindex  $\eta$  manchmal auch als den *Phasenhub*.

In Bild 1.22 sind die für  $\eta = 1$  möglichen Phasenwinkel (zwischen  $\pm 57.3^\circ$ ) hervorgehoben. Die zeitliche Änderung auf dieser Ortskurve erfolgt entsprechend dem cosinusförmigen Nachrichtensignal  $q(t)$ . Da hier die Nachrichtenphase  $\phi_{\text{T}} = 0^\circ$  zugrundeliegt, ist  $\phi(t=0) = 57.3^\circ$ . Das bedeutet, daß das phasenmodulierte Signal  $s(t)$  zu diesem Zeitpunkt um den Bruchteil  $1/(2\pi)$  einer Trägerperiodendauer  $T_0 = 1/f_{\text{T}}$  vorlaufend ist.

Mit abnehmendem Nachrichtensignal  $q(t)$  wird die Phasenabweichung zwischen dem modulierten Signal  $s(t)$  und dem Trägersignal  $z(t)$  kleiner. Zum Zeitpunkt  $t = T_0/4$  sind schließlich  $s(t)$  und  $z(t)$  gleichlaufend, zum Zeitpunkt  $t = T_0/2$  ist  $\phi(t) = -\eta$ . Das heißt: Die Nulldurchgänge des modulierten Signals  $s(t)$  treten nun um die Zeitdifferenz  $T_0/(2\pi)$  später auf als die Nulldurchgänge des Trägersignals  $z(t)$ .

### 1.4.4 Winkelfunktion bei Frequenzmodulation

Bei FM ist die Phasenfunktion  $\phi(t) = \phi_T$  zeitunabhängig, während die Augenblicks(kreis) frequenz entsprechend dem Nachrichtensignal um die Träger(kreis)frequenz schwankt:

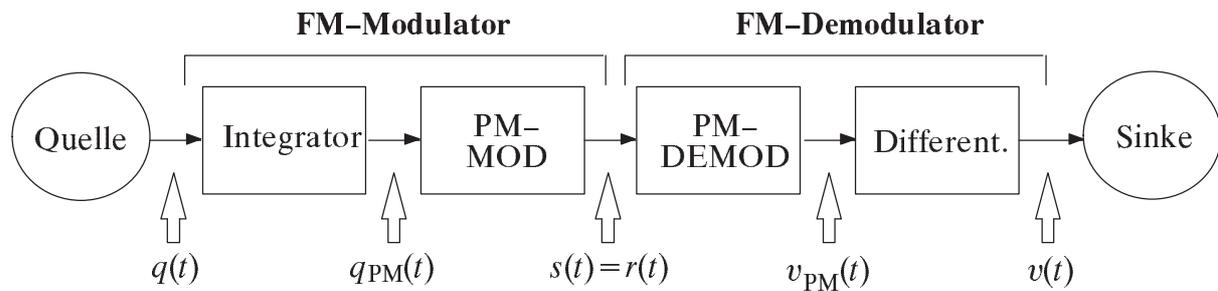
$$\omega_A(t) = \omega_T + K_{FM} \cdot q(t) , f_A(t) = f_T + \frac{K_{FM}}{2\pi} \cdot q(t) . \tag{1.53}$$

Die Proportionalitätskonstante  $K_{FM}$  unterscheidet sich von der Konstanten  $K_{PM}$  bei Phasenmodulation allein schon durch die Einheit. Ist  $q(t)$  ein Spannungsverlauf, so hat  $K_{FM}$  die Einheit "V<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup>" (im Gegensatz dazu hat  $K_{PM}$  die Einheit "V<sup>-1</sup>").

Aus den Gln. (1.43) und (1.53) folgt für die Winkelfunktion bei FM allgemein:

$$\psi(t) = \int \omega_A(t) dt = \omega_T \cdot t + \phi_T + K_{FM} \int q(t) dt . \tag{1.54}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich direkt ablesen, daß ein Frequenzmodulator mit Hilfe eines Integrators und eines Phasenmodulators realisiert werden kann (vgl. Bild 1.23). Der (reale) Phasenmodulator kann dabei z.B. entsprechend Bild 1.21 aufgebaut sein.



FM-Modulator: besteht aus Integrator und PM-Modulator,  
 FM-Demodulator: besteht aus PM-Demodulator und Differenzierer.

Bild 1.23: Zur Realisierungsmöglichkeit eines Frequenzmodulators bzw. - demodulators.

### 1.4.5 Frequenzmoduliertes Signal bei cosinusförmigem Nachrichtensignal

Unter der Voraussetzung eines cosinusförmigen Trägersignals (d.h.:  $\phi_T = 0^\circ$ ) und eines cosinusförmigen Nachrichtensignals gilt mit (1.53) für die Augenblickskreisfrequenz:

$$\omega_A(t) = \omega_T + K_{FM} \cdot \hat{q} \cdot \cos(\omega_N \cdot t) . \tag{1.55}$$

Durch Integration entsprechend (1.54) erhält man die Winkelfunktion bei FM:

$$\psi(t) = \omega_T \cdot t + \frac{K_{FM} \cdot \hat{q}}{\omega_N} \cdot \sin(\omega_N \cdot t) . \tag{1.56}$$

Ein Vergleich mit Abschnitt 1.4.3 macht deutlich, daß die Frequenzmodulation eines Cosinussignals das gleiche Sendesignal  $s(t)$  ergibt wie die Phasenmodulation eines sinusförmigen Quellensignals. Voraussetzung hierfür ist allerdings, daß zwischen den Modulatorkonstanten folgender Zusammenhang besteht:

$$K_{FM} = K_{PM} \cdot \omega_N . \tag{1.57}$$

Definiert man den Modulationsindex bei Frequenzmodulation als

$$\eta_{\text{FM}} = \frac{K_{\text{FM}} \cdot \hat{q}}{\omega_{\text{N}}} , \quad (1.58)$$

so läßt sich (mit  $\eta = \eta_{\text{FM}}$ ) das FM-modulierte Cosinussignal wie folgt darstellen:

$$s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega_{\text{T}} \cdot t + \eta \cdot \sin(\omega_{\text{N}} \cdot t)) . \quad (1.59)$$

Anzumerken bleibt, daß sich die Zeitsignale bei Phasen- und Frequenzmodulation durchaus auch qualitativ unterscheiden, wenn das Quellensignal keine harmonische Schwingung ist, sondern sich z.B. aus einer Summe harmonischer Schwingungen zusammensetzt. Hierauf wird in der Versuchsdurchführung D9 noch genauer eingegangen.

### 1.4.6 Spektren bei Winkelmodulation

Die Berechnung des Spektrums  $S(f)$  eines winkelmodulierten Signals  $s(t)$  ist kompliziert, wenn für das Nachrichtensignal  $q(t)$  nicht sehr einfache Funktionen angenommen werden. Die nachfolgende Beschreibung bezieht sich auf das Signal gemäß Gl. (1.59). Dieses Signal könnte z.B. aus der Phasenmodulation einer Sinusschwingung oder der Frequenzmodulation einer Cosinusschwingung entstanden sein.

Die Herleitung der Spektralfunktion ist in [6] ausführlich beschrieben. Hier soll nur der Rechenweg stichpunktartig angegeben und das Ergebnis interpretiert werden.

a) Das zu Gl. (1.59) zugehörige äquivalente Tiefpaßsignal lautet:

$$s_{\text{TP}}(t) = \hat{s} \cdot e^{j\eta \sin(\omega_{\text{N}} t)} . \quad (1.60)$$

b) Durch Anwenden einer Potenzreihenentwicklung und mehrerer trigonometrischer Beziehungen, geeigneten Aufspaltungen sowie geschicktem Zusammenfassen kann dieser Term wie folgt umgeformt werden:

$$s_{\text{TP}}(t) = \hat{s} \cdot e^{j\eta \sin(\omega_{\text{N}} t)} = \hat{s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot e^{j n \cdot \omega_{\text{N}} t} . \quad (1.61)$$

Hierbei bezeichnet  $J_n(\cdot)$  die Besselfunktion erster Art und  $n$ -ter Ordnung:

$$J_n(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\eta \sin(x) - nx)} dx . \quad (1.62)$$

Diese Gleichung gibt die Definition wieder. Zur Berechnung kann die nachfolgende Summenformel verwendet werden:

$$J_n(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\eta/2)^{n+2k}}{k! \cdot (n+k)!} . \quad (1.63)$$

Der Kurvenverlauf nach (1.62) bzw. (1.63) ist z.B. im Versuch D7 gezeichnet und auch im Fenster "Besselfunktion" des Programms "amv" für  $n = 0$  bis  $n = 4$  darstellbar.

c) Für das analytische Signal erhält man mit (1.51) und (1.61):

$$s_+(t) = \hat{s} \cdot e^{j\omega_{\text{T}} t} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot e^{j n \cdot \omega_{\text{N}} t} = \hat{s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot e^{j(\omega_{\text{T}} + n \cdot \omega_{\text{N}}) t} . \quad (1.64)$$

d) Für das reelle Signal gilt somit (Ersetzen der komplexen e– durch die cos–Funktion):

$$s(t) = \text{Re}\{s_+(t)\} = \hat{s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot \cos((\omega_T + n \cdot \omega_N) \cdot t) . \quad (1.65)$$

e) Nach Fouriertransformation folgt schließlich:

$$S(f) = \frac{\hat{s}}{2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot \delta(f \pm (f_T + n \cdot f_N)) . \quad (1.66)$$

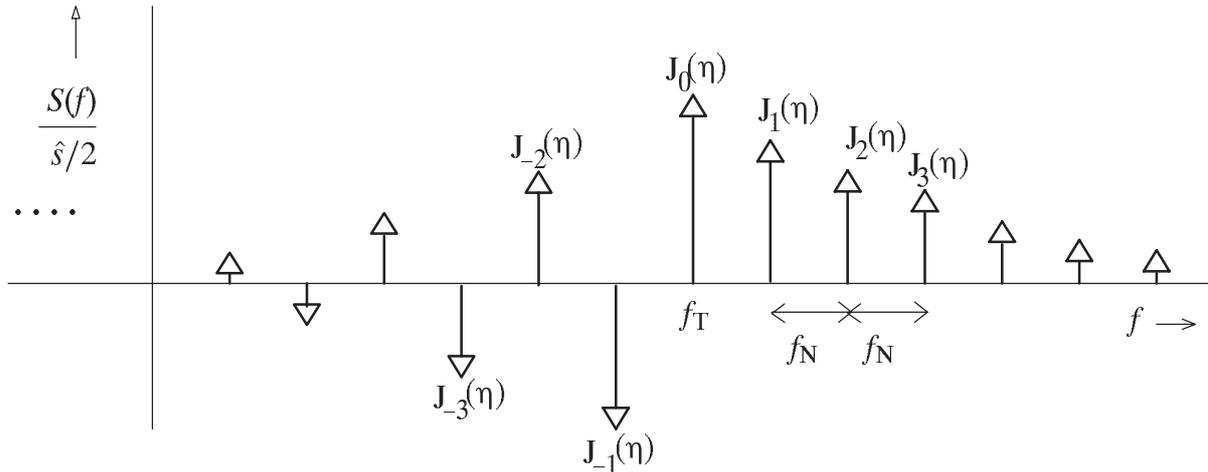


Bild 1.24: (Normiertes) Spektrum eines phasenmodulierten Sinussignals (bzw. eines frequenzmodulierten Cosinussignals) mit dem Modulationsindex  $\eta$ .

In Bild 1.24 ist  $S(f)$ , normiert auf  $\hat{s}/2$ , für  $f > 0$  dargestellt. Aus diesem Bild sind die folgenden Spektraleigenschaften eines winkelmodulierten Signals  $s(t)$  zu ersehen (nur dann exakt gültig, falls das Nachrichtensignal  $q(t)$  eine harmonische Schwingung ist):

- Das Spektrum besteht aus diskreten Linien bei  $f_T$ ,  $f_T \pm f_N$ ,  $f_T \pm 2f_N$ , usw. (gleiches gilt für die negativen Frequenzen).
- Das Spektrum ist dementsprechend (theoretisch) unendlich weit ausgelehnt.
- Die Höhen der Spektrallinien sind durch den Modulationsindex über die Besselfunktionen festgelegt.
- Die Spektrallinien für gerades  $n$  liegen symmetrisch um  $f_T$ , bei ungeradem  $n$  ist ein Vorzeichenwechsel zwischen  $+n$  und  $-n$  zu berücksichtigen.
- Die Winkelmodulation (PM, FM) einer harmonischen Schwingung mit anderer Phase des Träger- und/oder des Nachrichtensignals führt zu einem Spektrum mit gleichem Betrag. Es unterscheidet sich nur durch eine andere Phase.
- Besteht das Nachrichtensignal  $q(t)$  aus mehreren Einzelschwingungen, so ist die Berechnung des Spektrums  $S(f)$  schwierig.

Es soll an dieser Stelle nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß das hier berechnete zeitunabhängige Spektrum  $S(f)$  auf keinen Fall mit der zeitabhängigen Augenblicksfrequenz  $f_A(t)$  verwechselt werden darf. Näheres hierzu in V4.

## 1.5 Demodulation winkelmodulierter Signale

In diesem Abschnitt werden je ein idealer und ein realer Demodulator für phasen- und frequenzmodulierte Signale erläutert.

### 1.5.1 Ideale Phasendemodulation

Aufgabe eines Phasendemodulators ist es, aus der Phase  $\phi_r(t)$  des Empfangssignals  $r(t)$  das Sinkensignal  $v(t)$  zu generieren. Dieses sollte im Idealfall gleich dem gesendeten Nachrichtensignal sein (vgl. Bild 1.1):  $v(t) = q(t)$ .

Wie das Sendesignal kann auch das komplexe, analytische Empfangssignal in folgende Form gebracht werden:

$$r_+(t) = r_{\text{TP}}(t) \cdot e^{j\omega_T t} \quad \text{mit} \quad r_{\text{TP}}(t) = a_r(t) \cdot e^{j\phi_r(t)}. \quad (1.67)$$

Bei idealem Kanal gilt stets  $r_+(t) = s_+(t)$  und  $r_{\text{TP}}(t) = s_{\text{TP}}(t)$ . Ist dem Demodulator die Träger(kreis)frequenz sowie die Trägerphase exakt bekannt, so kann er die Phase  $\phi_r(t)$  des äquivalenten Tiefpaßsignals  $r_{\text{TP}}(t)$  detektieren. Handelt es sich bei  $r(t) = s(t)$  um ein ideal phasenmoduliertes Signal, so ist nach Gl. (1.43) die Phase proportional zum Nachrichtensignal  $q(t)$ . Berücksichtigt man die Proportionalitätskonstante  $K_{\text{PM}}$ , so ergibt sich direkt die Gleichung eines idealen Phasendemodulators:

$$v(t) = \frac{1}{K_{\text{PM}}} \cdot \phi_r(t) \quad \text{mit} \quad \phi_r(t) = \arctan \frac{\text{Im}\{r_{\text{TP}}(t)\}}{\text{Re}\{r_{\text{TP}}(t)\}}. \quad (1.68)$$

Die Phasenfunktion wird demnach aus dem Real- und Imaginärteil des äquivalenten Tiefpaßsignals  $r_{\text{TP}}(t)$  ermittelt. Sind Real- und Imaginärteil negativ, so muß zu dem Wert von Gl. (1.68) noch der Winkel  $180^\circ$  addiert werden. Das demodulierte Signal  $v(t)$  stimmt dann exakt mit dem Nachrichtensignal  $q(t)$  überein, falls

- die Phasenmodulation ideal erfolgte,
- ein idealer Übertragungskanal vorliegt,
- der Modulationsindex  $\eta$  kleiner als  $\pi$  ist.

Sind die beiden erstgenannten Bedingungen nicht erfüllt, so wird es zu (nichtlinearen) Verzerrungen kommen. Ist der Modulationsindex zu groß, gibt es Mehrdeutigkeiten bei der Demodulation, und das Sinkensignal  $v(t)$  wird zu den Zeitpunkten, zu denen die Phasenfunktion  $\phi_r(t)$  die Werte  $\pm\pi$  überschreitet, Unstetigkeitsstellen aufweisen. Bei einer aufwendigeren Demodulatorschaltung (z.B. mit PLL) tritt dieses Problem nicht auf.

### 1.5.2 Näherungsweise Phasendemodulation mit Ringmodulator

Für die folgende Schaltungsbeschreibung wird ohne Verletzung der Allgemeingültigkeit eine sendeseitige Trägeramplitude von  $\hat{s} = 1$  und eine Trägerphase von  $90^\circ$  vorausgesetzt. Bei idealer Phasenmodulation und idealem Kanal gilt somit (vgl. Bild 1.25):

$$r(t) = s(t) = \sin(\omega_T \cdot t + K_{\text{PM}} \cdot q(t)). \quad (1.69)$$

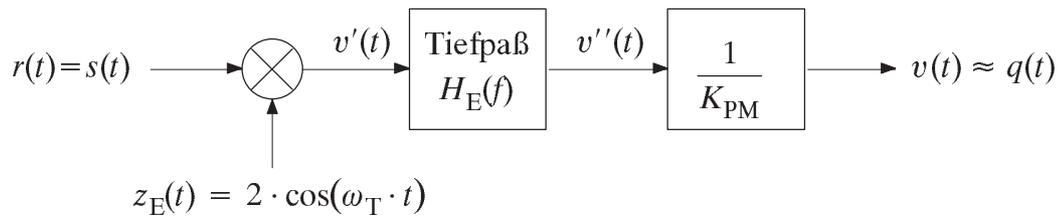


Bild 1.25: Eine Realisierungsform des Phasendemodulators für kleine  $\eta$ .

Multipliziert man das Signal  $r(t)$  mit dem gegenüber dem Sender um  $-90^\circ$  zeitversetzten Trägersignal  $z_E(t)$ , so erhält man das Ergebnis

$$v'(t) = r(t) \cdot z_E(t) = 2 \cdot \sin(\omega_T \cdot t + K_{PM} \cdot q(t)) \cdot \cos(\omega_T \cdot t) , \tag{1.70}$$

und mit der trigonometrischen Umformung  $2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$ :

$$v'(t) = \sin(K_{PM} \cdot q(t)) + \sin(2\omega_T \cdot t + K_{PM} \cdot q(t)) . \tag{1.71}$$

Der zweite Term liegt im Bereich um die doppelte Trägerfrequenz und wird durch das Tiefpaßfilter entfernt. Für das Signal nach dem Tiefpaß gilt somit:

$$v''(t) = \sin(K_{PM} \cdot q(t)) . \tag{1.72}$$

Berücksichtigt man die für kleine Winkel gültige Näherung  $\sin(\alpha) \approx \alpha$ , so erkennt man, daß das Sinkensignal  $v(t)$  in erster Näherung proportional zum Nachrichtensignal  $q(t)$  ist, solange der Modulationsindex (Phasenhub)  $\eta$  klein ist. Bei größeren Werten von  $\eta$  kommt es dagegen zu nichtlinearen Verzerrungen (Klirrfaktor 3. Ordnung).

### 1.5.3 FM-Demodulation

In Abschnitt 1.4.4 wurde gezeigt, daß eine (ideale) Frequenzmodulation z.B. durch einen (idealen) Phasenmodulator realisiert werden kann, wenn das Nachrichtensignal  $q(t)$  vor der PM einer Zeitintegration unterworfen wird. Deshalb ist es auch verständlich, daß sich der (ideale) Frequenzdemodulator aus der Zusammenschaltung eines idealen Phasendemodulators und eines Differentiationsgliedes ergibt (vgl. Bild 1.23).

Abschließend soll hier eine Schaltung zur Frequenzdemodulation angegeben werden, die nach dem Prinzip einer PLL (*Phased Locked Loop*) arbeitet und dabei einen VCO (*Voltage Controlled Oscillator*) verwendet. Bild 1.26 zeigt das entsprechende Blockschaltbild. Der Phasendetektor ermittelt die Abstände der Nulldurchgänge zwischen dem Empfangssignal  $r(t)$  und dem vom VCO bereitgestellten Vergleichssignal. Nach dem Tiefpaßfilter und Verstärker erhält man das Sinkensignal  $v(t)$ , welches gleichzeitig den VCO steuert. Eine eingehende Beschreibung dieser Anordnung findet sich z.B. in [2].

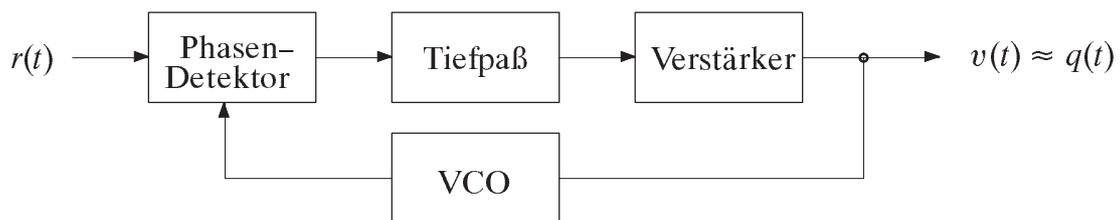


Bild 1.26: Prinzip des PLL-Frequenzdemodulators.

## 1.6 Verzerrungen

Ideale Modulation und Demodulation bedeutet, daß das Sinkensignal  $v(t)$  identisch mit dem Quellensignal  $q(t)$  ist. Gilt zumindest der Zusammenhang  $v(t) = \alpha \cdot q(t - \tau)$ , so liegt eine verzerrungsfreie Übertragung vor. Die Größen  $\alpha$  und  $\tau$  bezeichnen hierbei einen Dämpfungsfaktor und eine Laufzeit des Signals. Beides kann toleriert werden.

Da die beiden Größen  $\alpha$  und  $\tau$  für alle Frequenzen gleich sind, bleibt in diesem Fall die prinzipielle Signalform des Quellensignals  $q(t)$  im Sinkensignal  $v(t)$  erhalten. In allen anderen Fällen ist dagegen das demodulierte Nachrichtensignal  $v(t)$  gegenüber  $q(t)$  verzerrt. Hierbei unterscheidet man zwischen linearen und nichtlinearen Verzerrungen.

### 1.6.1 Lineare Kanalverzerrungen

Von linearen Verzerrungen spricht man dann, wenn zwar eine harmonische Schwingung am Eingang eine ebensolche Schwingung mit gleicher Frequenz am Ausgang bewirkt, deren Amplitude und Phase jedoch frequenzabhängig ist. Besteht das Eingangssignal aus einer Summe von harmonischen Schwingungen, so werden bei einem solchen Kanal die einzelnen Frequenzanteile unterschiedlich stark gedämpft und/oder verzögert, und es entsteht eine störende Signalverformung.

Lineare Verzerrungen des Kanals werden durch die Kanalübertragungsfunktion

$$H_K(f) = e^{-a_K(f)} \cdot e^{-jb_K(f)} \quad (1.73)$$

beschrieben. Ist der Dämpfungsverlauf  $a_K(f)$  innerhalb der Signalbandbreite konstant und der Phasenverlauf  $b_K(f)$  eine mit der Frequenz  $f$  linear ansteigende Funktion (oder identisch 0), so bewirkt der Kanal nur eine frequenzunabhängige Signaldämpfung und Signallaufzeit, aber keine Signalverzerrungen.

Die linearen Verzerrungen kann man unterteilen in

- *Dämpfungsverzerrungen:* Diese treten auf, wenn der Dämpfungsverlauf  $a_K(f)$  im interessierenden Frequenzbereich nicht konstant ist. Eine Bandbegrenzung des Signals ist ein Sonderfall von Dämpfungsverzerrungen.
- *Phasenverzerrungen:* Diese sind darauf zurückzuführen, daß der Phasenverlauf  $b_K(f)$  nichtlinear mit der Frequenz ansteigt.

### 1.6.2 Lineare Verzerrungen im demodulierten AM-Signal

Lineare Kanalverzerrungen führen auch zu einer linearen Verzerrung des demodulierten Signals, wenn ZSB-Amplitudenmodulation zusammen mit Synchrondemodulation eingesetzt wird. In diesem Fall besitzt das Sinkensignal  $v(t)$  genau die gleichen Spektralanteile wie das sendeseitige Nachrichtensignal  $q(t)$ , doch sind die einzelnen Frequenzanteile an der Sinke entsprechend dem Dämpfungs- und Phasenverlauf des Kanals amplituden- und phasenmäßig anders zusammengesetzt als an der Quelle.

Bereits an dieser Stelle wird darauf hingewiesen, daß lineare Kanalverzerrungen bei anderen Systemvarianten als der Kombination ZSB-Amplitudenmodulation/Synchrondemodulation stets zu nichtlinearen Verzerrungen führen (vgl. Abschnitt 1.6.3).

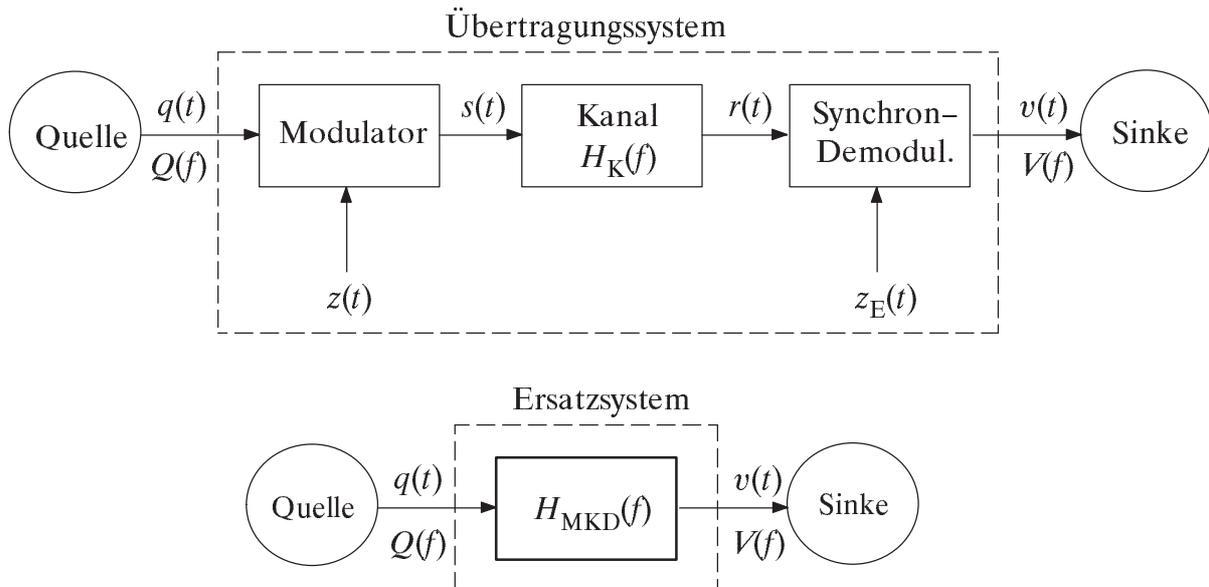


Bild 1.27: Zur Definition der resultierenden Übertragungsfunktion  $H_{MKD}(f)$ .

Bei Synchrondemodulation kann der Einfluß linearer Kanalverzerrungen auf das Nachrichtensignal durch eine resultierende Übertragungsfunktion beschrieben werden, die aus den Spektralfunktionen am Ein- und Ausgang abgeleitet wird (vgl. Bild 1.27):

$$H_{MKD}(f) = \frac{V(f)}{Q(f)} \quad (1.74)$$

Hierbei steht "MKD" für "Modulator-Kanal-Demodulator". Bei ZSB-Modulation und Synchrondemodulation gilt dabei folgender Zusammenhang:

$$H_{MKD}(f) = \frac{1}{2} \cdot [H_K(f + f_T) + H_K(f - f_T)] = \frac{1}{2} \cdot [H_K(f_T + f) + H_K^*(f_T - f)] \quad (1.75)$$

Aus Gl. (1.75) folgt direkt, daß unterschiedliche Frequenzen unterschiedlich übertragen werden. Besteht  $Q(f)$  aus mehreren Frequenzanteilen (z.B. kontinuierliches Spektrum), so kommt es zu linearen Verzerrungen.

### 1.6.3 Nichtlineare Verzerrungen durch Hüllkurvendemodulation

Von nichtlinearen Verzerrungen spricht man, wenn im demodulierten Nachrichtensignal  $v(t)$  Frequenzen erscheinen, die im ursprünglichen Signal  $q(t)$  nicht enthalten waren. Sie entstehen z.B. bei der Hüllkurvendemodulation eines ESB-modulierten Signals oder eines ZSB-modulierten Signals mit Modulationsgrad  $m > 1$ . Ist das Nachrichtensignal  $q(t)$  eine harmonische Schwingung mit der Frequenz  $f_N$ , so weist das rekonstruierte Signal  $v(t)$  auch Anteile bei Vielfachen von  $f_N$  auf ("Oberwellen"). Das Sinkensignal  $v(t)$  ist dann nicht mehr cosinusförmig; es kommt zu "Klirren".

Mathematisch läßt sich dieser Sachverhalt wie folgt ausdrücken: Aus der Schwingung  $q(t) = \hat{q} \cdot \cos(\omega_N \cdot t)$  wird nach der Demodulation ein Signal mit Oberwellen:

$$v(t) = \hat{v}_1 \cdot \cos(\omega_N \cdot t) + \hat{v}_2 \cdot \cos(2\omega_N \cdot t) + \hat{v}_3 \cdot \cos(3\omega_N \cdot t) + \dots \quad (1.76)$$

Die Stärke der nichtlinearen Verzerrung wird durch den Klirrfaktor

$$K = \frac{\sqrt{\hat{v}_2^2 + \hat{v}_3^2 + \hat{v}_4^2 + \dots}}{\hat{v}_1} \quad (1.77)$$

beschrieben. Der Klirrfaktor  $n$ -ter Ordnung ist dabei wie folgt definiert ( $n \geq 2$ ):

$$K_n = \frac{|\hat{v}_n|}{|\hat{v}_1|} \quad (1.78)$$

Somit kann für den Gesamtklirrfaktor auch geschrieben werden:

$$K = \sqrt{K_2^2 + K_3^2 + K_4^2 + \dots} \quad (1.79)$$

Bei ESB-Modulation mit Modulationsgrad  $\mu$  und Hüllkurvendemodulation gilt z.B.:

$$K_{\text{ESB/HKD}} \approx \frac{\mu}{4} \quad (1.80)$$

Ist  $q(t)$  eine harmonische Schwingung, so können die Oberwellen durch einen Tiefpaß entfernt werden. Ist  $q(t)$  dagegen ein "natürliches" Quellensignal, also eine Summe verschiedener Frequenzanteile, so fallen die Oberwellen der niedrigen Frequenzen wiederum in den Bereich des Spektrums, und es entstehen nichtkorrigierbare Verfälschungen.

Der Einfluß linearer Verzerrungen soll hier am Beispiel der Dämpfungsverzerrungen verdeutlicht werden. Steigt der Dämpfungsverlauf  $a_K(f)$  mit der Frequenz an, so kommt das obere Seitenband (OSB) schwächer am Empfänger als das untere Seitenband (USB) an. Die Ortskurve des Empfangssignals  $r(t)$  ist dann nicht mehr eine horizontale Gerade, sondern eine Ellipse (vgl. Bild 1.28), und es ergeben sich bei Hüllkurvendemodulation nichtlineare Verzerrungen (Oberwellen).

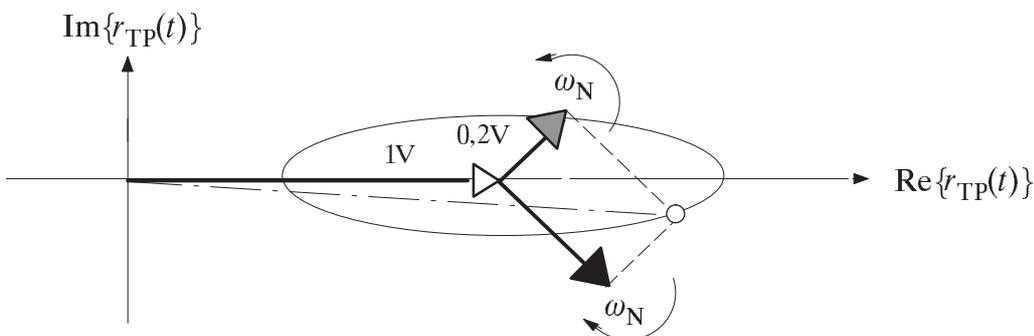


Bild 1.28: Ortskurve des Empfangssignals  $r(t)$  bei ZSB-AM mit Träger für den Fall, daß das OSB (graue Pfeilspitze) schwächer ankommt als das USB (schwarze Pfeilspitze).

Bei Phasenverzerrungen bleibt die Ortskurve zwar weiterhin eine Gerade, aber diese ist dann nicht mehr horizontal, sondern gedreht. Auch (lineare) Phasenverzerrungen des Kanals bewirken bei Hüllkurvendemodulation nichtlineare Verzerrungen im Signal  $v(t)$ .

Die hier beschriebenen nichtlinearen Verzerrungen entstehen aufgrund eines nicht idealen Demodulators. Weist der Kanal selbst nichtlineare Verzerrungen auf, so machen sich diese natürlich auch im demodulierten Signal  $v(t)$  bemerkbar, und zwar auch dann, wenn anstelle des Hüllkurvendemodulators ein Synchrondemodulator eingesetzt wird.

### 1.6.4 Bandbegrenzung eines winkelmodulierten Signals

Das Spektrum  $S(f)$  bei Winkelmodulation (PM/FM) ist – wie in Abschnitt 1.4.6 dargelegt – unendlich weit ausgedehnt. Aufgrund der Frequenzökonomie kann aber in der Realität dem Signal nur eine endliche Bandbreite  $B_{\text{HF}}$  zur Verfügung gestellt werden. Durch eine solche, in Bild 1.29 veranschaulichte Bandbegrenzung entstehen ebenfalls nichtlineare Verzerrungen, wie in der Versuchsdurchführung D10 noch gezeigt werden wird.

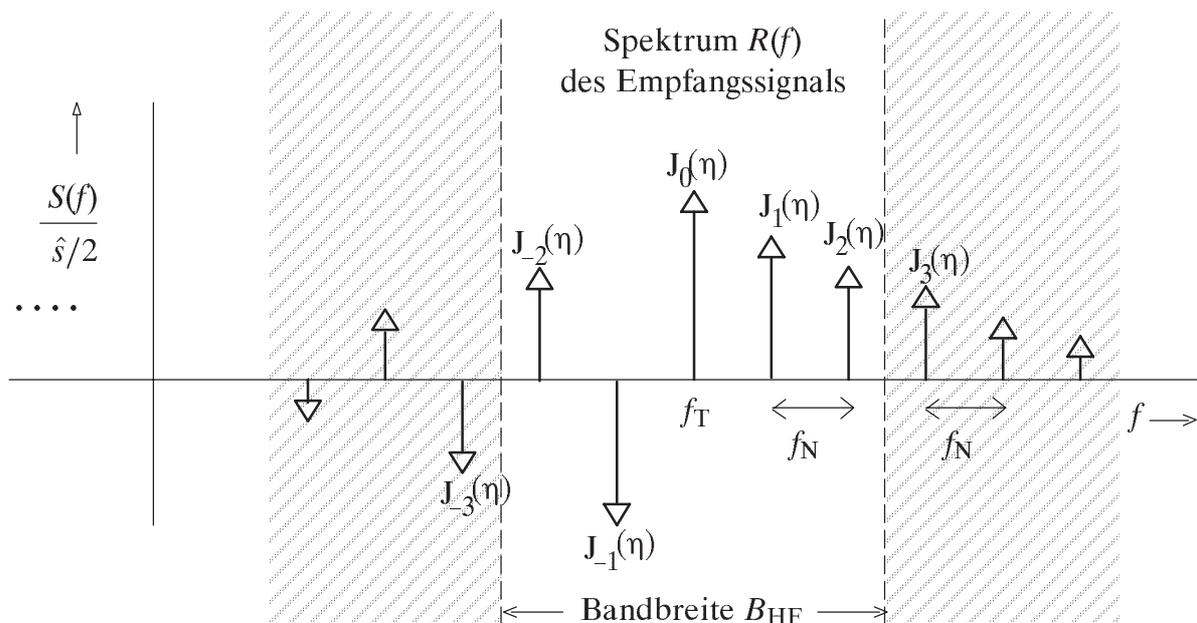


Bild 1.29: Verdeutlichung der Bandbegrenzung eines winkelmodulierten Signals.

Dies läßt wie folgt erklären: Bei idealer Phasen- oder Frequenzmodulation ist die Ortskurve ein Kreisbogen (siehe Abschnitt 1.4.3). Dieser Kreisbogen ergibt sich allerdings nur dann, wenn alle (i.a. unendlich vielen) Bessellinien in der Ortskurve mit den richtigen Zeigerlängen und richtigen Phasenlagen vektoriell addiert werden und mit den entsprechenden Kreisfrequenzen rotieren.

Dagegen wird die kreisförmige Ortskurve verändert, wenn die Bessellinien verfälscht werden (z.B. durch lineare Verzerrungen auf dem Kanal) oder ganz fehlen (z.B. durch Bandbegrenzung). Beispielsweise ergibt sich eine parabelförmige Ortskurve, wenn nur die Spektrallinien mit den Gewichten  $J_{-2}(\eta)$ ,  $J_{-1}(\eta)$ ,  $J_0(\eta)$ ,  $J_1(\eta)$  und  $J_2(\eta)$  wirksam sind.

Da der (ideale) Winkeldemodulator die Phase  $\phi_r(t)$  des Empfangssignals detektiert und daraus das Sinkensignal  $v(t)$  erzeugt (siehe Abschnitt 1.5), wird dieses verfälscht, und zwar nichtlinear. Das bedeutet: Aufgrund linearer Verzerrungen auf dem Kanal kommt es hier zu nichtlinearen Verzerrungen im demodulierten Signal (Oberwellen).

Diese nichtlinearen Verzerrungen sind stets von 3. Ordnung, d.h. bei einem übertragenen Cosinussignal der Frequenz  $f_N$  tritt auch ein Anteil mit der Frequenz  $3 \cdot f_N$  auf, nicht jedoch mit der Frequenz  $2 \cdot f_N$ . Je kleiner die zur Verfügung stehende Bandbreite  $B_{\text{HF}}$  ist, desto größer wird der die nichtlinearen Verzerrungen beschreibende Klirrfaktor.

Als Faustformel für die erforderliche HF-Bandbreite des Übertragungskanals gilt für einen geforderten Klirrfaktor  $K < 10\%$ :

$$B_{\text{HF}} \geq 2 \cdot f_{\text{N,max}} \cdot (\eta + 1) . \quad (1.81)$$

Soll der Klirrfaktor  $K$  dagegen kleiner als 1% sein, so muß die Bandbreite weiter vergrößert werden. Als einfache Faustformel gilt dann:

$$B_{\text{HF}} \geq 2 \cdot f_{\text{N,max}} \cdot (\eta + 2) . \quad (1.82)$$

Dies zeigt auch die Versuchsdurchführung D10.

## 1.7 Einfluß von Rauschstörungen

Die Beschreibung der analogen Modulationsverfahren in den Abschnitten 1.1 bis 1.6 wurde teilweise durch die Darstellungsmöglichkeiten des Programms "amv" bestimmt. Dabei wurden insbesondere die Signale, Spektren, Zeigerdiagramme und Ortskurven bei Amplitudenmodulation (sowohl ZSB als auch ESB) und bei der Winkelmodulation (PM bzw. FM) eingehend betrachtet. Neben den verschiedenen Modulatoren und einigen Demodulatoren wurde auch das Verhalten der verschiedenen Verfahren bei einem nicht idealen Übertragungskanal (lineare Verzerrungen) beschrieben. Nicht behandelt wurde dagegen bisher das Systemverhalten bei Vorhandensein von Rauschstörungen.

Für das Folgende gehen wir davon aus, daß am Kanalausgang zusätzlich zum Nutzsignal  $s(t)$  auch ein Rauschsignal  $n(t)$  auftritt. Ist die Übertragungsfunktion  $H_K(f)$  des Kanals ideal, so gilt nun für das Empfangssignal (vgl. Bild 1.1):

$$r(t) = s(t) + n(t) . \quad (1.83)$$

Das Rauschsignal  $n(t)$  ist von seiner Natur her stets ein stochastisches Signal. Dieses Signal sei additiv, weiß (d.h. es enthält alle Frequenzen gleichermaßen) und gaußverteilt. Ist der Grund für  $n(t)$  das thermische Rauschen, so gilt im Bereich  $|f| < B_{\text{th}} \approx 6000$  GHz für die physikalische, einseitige Rauschleistungsdichte

$$N_0 = F \cdot k_B \cdot \theta , \quad (1.84)$$

wobei  $F$  die Rauschzahl,  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Ws/Hz die Boltzmann-Konstante und  $\theta$  [K] die absolute Temperatur bezeichnet. Die mathematische, zweiseitige Rauschleistungsdichte ist dann  $\Phi_n(f) = N_0/2$  (vgl. Bild 1.30).

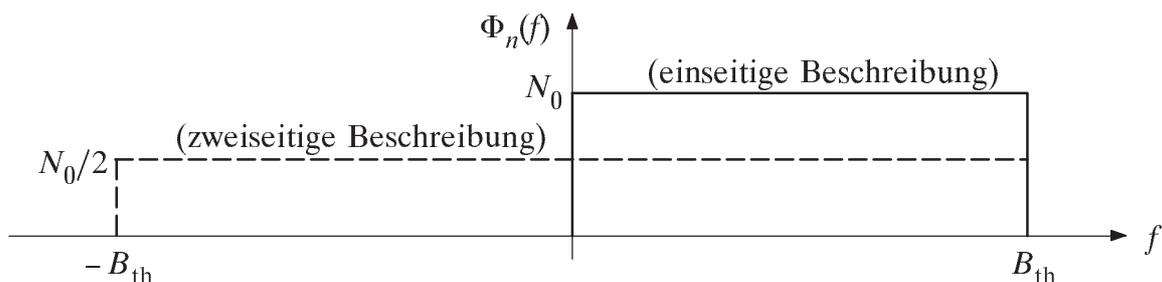


Bild 1.30: Physikalische (einseitige) und mathematische (zweiseitige) Rauschleistungsdichte.

Das Rauschsignal  $n(t)$  am Empfängereingang beeinträchtigt die Demodulation, so daß das demodulierte Signal  $v(t)$  sich ebenfalls aus einem Nutzanteil und einem Rauschanteil zusammensetzt:

$$v(t) = v_{\text{Nutz}}(t) + v_{\text{Rausch}}(t) . \tag{1.85}$$

Der Nutzanteil würde sich für  $n(t) = 0$  ergeben. Dieser wurde in den Abschnitten 1.2 bis 1.6 behandelt. Der Rauschanteil ist demnach der Anteil von  $v(t)$ , der ausschließlich auf  $n(t)$  zurückzuführen ist. Als Maß für die Qualität eines Übertragungssystems benutzt man meist den Signalrauschabstand. Ist  $v(t)$  eine Spannung und  $R$  ein Widerstand, so gilt:

$$Q_v = 10 \cdot \lg(q_v) = 10 \cdot \lg \frac{P_{\text{Nutz}}}{P_{\text{Rausch}}}$$

mit  $P_{\text{Nutz}} = \frac{1}{R} \cdot \overline{v_{\text{Nutz}}^2(t)}$  (Leistung des Nutzanteils), (1.86)

$$P_{\text{Rausch}} = \frac{1}{R} \cdot \overline{v_{\text{Rausch}}^2(t)} \quad (\text{Leistung des Rauschanteils}).$$

In Bild 1.31 werden die einzelnen Modulationsverfahren anhand des erreichbaren Signalrauschabstandes  $Q_v$  verglichen. Die Abszisse ist hier ebenfalls logarithmisch dargestellt.

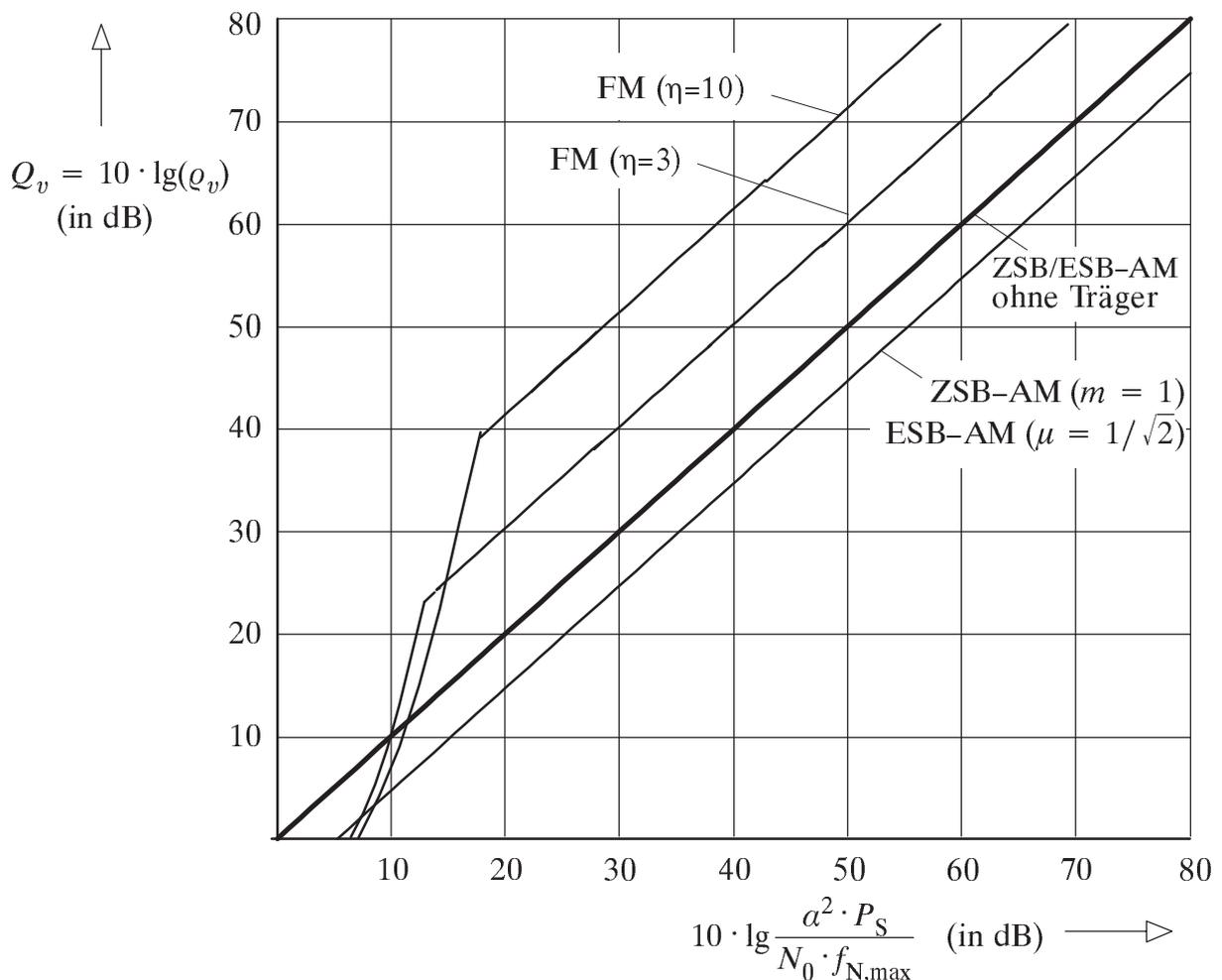


Bild 1.31: Vergleich der Modulationsverfahren hinsichtlich des Signalrauschabstandes.

Als Grundlage dieses Vergleichs wird vorausgesetzt:

- ein cosinusförmiges Nachrichtensignal der Frequenz  $f_{N,\max}$ ,
- eine konstante Sendeleistung  $P_S$ ,
- eine konstante Rauschleistungsdichte  $N_0$ ,
- ein eventuell dämpfender, aber für alle Frequenzen gleicher Kanal mit  $H_K(f) = \alpha$ .

Bei idealer Zweiseitenband–Amplitudenmodulation ohne Träger gilt:

$$Q_v = \frac{P_E}{N_0 \cdot f_{N,\max}} = \frac{\alpha^2 \cdot P_S}{N_0 \cdot f_{N,\max}} . \quad (1.87)$$

Die Übertragungsqualität ist um so besser, je größer die Empfangsleistung  $P_E = \alpha^2 \cdot P_S$  ist. Je größer dagegen die Rauschleistungsdichte  $N_0$  ist und je mehr Bandbreite ( $f_{N,\max}$ ) zur Verfügung gestellt werden muß, desto größer ist die Rauschleistung  $P_{\text{Rausch}}$  des demodulierten Signals und dementsprechend klein ist auch das S/N–Verhältnis. In der doppelt–logarithmischen Darstellung von Bild 1.31 ist dieser Kurvenverlauf für die ZSB–AM ohne Träger eine Gerade mit 45° Steigung durch den Ursprung.

Die Kurve für ZSB–AM mit Träger liegt abhängig vom Modulationsgrad  $m$  für alle Abszissenwerte um den konstanten dB–Wert  $10 \cdot \lg(1 + 2/m^2)$  unterhalb der Kurve für die ideale AM ohne Träger ( $m \rightarrow \infty$ ). Der Grund hierfür ist, daß um so weniger Leistung zur eigentlichen Modulation aufgewendet wird, je kleiner der Modulationsgrad ist. Bei  $m = 1$  (Grenzwert, für den Hüllkurvendemodulation gerade noch angewandt werden kann) wird bereits 2/3 der zur Verfügung stehenden Leistung für die Übertragung des Trägers benötigt. Der Verlust an S/N–Abstand beträgt hier bereits  $10 \cdot \lg(3) = 4.77$  dB. Bei  $m = 0.5$  liegt die Kurve sogar ca. 9.5 dB unterhalb der Vergleichskurve.

Für ein ESB–AM–System mit dem Modulationsgrad  $\mu$  ergibt sich die gleiche Einbuße an Signalrauschabstand wie bei einem ZSB–AM–System mit Modulationsgrad  $m$ , wenn  $\mu = m/\sqrt{2}$  gewählt wird (hierbei Definitionen (1.21) bzw. (1.29) beachten).

Ohne Ableitung wird noch das S/N–Verhältnis für Winkelmodulation (Modulationsindex  $\eta$ ) angegeben. Hinsichtlich Störungen unterscheiden sich PM und FM durchaus:

$$Q_{v,PM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta^2 \cdot \alpha^2 \cdot P_S}{N_0 \cdot f_{N,\max}} , \quad Q_{v,FM} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\eta^2 \cdot \alpha^2 \cdot P_S}{N_0 \cdot f_{N,\max}} . \quad (1.88)$$

Bei FM ergibt sich erst für  $\eta > 0,82$  eine Verbesserung gegenüber idealer AM. Mit  $\eta = 3$  beträgt die Verbesserung bereits 11.3 dB, mit  $\eta = 10$  ca. 21.8 dB. Die PM–Kurve liegt stets um  $10 \cdot \lg(3) = 4.77$  dB unterhalb der vergleichbaren FM–Kurve (gleiches  $\eta$ ).

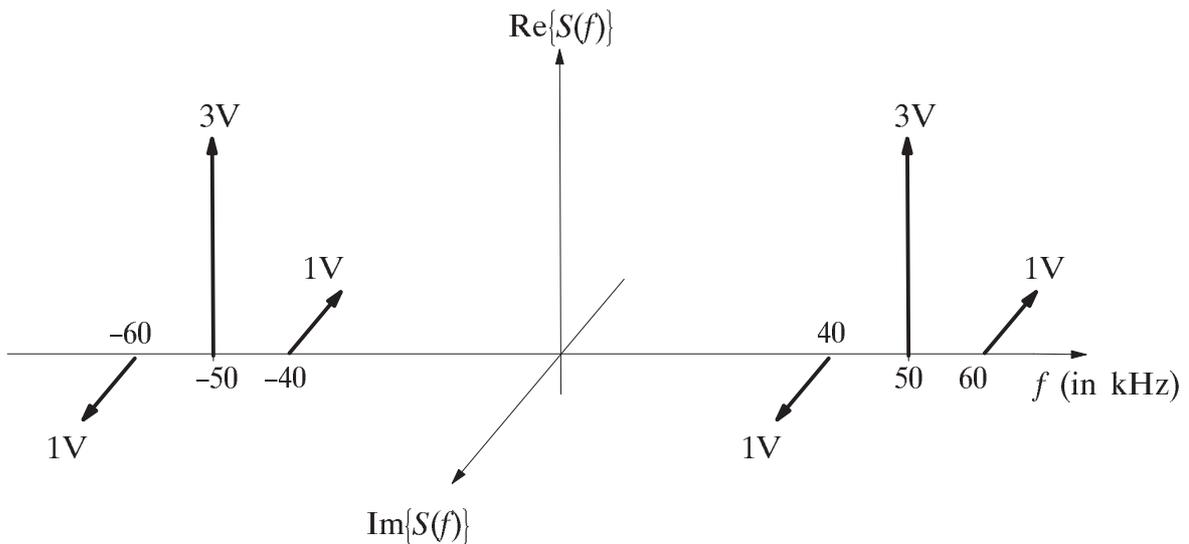
Den Vorteil einer besseren Übertragungsqualität gegenüber AM, z.B. deutlich hörbar beim Vergleich von UKW– und MW–Rundfunk, erkauft man sich durch einen höheren technischen Aufwand, eine deutlich größere Bandbreite und einen systematischen Klirrfaktor (nichtlineare Verzerrungen) bei Bandbegrenzung des Übertragungskanals.

Gl. (1.88) ist nur gültig, wenn die Störungen hinreichend klein sind. Bei großen Störungen (z.B. bei einem Abszissenwert kleiner 10 dB) ist die Winkelmodulation schlechter als Amplitudenmodulation. Man spricht vom sogenannten "FM–Knick" (siehe Bild 1.31).

## 2 Vorbereitungsfragen

### V1 Spektrum der Amplitudenmodulation

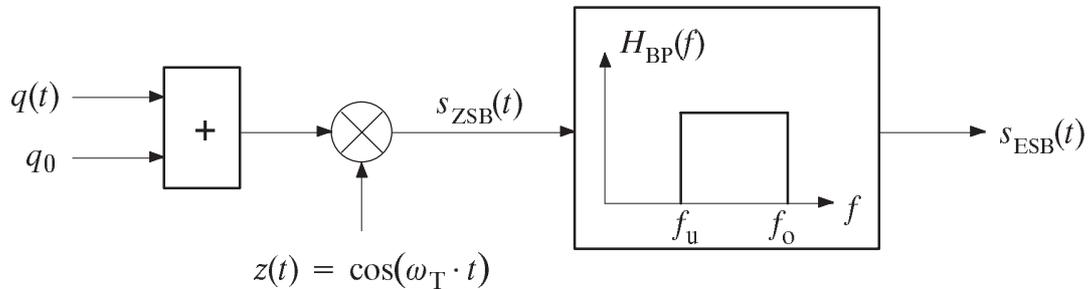
Gegeben ist durch die nachfolgende Skizze das Spektrum des Signals  $s(t)$ , das sich aus der Amplitudenmodulation eines Trägersignals  $z(t)$  der Frequenz  $f_T = 50$  kHz mit einer harmonischen Schwingung  $q(t)$  ergibt.



- Berechnen Sie das modulierte Signal  $s(t)$  aus obigem Spektrum.
- Welche Art von Amplitudenmodulation liegt hier vor? Geben Sie  $s(t)$  allgemein an.
- Bestimmen Sie die Parameter von Trägersignal, Nachrichtensignal und Modulator.
- Erklären Sie das obige Spektrum  $S(f)$  mit Hilfe der Faltung.
- Kann das Nachrichtensignal  $q(t)$  mit einem Hüllkurvendemodulator verzerrungsfrei zurückgewonnen werden? Begründung.

## V2 Einseitenband-Amplitudenmodulation

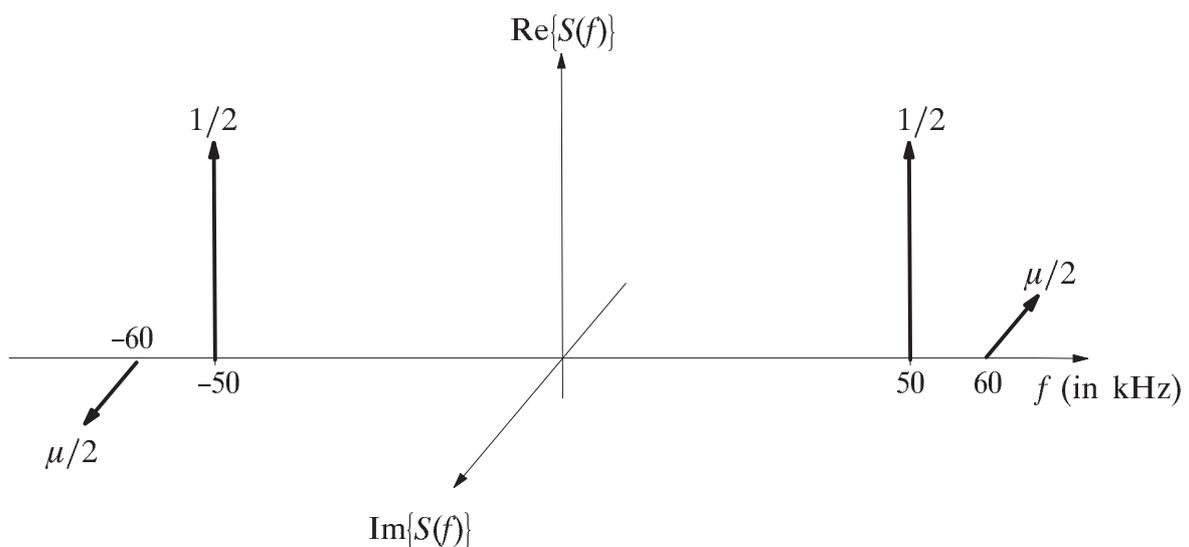
Betrachtet wird nun die Einseitenbandmodulation mit Träger. Hinsichtlich Trägersignal  $z(t)$ , Nachrichtensignal  $q(t)$  und Gleichanteil  $q_0$  gelten die gleichen Voraussetzungen wie in Vorbereitungsfrage V1, so daß das Signal  $s_{ZSB}(t)$  vor dem Bandpaß identisch mit dem Sendesignal  $s(t)$  von V1 ist (siehe Skizze).



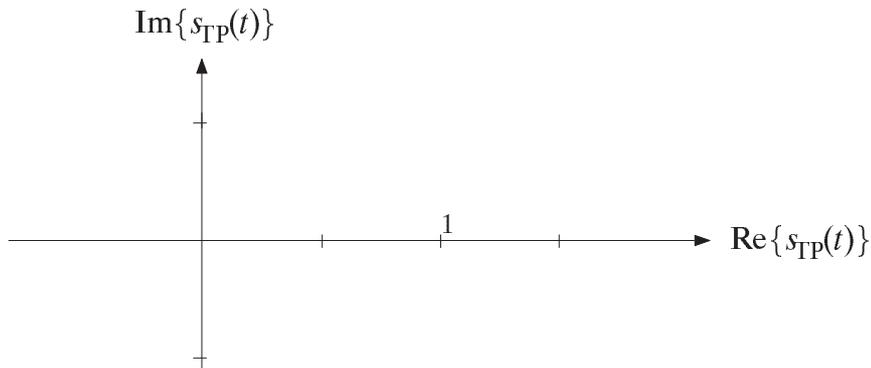
- a) In welchen Bereichen können die Grenzfrequenzen  $f_u$  und  $f_o$  des (rechteckförmigen) Bandpasses liegen, damit sich eine OSB- bzw. USB-Modulation ergibt?
- b) Wie groß ist der Modulationsgrad  $\mu$  bei Einseitenbandmodulation?

Im folgenden sei  $f_u = 45$  kHz und  $f_o = 65$  kHz, so daß sich eine OSB-Modulation ergibt.

- c) Begründen Sie, daß das ESB-modulierte Signal  $s(t) = s_{ESB}(t)$  das folgende (auf den Gleichanteil  $q_0$  normierte) Spektrum aufweist.



- d) Welche Form hat das (normierte) ESB-modulierte Signal  $s(t) = s_{\text{ESB}}(t)$ ?
- e) Wie lauten das zu Punkt d) gehörige analytische Signal  $s_+(t)$  und das äquivalente Tiefpaßsignal  $s_{\text{TP}}(t)$  sowie deren Spektren?
- f) Skizzieren Sie die Ortskurve für  $\mu = 0.5$ . Markieren Sie den Zeitpunkt  $t = 0$ .

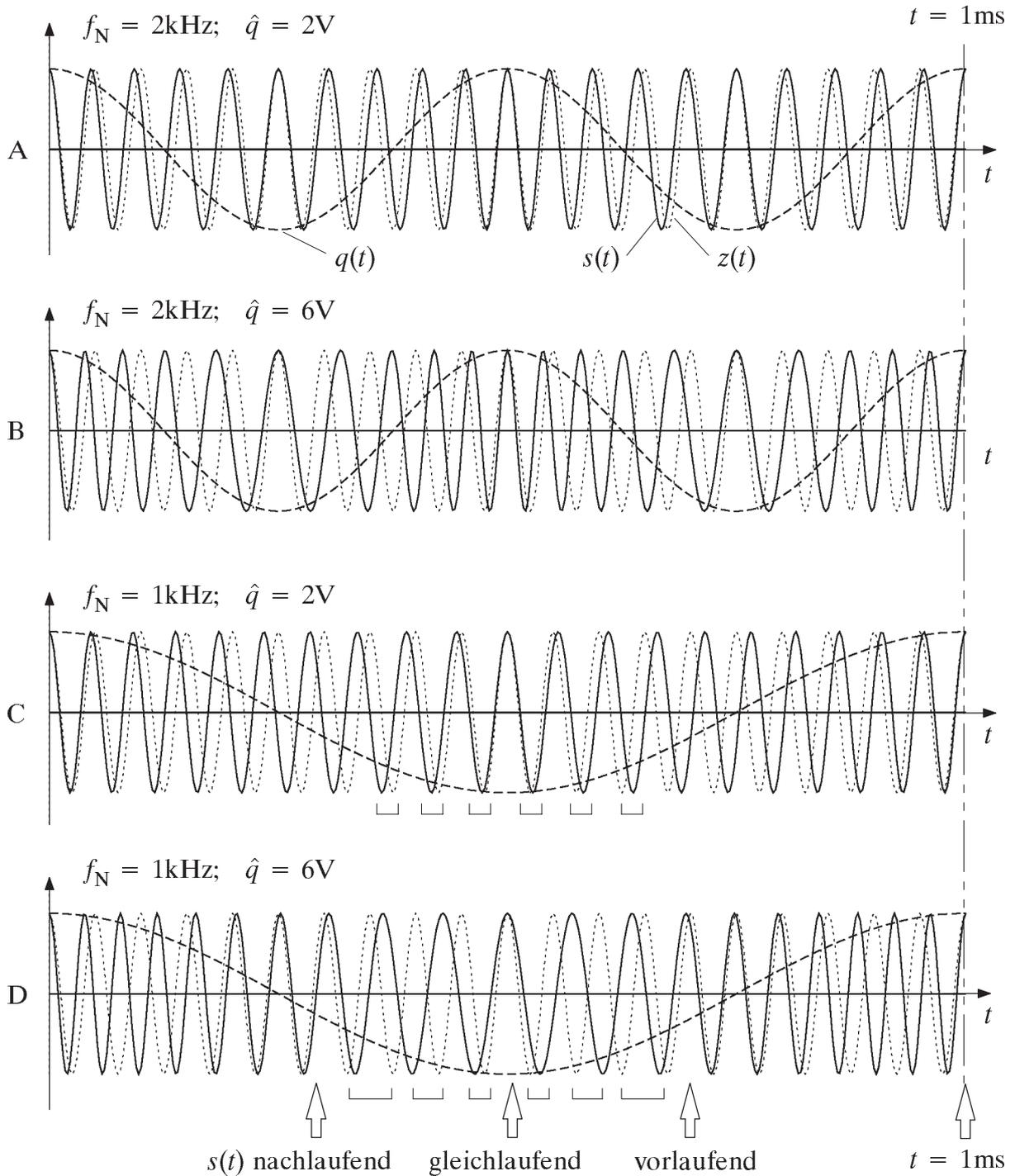


- g) Geben Sie die Betragsfunktion  $a(t)$  und die Phasenfunktion  $\phi(t)$  des äquivalenten Tiefpaßsignals formelmäßig an. Interpretieren Sie diese Funktionen anhand von  $s(t)$ .
- h) In welchen Wertebereichen variieren die Betragsfunktion  $a(t)$  und die Phasenfunktion  $\phi(t)$  für  $\mu = 0.5$ . Es genügt eine graphische Lösung anhand der Skizze von f).



### V4 Frequenzmodulation

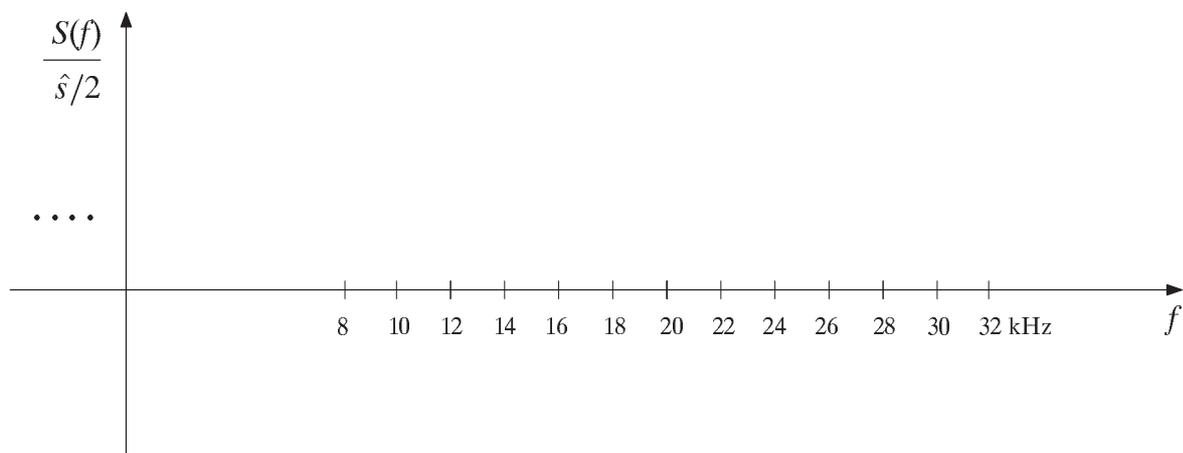
Das cosinusförmige Nachrichtensignal  $q(t) = \hat{q} \cdot \cos(2\pi f_N \cdot t)$  mit der Amplitude  $\hat{q} = 6V$  und der Frequenz  $f_N = 2\text{ kHz}$  wird mit dem Trägersignal  $z(t)$  der Frequenz  $f_T = 20\text{ kHz}$  ideal frequenzmoduliert, wobei für die Modulatorkonstante gilt:  $K_{FM} = 6283\text{ V}^{-1}\text{ s}^{-1}$ . Die nachfolgende Skizze B zeigt für diese Parameterwerte die Signale  $q(t)$ ,  $z(t)$  und  $s(t)$ .



a) Berechnen Sie den Modulationsindex  $\eta$ .

- b) Geben Sie das reelle und das analytische FM-Signal an. Welche Ortskurve liegt vor?
- c) Wie groß ist der Frequenzhub  $\Delta f_{\max}$ ? Welche Augenblicksfrequenzen sind möglich?
- d) Skizzieren Sie das auf  $\hat{s}/2$  normierte Spektrum  $S(f)$  des FM-Signals. Verwenden Sie dabei die aus einer Formelsammlung entnommene Tabelle für die Besselfunktionen.

| $\eta$ | $J_0(\eta)$ | $J_1(\eta)$ | $J_2(\eta)$ | $J_3(\eta)$ | $J_4(\eta)$ | $J_5(\eta)$ | $J_6(\eta)$ |
|--------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1      | 0.765       | 0.440       | 0.115       | 0.020       | 0.002       | $\approx 0$ | $\approx 0$ |
| 3      | -0.260      | 0.339       | 0.486       | 0.309       | 0.132       | 0.043       | 0.011       |
| 5      | -0.178      | -0.328      | 0.047       | 0.365       | 0.391       | 0.261       | 0.131       |



- e) Wie ändern sich Modulationsindex, Augenblicksfrequenz und Spektrum des FM-Signals, wenn die Amplitude auf 2V vermindert wird (Signal siehe Skizze A)?
- f) Analysieren Sie die Konfigurationen entsprechend den Skizzen C und D.

## V5 Nichtlineare Verzerrungen

Ein nichtlinearer Vierpol mit dem Eingangssignal  $s(t)$  und dem Ausgangssignal  $r(t)$  wird durch folgende Kennlinie beschrieben:

$$r(t) = c_1 \cdot s(t) + c_2 \cdot s^2(t) + c_3 \cdot s(t)^3 .$$

- a) Berechnen Sie das Ausgangssignal, wenn am Eingang ein cosinusförmiges Signal (mit Amplitude  $\hat{s}$  und Frequenz  $f_0$ ) anliegt. Berücksichtigen Sie hierbei die trigonometrischen Beziehungen:

$$\cos^2(a) = \frac{1}{2} \cdot [1 + \cos(2a)] , \quad \cos^3(a) = \frac{1}{4} \cdot [3 \cdot \cos(a) + \cos(3a)] .$$

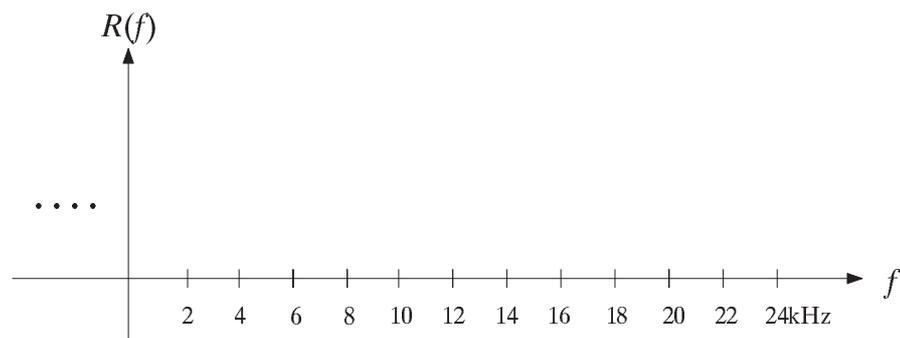
- b) Berechnen Sie den Klirrfaktor zweiter und dritter Ordnung sowie den Gesamtklirrfaktor für dieses cosinusförmige Eingangssignal.

- c) Welche Zahlenwerte ergeben sich für  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = \frac{0.4}{\hat{s}}$ ,  $c_3 = \frac{0.2}{\hat{s}^2}$ ?

Das Eingangssignal  $s(t)$  sei nun ein ZSB-amplitudenmoduliertes Signal (ohne Träger). Die Amplituden werden vereinfachend zu 1 gesetzt, so daß gilt:

$$s(t) = \cos((\omega_T + \omega_N) \cdot t) + \cos((\omega_T - \omega_N) \cdot t) .$$

- d) Berechnen und skizzieren Sie das Spektrum  $R(f)$  am Ausgang des nichtlinearen Vierpols für die Parameter  $\hat{s} = 1$ ,  $f_T = 10$  kHz,  $f_N = 1$  kHz,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0.4/\hat{s}$ ,  $c_3 = 0$ .



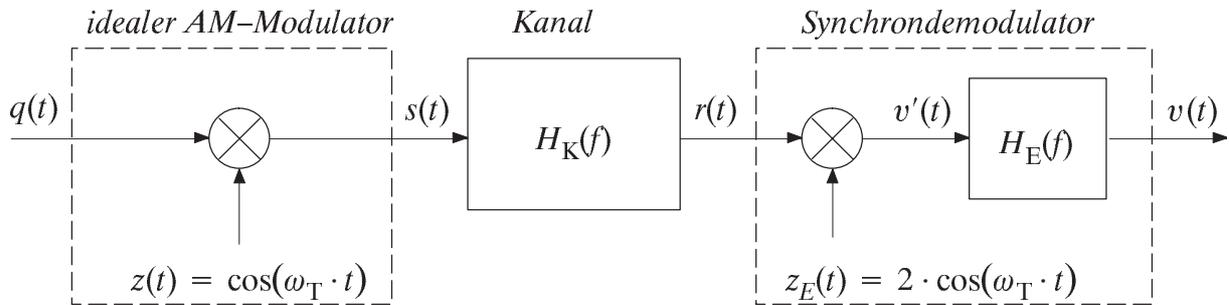
- e) Kommt es bei idealer Synchrondemodulation mit  $f_T = 10$  kHz und anschließender Tiefpaßfilterung auf  $\pm 5$  kHz zu nichtlinearen Verzerrungen? Begründung.

- f) Begründen Sie, daß es dagegen für  $c_3 \neq 0$  stets zu nichtlinearen Verzerrungen kommt. Welche Signalfrequenz wird nach der Synchrondemodulation und Tiefpaßfilterung entsprechend Punkt e) zusätzlich vorhanden sein?

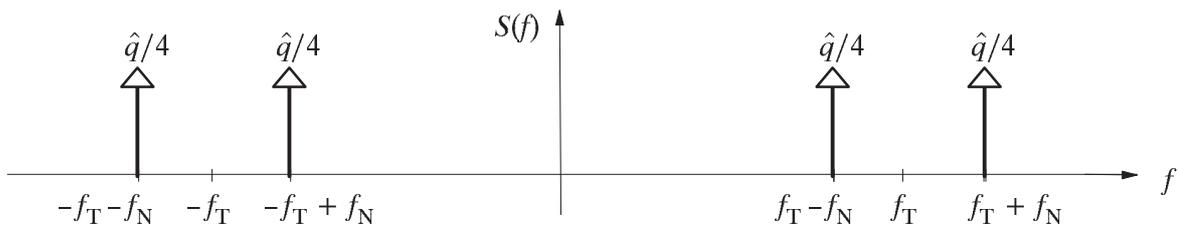
## V6 Lineare Verzerrungen

Anmerkung: Die letzten beiden Vorbereitungsfragen sind nur für die wirklich Unermüdeten gedacht, die sich durch die bisherigen Aufgaben noch immer nicht ausgelastet fühlen.

Ein Cosinussignal  $q(t) = \hat{q} \cdot \cos(\omega_N \cdot t)$  wird entsprechend nachfolgender Skizze ZSB-amplitudenmoduliert (ohne Träger) und über einen Kanal mit der Übertragungsfunktion  $H_K(f)$  übertragen. Anschließend wird das Empfangssignal  $r(t)$  synchrondemoduliert.

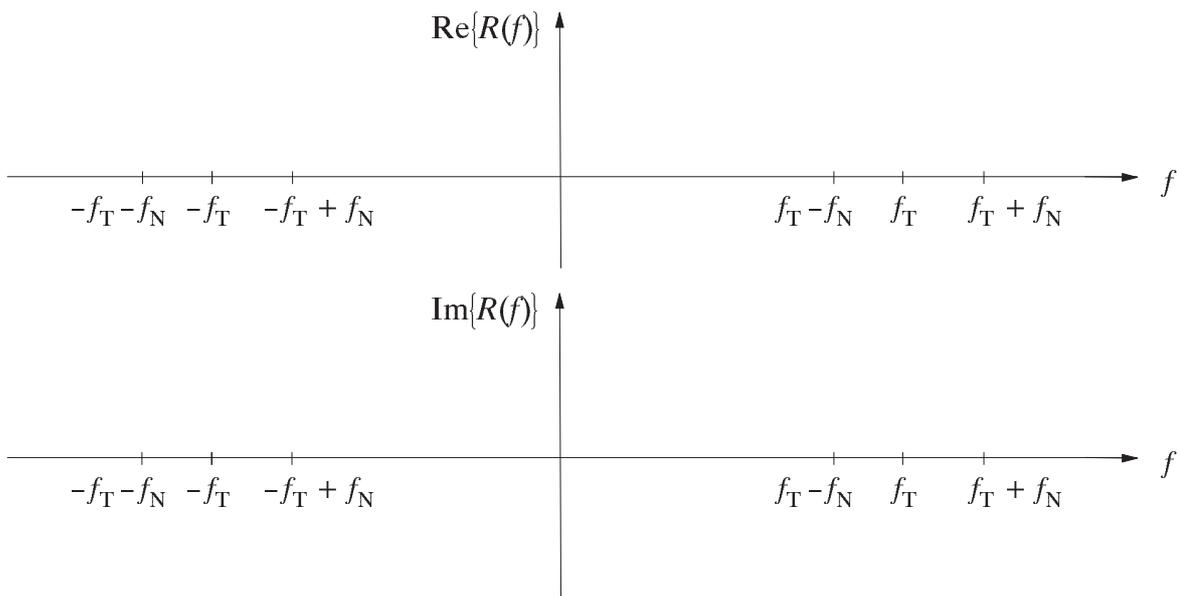


Das folgende Bild zeigt das Spektrum des ZSB-AM-Signals  $s(t)$ :



- a) Berechnen und skizzieren Sie das Spektrum  $R(f)$  am Kanalausgang. Berücksichtigen Sie, daß  $H_K(-f) = H_K^*(f)$  ist und benutzen Sie die Abkürzungen:

$$H_K(f_T + f_N) = R_o + j \cdot I_o, \quad H_K(f_T - f_N) = R_u + j \cdot I_u.$$



b) Berechnen Sie das Spektrum  $V(f)$  nach der Synchrondemodulation. Berücksichtigen Sie hierbei die Tiefpaßfilterung in geeigneter Weise. Wie lauten  $V(f)$  und  $v(t)$ ?

c) Leiten Sie das Ergebnis von b) auch über Gl. (1.75) ab.

d) Interpretieren Sie nun das in b) und c) berechnete Ausgangssignal  $v(t)$  für  $I_o = I_u$ . Hinweis: Alle Ergebnisse gelten in vergleichbarer Weise auch für ZSB mit Träger.

e) Welches Ausgangssignal  $v(t)$  stellt sich bei Synchrondemodulation ein, wenn für den Kanalfrequenzgang bei positiven Frequenzen gilt:

$$H_K(f) = \frac{1}{1 + j \cdot (f - f_T)/f_T} \cdot$$

Geben Sie  $v(t)$  insbesondere für  $f_N/f_T = 10$  an.



- d) Wie groß ist der Signalrauschabstandsgewinn gegenüber der ZSB-AM ohne Träger (Punkt a), wenn bei sonst gleichen Systemparametern eine FM mit dem Frequenzhub  $\Delta f_{\max} = 50 \text{ kHz}$  angewandt wird? Berechnen Sie zunächst den Modulationsindex  $\eta$ .
- e) Wie unterscheidet sich eine Phasenmodulation mit gleichem Modulationsindex  $\eta$  gegenüber der FM von Punkt d) hinsichtlich des Signalrauschabstandes? Wie müsste man  $\eta$  verändern, damit sich wieder der gleiche Signalrauschabstand ergibt?

### 3 Versuchsdurchführung

Bei allen nachfolgenden Versuchen sollten Sie die mit einfacher Klammer, z.B. "a)", gekennzeichneten Teilaufgaben auf jeden Fall bearbeiten. Dagegen sind die mit einer Doppelklammer, z.B. "(b)", versehenen Unterpunkte optional.

#### D1 Reelles und komplexes Signal

Voreinstellung: *Taste F1*  
Geöffnete Fenster: *Zeigerdiagramm*

Die Darstellungsmöglichkeiten von Bandpaßsignalen sollen zunächst am Beispiel eines unmodulierten Signals veranschaulicht werden. Dazu wird die harmonische Schwingung

$$s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T) \quad (3.1)$$

näher betrachtet. Diese beschreibt natürlich stets ein reelles Signal. Insbesondere im Zusammenhang mit der Winkelmodulation wird häufig auch mit dem analytischen Signal

$$s_+(t) = \hat{s} \cdot e^{j(\omega_T t - \varphi_T)} \quad (3.2)$$

gearbeitet. Dieses komplexwertige Signal ist jedoch nur als Rechengröße zu verstehen und in der Realität nicht existent. Es dient lediglich dazu, manche Eigenschaften des reellen Signals  $s(t)$  anhand geometrischer Überlegungen anschaulich erklären zu können.

In diesem ersten Versuch soll der Zusammenhang zwischen diesen unterschiedlichen Darstellungsformen erarbeitet werden. Die Amplitude sei jeweils 1V (fest eingestellt), die Trägerfrequenz  $f_T = 50$  kHz. Zunächst sei die Trägerphase  $\varphi_T = 0^\circ$ .

(a) Stellen Sie das analytische Signal  $s_+(t)$  mit Real- und Imaginärteil dar ( $\varphi_T = 0^\circ$ ).

(b) Geben Sie die Fouriertransformierte von Real- und Imaginärteil an. Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen und den Spektralfunktionen  $S(f)$  bzw.  $S_+(f)$ ?

- c) Betrachten Sie mit dem Programm "amv" das Zeigerdiagramm, also die zeitabhängige Darstellung von  $s_+(t)$  in der komplexen Ebene. Interpretieren Sie den Verlauf für  $f_T = 50$  kHz. Hinweis: Zur Darstellung des unmodulierten Signals können Sie im Programm z.B. folgende Einstellung wählen: AM mit Träger, Quellensignal  $q(t) = 0$ .
- d) Wählen Sie bei den Optionen des Zeigerdiagramms den Schaltknopf "Zeitsignal". Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem komplexen, analytischen Signal  $s_+(t)$  und dem reellen Signal  $s(t)$ ?
- e) Welche Ortskurve ergibt sich für diesen Fall. Interpretieren Sie das Ergebnis.
- f) Wählen Sie nun im Block "Modulator" die Anfangsphase  $\varphi_T = 60^\circ$ . Interpretieren Sie das Zeigerdiagramm.
- g) Interpretieren Sie die Parameter  $\hat{s}$ ,  $\omega_T$  und  $\varphi_T$  im Zeigerdiagramm.

## D2 Signale und Spektren bei ZSB-Modulation

Voreinstellung:

Taste F2

Geöffnete Fenster:

Zeitsignal 1: Quellensignal  $q(t)$  zwischen 0 und 1 ms,

Zeitsignal 2: Sendesignal  $s(t)$  zwischen 0 und 1 ms,

Spektrum 1:  $Q(f)$  zwischen  $-80\text{kHz}$  und  $80\text{kHz}$ ,

Spektrum 2:  $S(f)$  zwischen  $-80\text{kHz}$  und  $80\text{kHz}$ .

Hinweis: Im Programm "amv" wird das Nachrichtensignal  $q(t)$  als eine Summe von (bis zu 10) harmonischen Schwingungen dargestellt:

$$q(t) = \sum_{i=1}^I \hat{q}_i \cdot \cos(2\pi \cdot f_i \cdot t - \varphi_i) . \quad (3.3)$$

Die Amplituden  $\hat{q}_i$  der einzelnen Schwingungen sind in "Volt", die Frequenzen  $f_i$  in "kHz" und die Phasen  $\varphi_i$  in "Grad" einzugeben. Die Amplitudenwerte sind auf drei Nachkommastellen begrenzt, die Frequenzen müssen Vielfache von 0.5 kHz sein. Durch diese Festlegung ergibt sich stets ein diskretes Spektrum  $Q(f)$  mit Diracfunktionen bei Vielfachen von 500 Hz und i.a. komplexen Impulsgewichten.

Zur einfacheren Handhabung des Programms sind zwei "Mustersignale" wählbar:

| <u>Mustersignal 1:</u> | Amplitude in "Volt" | Frequenz in "kHz" | Phase in "Grad" |
|------------------------|---------------------|-------------------|-----------------|
|                        | 0.25                | 0.5               | -10             |
|                        | 0.53                | 1.0               | -180            |
|                        | 0.31                | 3.0               | -60             |
|                        | 0.14                | 5.0               | 20              |
|                        | 0.02                | 8.0               | -80             |
| <u>Mustersignal 2:</u> | Amplitude in "Volt" | Frequenz in "kHz" | Phase in "Grad" |
|                        | 0.04                | 1.0               | 0               |
|                        | 0.13                | 2.0               | 0               |
|                        | 0.20                | 3.0               | 0               |
|                        | 0.20                | 4.0               | 0               |
|                        | 0.15                | 5.0               | 0               |
|                        | 0.11                | 6.0               | 0               |
|                        | 0.08                | 7.0               | 0               |
|                        | 0.05                | 8.0               | 0               |
|                        | 0.03                | 9.0               | 0               |
|                        | 0.01                | 10.0              | 0               |

Der Maximalwert  $q_{\max}$  ist für beide Mustersignale jeweils gleich 1 V. Die periodischen Signale des Auswahlmenüs (Dreieck-, Rampen- und Trapezsignal) besitzen jeweils eine Grundfrequenz von 0.5 kHz und sind auf 10 kHz bandbegrenzt.



## D3 Synchrondemodulation

|                           |  |
|---------------------------|--|
| <u>Voreinstellung:</u>    | <i>Taste F3 (plus Änderung des Gleichanteils auf <math>q_0 = 0</math>).</i>  |
| <u>Geöffnete Fenster:</u> | <i>Zeitsignal 1: Empfangssignal <math>r(t)</math> zwischen 0 und 1 ms,<br/>Zeitsignal 2: Sinkensignal <math>v(t)</math> zwischen 0 und 1 ms,<br/>Spektrum 1: <math>R(f)</math> zwischen -120 kHz und 120 kHz,<br/>Spektrum 2: <math>V(f)</math> zwischen -120 kHz und 120 kHz.</i> |

Gegeben sei ein ideal amplitudenmoduliertes Signal:  $s(t) = q(t) \cdot z(t)$ . Sowohl  $q(t)$  als auch  $z(t)$  seien harmonische Schwingungen, wobei zunächst für die Signalparameter gelte:

$$\hat{q} = 1 \text{ V}, \quad f_N = 5 \text{ kHz}, \quad \varphi_N = 0^\circ,$$

$$\hat{z} = 1, \quad f_T = 50 \text{ kHz}, \quad \varphi_T = 60^\circ.$$

Der Kanal wird als ideal vorausgesetzt, d.h. es gelte  $r(t) = s(t)$ . Untersucht werden soll die Wirkungsweise des im Abschnitt 1.3.1 erläuterten Synchrondemodulators.

- a) Betrachten und beschreiben Sie die Signale  $r(t)$  und  $v(t)$  sowie deren Spektralfunktionen  $R(f)$  und  $V(f)$  bei optimaler Einstellung der Synchrondemodulator-Parameter. Hierbei ist  $H_E(f)$  ein idealer, rechteckförmiger Tiefpaß mit der oberen Grenzfrequenz  $f_o = f_T = 50 \text{ kHz}$  und das empfängerseitige Trägersignal  $z_E(t) = 2 \cdot \cos(\omega_T \cdot t - \varphi_T)$ .

- b) Wählen Sie nun die obere Grenzfrequenz des Tiefpasses gleich  $f_o = 120 \text{ kHz}$ . Interpretieren Sie das demodulierte Signal im Zeit- und im Frequenzbereich.

Für die weiteren Unterpunkte sei das Filter  $H_E(f)$  jeweils optimal ( $f_o = f_T = 50 \text{ kHz}$ ).

- c) Beschreiben Sie den Einfluß einer Phasenabweichung  $\Delta\varphi_T$  zwischen dem sende- und dem empfängerseitigen Trägersignal. Wie unterscheiden sich die Signale  $v(t)$  und  $q(t)$  bei einer Phasenabweichung von  $+45^\circ$  bzw.  $-45^\circ$ ?

- (d) Wiederholen Sie die in c) beschriebene Untersuchung mit dem "Mustersignal 1". Interpretieren Sie das Ergebnis.
- e) Beschreiben Sie den Einfluß einer Frequenzabweichung  $\Delta f_T$  zwischen sende- und empfangsseitigem Trägersignal. Wählen Sie hierfür  $\Delta f_T = 1 \text{ kHz}$  und  $\Delta f_T = 2 \text{ kHz}$ . Verwenden Sie für diese Untersuchung wieder das cosinusförmige Nachrichtensignal entsprechend Punkt a) und die Phasenabweichung  $\Delta \varphi_T = 0^\circ$ .
- (f) Wiederholen Sie den Versuch e) mit dem "Mustersignal 1".
- g) Zeigen Sie, daß der Synchrondemodulator nur dann richtig arbeitet, wenn die Bedingung  $f_T > f_{N,\max}$  erfüllt ist. Wählen Sie dabei das folgende Nachrichtensignal:  $q(t) = 0.5V \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + 0.5V \cdot \cos(\omega_{N,\max} \cdot t)$  mit  $f_1 = 5\text{kHz}$  und  $f_{N,\max} = 10\text{kHz}$ . Die Trägerfrequenz sei  $f_T = 10.5 \text{ kHz}$  bzw.  $f_T = 10 \text{ kHz}$ . Hinweis: Ändern Sie auch jeweils die obere Grenzfrequenz des Filters  $H_E(f)$  auf  $f_o = f_T$ .

## D4 Zeigerdiagramm und Ortskurve

Voreinstellung: Taste F4

Geöffnete Fenster: Zeitsignal 1: Sendesignal  $s(t)$  zwischen 0 und 1 ms,  
Spektrum 1:  $S(f)$  zwischen -120 kHz und 120 kHz,  
Zeigerdiagramm,  
Ortskurve.

Nun sollen die Signale und Spektren der ZSB-Amplitudenmodulation mit Träger anhand des "Zeigerdiagramms" und der "Ortskurve" beschrieben werden (vgl. Abschnitt 1.2.3). Wählen Sie hierzu als Parametersatz 1 eine ZSB-AM mit Gleichanteil  $q_0 = 1\text{V}$  und je ein cosinusförmiges Nachrichten- und Trägersignal mit folgenden Parameterwerten:

$$\hat{q} = 0.8 \text{ V}, \quad f_N = 5 \text{ kHz}, \quad \varphi_N = 0^\circ,$$
$$\hat{z} = 1, \quad f_T = 50 \text{ kHz}, \quad \varphi_T = 0^\circ.$$

a) Beschreiben Sie das Spektrum  $S(f)$  des ZSB-AM-Signals.

b) Wie groß ist der Modulationsgrad?

c) Verdeutlichen Sie sich die einzelnen Anteile des Spektrums in der Ortskurve.

- d) Interpretieren Sie für den vorliegenden Fall das Zeigerdiagramm. Wählen Sie in der Option für das Zeigerdiagramm den Schaltknopf "Zeitsignal" und geben Sie den Zusammenhang zwischen reellem Signal  $s(t)$  und analytischem Signal  $s_+(t)$  an.
- (e) Interpretieren Sie die Signalwerte zu den Zeiten  $t = 0$ ,  $t = 20 \mu\text{s}$  sowie  $t = 30 \mu\text{s}$ .
- f) Interpretieren Sie das Zeigerdiagramm, wenn der Träger sinusförmig ( $\varphi_T = 90^\circ$ ) verläuft und das Nachrichtensignal die Phase  $\varphi_N = 60^\circ$  besitzt (gleiche Amplitude wie unter c).
- (g) Wählen Sie nun bei sonst gleichen Parametern als Quellensignal  $q(t)$  das "Mustersignal 1", das sich aus insgesamt 5 Frequenzen mit unterschiedlichen Amplituden und Phasenlagen zusammensetzt (siehe Hinweis bei D2). Interpretieren Sie die ausgegebenen Graphiken (Zeitsignal, Spektrum, Zeigerdiagramm und Ortskurve).



- d) Wählen Sie nun wieder das cosinusförmige Nachrichtensignal gemäß der Ausgangseinstellung und den Gleichanteil  $q_0 = 0.4$  V. Interpretieren Sie das Demodulationsergebnis für diesen Fall.
- e) Bestimmen Sie aus dem Spektrum  $V(f)$  die Klirrfaktoren  $K_2$ ,  $K_3$  und  $K_4$  sowie den Gesamtklirrfaktor  $K$  (*Hinweis*: unbedingt Fenster 4 verwenden).
- f) Interpretieren Sie anhand von "Mustersignal 1" die Auswirkungen der nichtlinearen Verzerrungen bei (idealer) Hüllkurvendemodulation mit  $m > 1$ .
- (g) Wählen Sie nun ein cosinusförmiges Nachrichtensignal mit der Frequenz  $f_N = 1$  kHz. Die Modulatorparameter seien  $f_T = 100$  kHz und  $q_0 = 1$  V. Betrachten Sie die Signale und Spektren, wenn beim Empfänger ein realer Hüllkurvendemodulator gemäß Bild 1.19 verwendet wird. Wählen Sie die untere Grenzfrequenz des Bandpasses zu  $f_u = 0.5$  kHz und die obere Grenzfrequenz  $f_o = 120$  kHz. Wie groß ist die optimale Zeitkonstante  $\tau$ ? Interpretieren Sie die ausgegebenen Graphen.
- (h) Welche Veränderungen ergeben sich, wenn die obere Grenzfrequenz auf  $f_o = 10$  kHz herabgesetzt wird?

## D6 Einseitenbandmodulation

Voreinstellung: Taste F6 (und Änderungen).

Geöffnete Fenster: Zeitsignal 1: Sendesignal  $s(t)$  zwischen 0 und 0.2ms,  
Spektrum 1:  $S(f)$  zwischen -120 kHz und 120 kHz,  
Zeigerdiagramm,  
Ortskurve.

Betrachten Sie nun die Einseitenbandmodulation (ESB-AM) eines cosinusförmigen Signals. Quellen- und Trägersignal sollen wie folgt gewählt werden:

$$\hat{q} = 1 \text{ V}, \quad f_N = 5 \text{ kHz}, \quad \varphi_N = 0^\circ,$$
$$\hat{z} = 1, \quad f_T = 50 \text{ kHz}, \quad \varphi_T = 0^\circ.$$

Stellen Sie im Parametersatz 1 eine OSB-Modulation ein, im zweiten Parametersatz zum Vergleich eine ZSB-AM. Der Gleichanteil sei jeweils  $q_0 = 1 \text{ V}$ .

a) Betrachten Sie das Spektrum  $S(f)$  sowie die Ortskurve (Betrags- und Phasenfunktion). Interpretieren Sie die ausgegebenen Graphen.

b) Interpretieren Sie auch das Zeitsignal und das Zeigerdiagramm.

(c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Hüllkurve und den Abständen der Nulldurchgänge?

- (d) Vergleichen Sie nun die OSB- mit der USB-Modulation. Welche Unterschiede und Gemeinsamkeiten sind feststellbar?
- e) Betrachten Sie das Differenzsignal  $v(t) - q(t)$  und dessen Spektrum am Ausgang eines idealen Hüllkurvendemodulators. Wählen Sie dazu im Parametersatz 1 eine OSB- und im Parametersatz 2 eine ZSB-Modulation. Interpretation.
- f) Zeigen Sie, daß mit Synchrondemodulation auch das OSB-Signal verzerrungsfrei demoduliert werden kann. Begründen Sie dieses Verhalten. Wie unterscheiden sich die demodulierten Signale von Parametersatz 1 und 2? Ändern Sie den Demodulator für Parametersatz 1 derart, daß auch hier  $v(t) = q(t)$  gilt.
- g) Zeigen Sie die verzerrungsfreie Demodulation eines OSB-Signals mittels Synchrondemodulator auch anhand des Mustersignals 1.

## D7 Phasenmodulation

Voreinstellung:

*Taste F7*

Geöffnete Fenster:

*Zeitsignal 1: Quellensignal  $q(t)$  zwischen 0 und 0.2 ms,*

*Zeitsignal 2: Sendesignal  $s(t)$  zwischen 0 und 0.2 ms,*

*Spektrum 1:  $Q(f)$  zwischen -20 kHz und 20 kHz,*

*Spektrum 2:  $S(f)$  zwischen -120 kHz und 120 kHz,*

*Zeigerdiagramm,*

*Ortskurve.*

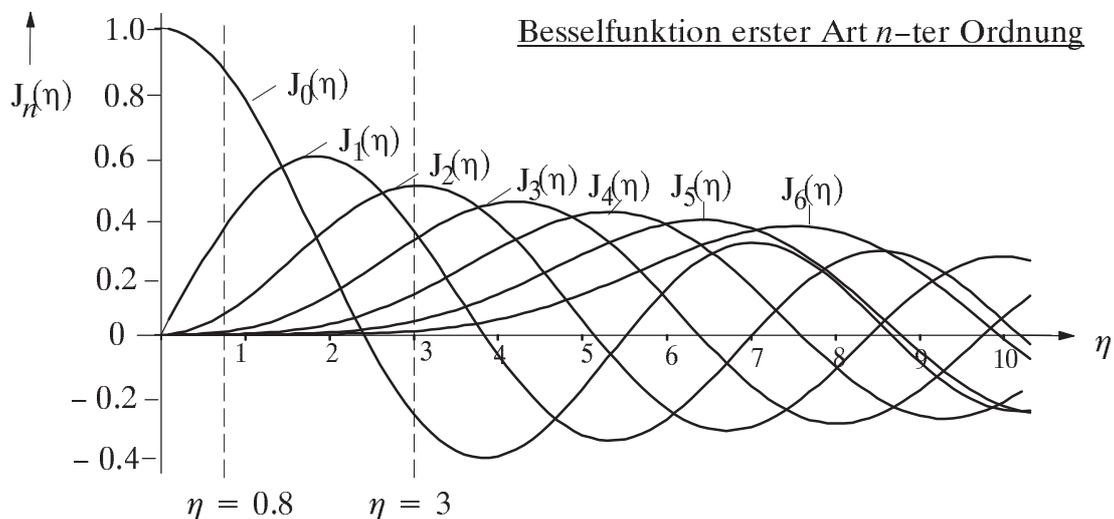
Für einige grundlegende Untersuchungen hinsichtlich der Phasenmodulation (PM) wird wie bei der Untersuchung der AM von folgenden Voreinstellungen ausgegangen:

$$\hat{q} = 0.8 \text{ V}, \quad f_N = 5 \text{ kHz}, \quad \varphi_N = 0^\circ,$$

$$\hat{z} = 1, \quad f_T = 50 \text{ kHz}, \quad \varphi_T = 0^\circ.$$

- a) Wie groß ist der Modulationsindex  $\eta$ , wenn die Modulatorkonstante  $K_{\text{PM}} = 1/\text{V}$  ist?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- b) Betrachten und interpretieren Sie das phasenmodulierte Sendesignal  $s(t)$  im Vergleich zum Trägersignal  $z(t)$ . Dieses können Sie z.B. im Parametersatz 2 einstellen, wenn Sie hierfür bis auf  $\hat{q} = 0$  die gleichen Einstellungen wie für den Parametersatz 1 wählen.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- c) Betrachten und interpretieren Sie die Spektralfunktion  $S(f)$ . Auf der nächsten Seite finden Sie eine Skizze mit den Besselfunktionen.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- d) Verdeutlichen Sie sich den Signalverlauf  $s(t)$  auch anhand des Zeigerdiagramms und der Ortskurve.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- e) Zeigen Sie, daß mit einem idealen Phasendemodulator das Signal wieder vollständig rekonstruiert werden kann.

- (f) Wie ändern sich die in den Punkten b) bis d) dargestellten Kurven, wenn das Nachrichtensignal eine Phase von  $\varphi_N = 45^\circ$  besitzt?
- g) Wie ändern sich die Kurvenverläufe, wenn nun anstelle des idealen ein "realer" Phasenmodulator gemäß Bild 1.21 mit gleichem Modulationsindex  $\eta$  eingesetzt wird?
- h) Wiederholen Sie mit der zu Beginn genannten Einstellung die Versuche c) und d) mit der Modulatorkonstanten  $K_{PM} = 3 \text{ V}^{-1}$ . Interpretieren Sie die Ergebnisse.
- i) Wiederholen Sie die Versuche c) und d) mit der Modulatorkonstanten  $K_{PM} = 5 \text{ V}^{-1}$ . Interpretieren Sie die Ergebnisse.





## D9 PM bei einer Summe harmonischer Schwingungen

Voreinstellung: Taste F9

Geöffnete Fenster: Zeitsignal 1: Quellensignal  $q(t)$  zwischen 0 und 0.5 ms,  
Zeitsignal 2: Sendesignal  $s(t)$  zwischen 0 und 0.5 ms,  
Spektrum 1:  $Q(f)$  zwischen -20 kHz und 20 kHz,  
Spektrum 2:  $S(f)$  zwischen -120 kHz und 120 kHz.

- a) Wählen als Parametersatz 1 das Quellensignal  $q_1(t) = 1\text{V} \cdot \cos(2\pi \cdot 5\text{kHz} \cdot t)$  sowie Phasenmodulation ( $f_T = 50\text{ kHz}$ ,  $\varphi_T = 0^\circ$ ). Die Modulatorkonstante sei  $K_{\text{PM}} = 1/\text{V}$ . Betrachten und beschreiben Sie das Sendesignal und dessen Spektrum.
  
- b) Wählen Sie nun für den Parametersatz 2 die gleichen Einstellungen wie für Satz 1, mit Ausnahme des Quellensignals; dieses sei nun  $q_2(t) = 0.5\text{V} \cdot \cos(2\pi \cdot 10\text{kHz} \cdot t - 90^\circ)$ . Betrachten Sie auch hier Zeitsignal und Spektrum. Interpretation.
  
- c) Wählen Sie nun als Quellensignal die Addition der beiden Signale  $q_1(t)$  und  $q_2(t)$ . Betrachten Sie das Zeitsignal  $s(t)$  und Spektrum  $S(f)$  des FM-Gesamtsignals. Welche Veränderungen gegenüber den ursprünglichen Signalen können Sie erkennen?
  
- d) Zeigen Sie, daß auch dieses Signal richtig demoduliert werden kann.
  
- e) Geben Sie für diesen Fall das äquivalente Tiefpaßsignal  $s_{\text{TP}}(t)$  an.
  
- f) Geben Sie – ausgehend vom Ergebnis der letzten Teilfrage – eine prinzipielle Möglichkeit zur Berechnung der Spektralfunktion  $S(f)$  an.

## D10 Bandbegrenzung bei Phasenmodulation

Voreinstellung: Taste F10

Geöffnete Fenster: Zeitsignal 1: Quellensignal  $q(t)$  zwischen 0 und 0.5 ms,  
Zeitsignal 2: Sinkensignal  $v(t)$  zwischen 0 und 0.5 ms,  
Spektrum 1:  $S(f)$  zwischen -120 kHz und 120 kHz,  
Spektrum 2:  $R(f)$  zwischen -120 kHz und 120 kHz.

Wählen Sie das Quellensignal  $q(t) = 1\text{V} \cdot \cos(2\pi \cdot 5\text{kHz} \cdot t)$  sowie Phasenmodulation ( $f_T = 50\text{ kHz}$ ,  $\varphi_T = 0^\circ$ ). Die Modulatorkonstante sei  $K_{\text{PM}} = 3/\text{V}$ .

a) Wählen Sie zunächst als Kanalmodell den idealen Kanal. Betrachten und beschreiben Sie die oben angegebenen Signale und Spektren.

b) Wählen Sie nun einen Bandpaß mit der Mittenfrequenz  $f_M = 50\text{ kHz}$  und der Bandbreite  $\Delta f_K = 35\text{ kHz}$ . Wie verändert sich dadurch das Sinkensignal  $v(t)$ ?

c) Wählen Sie nun für die Kanalbandbreite  $\Delta f_K = 25\text{ kHz}$ . Wie haben sich das Empfangssignal  $r(t)$  und das Sinkensignal  $v(t)$  gegenüber b) verändert? Begründung.

d) Betrachten Sie für diese Einstellung auch die Ortskurve und das Zeigerdiagramm und interpretieren Sie diese.

(e) Wie groß muß die Bandbreite  $\Delta f_K$  mindestens sein, damit der Klirrfaktor  $K < 1\%$  ist. Überprüfen Sie dieses Ergebnis mit dem Programm.

## D11 Lineare Verzerrungen

Voreinstellung:

*Taste F11.*

Geöffnete Fenster:

*Zeitsignal 1: Quellensignal  $q(t)$  zwischen 0 und 0.5 ms,*

*Zeitsignal 2: Sinkensignal  $v(t)$  zwischen 0 und 0.5 ms,*

*Spektrum 1:  $R(f)$  zwischen -120 kHz und 120 kHz,*

*Ortskurve.*

- a) Wählen Sie als Parametersatz 1 das Quellensignal  $q_1(t) = 0.8V \cdot \cos(2\pi \cdot 5\text{kHz} \cdot t)$  sowie ZSB-Amplitudenmodulation mit Träger ( $f_T = 50\text{ kHz}$ ,  $\varphi_T = 0^\circ$ ,  $q_0 = 1V$ ). Der Kanal sei zunächst ideal. Benutzen Sie zur Demodulation den idealen Hüllkurvendemodulator. Betrachten und beschreiben Sie den Verlauf der Ortskurve.

- b) Wählen Sie nun für den Kanal Dämpfungsverzerrungen (Gaußbandpaß) mit der Mittenfrequenz  $f_M = 50\text{ kHz}$  und der äquivalenten Bandbreite  $\Delta f_K = 20\text{ kHz}$ . Hierbei lautet die Übertragungsfunktion:

$$H_K(f) = e^{-\pi \left(\frac{f-f_M}{\Delta f}\right)^2}.$$

Beschreiben Sie die Veränderungen, die sich im Spektrum und der Ortskurve im Vergleich zu Punkt a) ergeben.

- c) Wählen sie nun als Quellensignal:

$$q_2(t) = 0.8V \cdot \cos(2\pi \cdot 5\text{kHz} \cdot t) + 0.4V \cdot \cos(2\pi \cdot 10\text{kHz} \cdot t).$$

Wie unterscheiden sich Quellen- und Sinkensignal? Erklärung.

- d) Geben sie Ihr ursprüngliches Eingangssignal  $q_1(t) = 0.8V \cdot \cos(2\pi \cdot 5\text{kHz} \cdot t)$  wieder ein und verschieben Sie nun die Mittenfrequenz des Gaußbandpasses auf 45 kHz. Beschreiben Sie nun den Verlauf der Ortskurve. Interpretation.
- e) Benutzen Sie nun wieder das Eingangssignal  $q_2(t)$  und beschreiben Sie die feststellbaren Veränderungen gegenüber c).
- (f) Wählen Sie als Eingangssignal nun ein Dreieckssignal. Woran erkennen Sie hier die Verzerrungen? Sind diese linear oder nichtlinear?

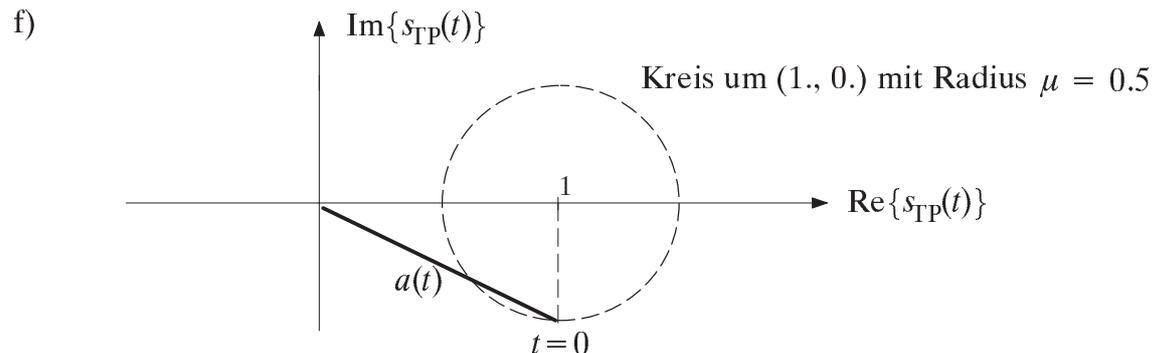
# 4 Musterlösung Vorbereitungsfragen

## V1 Spektrum der Amplitudenmodulation

- a)  $s(t) = 6V \cdot \cos(\omega_{50} \cdot t) + 2V \cdot \sin(\omega_{60} \cdot t) - 2V \cdot \sin(\omega_{40} \cdot t)$   
 mit  $\omega_{50} = 2\pi \cdot 50\text{kHz}$ ;  $\omega_{60} = 2\pi \cdot 60\text{kHz}$ ;  $\omega_{40} = 2\pi \cdot 40\text{kHz}$ .
- b) ZSB-AM mit Träger:  $s(t) = (q(t) + q_0) \cdot \cos(\omega_T \cdot t)$ .
- c)  $f_T = 50\text{kHz}$ ,  $\varphi_T = 0^\circ$  (da Spektrallinie bei der Trägerfrequenz reell),  
 $f_N = 10\text{kHz}$ ,  $\varphi_N = 90^\circ$  (d.h. sinusförmiges Nachrichtensignal),  
 $\hat{q} = 4V$ ,  $q_0 = 6V$ .
- d)  $S(f) = (q_0 \cdot \delta(f) + Q(f)) * Z(f)$  mit  
 $Z(f) = \frac{1}{2} \cdot [\delta(f - f_T) + \delta(f + f_T)]$  und  $Q(f) = 2V \cdot j \cdot [-\delta(f - f_N) + \delta(f + f_N)]$
- e)  $m = \frac{q_{\max}}{q_0} = \frac{2}{3}$ . Wegen  $m < 1$  ist Hüllkurvendemodulation anwendbar.

## V2 Einseitenband-Amplitudenmodulation

- a) OSB:  $40\text{kHz} < f_u < 50\text{kHz}$ ,  $f_o > 60\text{kHz}$ ,  
 USB:  $50\text{kHz} < f_o < 60\text{kHz}$ ,  $f_u < 40\text{kHz}$ .
- b)  $\mu = \frac{q_{\max}}{2 \cdot q_0} = \frac{1}{3}$ .
- c) Nur Anteile mit  $|f|$  größer/gleich 45 kHz, normiert auf  $q_0 = 6V$ :  
 $3V \rightarrow 1/2$ ,  $1V \rightarrow 1/6 = \mu/2$ .
- d)  $s(t) = \cos(\omega_T \cdot t) + \mu \cdot \sin((\omega_T + \omega_N) \cdot t)$ .
- e)  $S_+(f) = \delta(f - f_T) - j \cdot \mu \cdot \delta(f - (f_T + f_N)) \Rightarrow s_+(t) = e^{j\omega_T t} - j \cdot \mu \cdot e^{j(\omega_T + \omega_N)t}$ ,  
 $S_{TP}(f) = \delta(f) - j \cdot \mu \cdot \delta(f - f_N) \Rightarrow s_{TP}(t) = 1 - j \cdot \mu \cdot e^{j\omega_N t}$ .



g) Realteil:  $1 + \mu \cdot \sin(\omega_N \cdot t)$ ,

Imaginärteil:  $-\mu \cdot \cos(\omega_N \cdot t)$ .

Hüllkurve von  $s(t)$ :

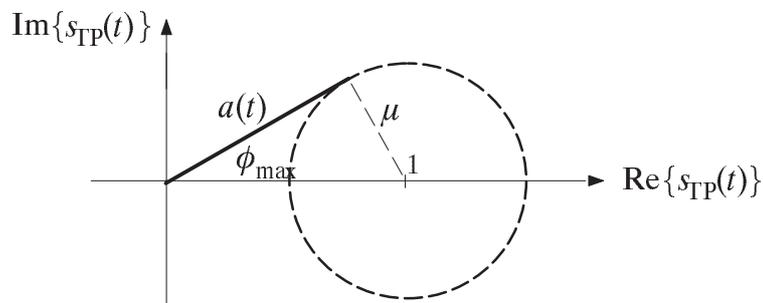
$$a(t) = |s_{\text{TP}}(t)| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \sqrt{1 + \mu^2 + 2\mu \cdot \sin(\omega_N \cdot t)},$$

Verschiebung der Nulldurchgänge aufgrund der OSB-Modulation:

$$\phi(t) = \text{arc}(s_{\text{TP}}(t)) = \arctan \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \arctan \frac{-\mu \cdot \cos(\omega_N t)}{1 + \mu \cdot \sin(\omega_N \cdot t)}.$$

- h) Die Zeigerlänge  $a(t)$  variiert zwischen 0.5 und 1.5, der Winkel zwischen  $-\phi_{\text{max}}$  und  $+\phi_{\text{max}}$  mit

$$\cos(\phi_{\text{max}}) = \mu = 1/2 \Rightarrow \phi_{\text{max}} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ.$$



### V3 Synchrondemodulation

a)  $S(f) = Q(f) * Z(f)$  mit  $Z(f) = \frac{j}{2} \cdot [-\delta(f - f_T) + \delta(f + f_T)]$

$$\Rightarrow S(f) = \frac{j}{2} \cdot [-Q(f - f_T) + Q(f + f_T)].$$

- b) Das Faltungsprodukt  $S(f)$  des rein reellen Spektrums  $Q(f)$  mit dem rein imaginären Spektrum  $Z(f)$  ist rein imaginär. Da  $s(t) \circ \bullet S(f)$  stets eine reelle Funktion sein muß, besitzt der Imaginärteil bei negativen Frequenzen das entgegengesetzte Vorzeichen als bei positiven Frequenzen.

c)  $V'(f) = R(f) * Z_E(f) = S(f) * Z_E(f) =$   
 $= [\frac{j}{2} \cdot Q(f + f_T) - \frac{j}{2} \cdot Q(f - f_T)] * [j \cdot \delta(f + f_T) - j \cdot \delta(f - f_T)] =$   
 $= -\frac{1}{2} \cdot Q(f + 2f_T) + \frac{1}{2} \cdot Q(f) + \frac{1}{2} \cdot Q(f) - \frac{1}{2} \cdot Q(f - 2f_T)$

$$V'(f) = Q(f) - \frac{1}{2} \cdot Q(f + 2f_T) - \frac{1}{2} \cdot Q(f - 2f_T).$$

- d) Nach Entfernen der Anteile um die doppelte Trägerfrequenz (Tiefpaß) gilt:

$$V(f) = Q(f) \Rightarrow v(t) = q(t).$$

Das bedeutet: Der Synchrondemodulator arbeitet hier verzerrungsfrei.

### V4 Frequenzmodulation

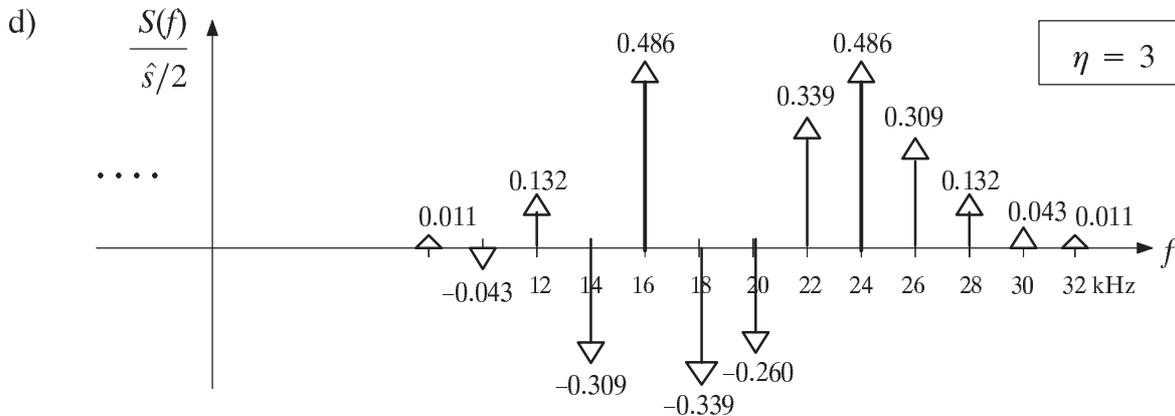
a) 
$$\eta_{\text{FM}} = \frac{K_{\text{FM}} \cdot \hat{q}}{\omega_{\text{N}}} = \frac{6283 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1} \cdot 6 \text{V}}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 \text{s}^{-1}} = 3 .$$

b) 
$$s(t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega_{\text{T}} \cdot t + \eta \cdot \sin(\omega_{\text{N}} \cdot t)), \quad s_+(t) = \hat{s} \cdot e^{j(\omega_{\text{T}} t + \eta \sin(\omega_{\text{N}} t))} .$$
  
 Ortskurve ist ein Kreisbogen zwischen  $171.9^\circ$  (3 rad) und  $-171.9^\circ$  (-3 rad).

c) 
$$\Delta\omega_{\text{max}} = K_{\text{FM}} \cdot \hat{q} = \eta_{\text{FM}} \cdot \omega_{\text{N}} = 37000 \text{s}^{-1} \Rightarrow \Delta f_{\text{max}} = \frac{\Delta\omega_{\text{max}}}{2\pi} = \eta_{\text{FM}} \cdot f_{\text{N}} = 6 \text{kHz}$$
  

$$\Rightarrow \text{Augenblicksfrequenz: } 14 \text{kHz} \leq f_{\text{A}}(t) \leq 26 \text{kHz} .$$

Nach Gl. (1.53) ist der zeitliche Verlauf der Augenblicksfrequenz cosinusförmig. Zur Zeit  $t = 0$  und allen Vielfachen der Periodendauer  $T_0$  besitzt die Augenblicksfrequenz den maximalen Wert (= 26 kHz), bei  $T_0/2$  den Minimalwert (= 14 kHz).



e) Es gilt nun  $\eta = 1$ : Die Ortskurve ist hier ein Kreisbogen mit  $\pm 1$  rad (entsprechend  $\pm 57.3^\circ$ ); das Spektrum ist weniger weit ausgebreitet als mit  $\eta = 3$ . Die Augenblicksfrequenz kann Werte zwischen 18 und 22 kHz annehmen.

f) Aufgrund der niedrigeren NF gilt nun  $\eta = 2$  (Kurve C) bzw.  $\eta = 6$  (Kurve D). Der Frequenzhub  $\Delta f_{\text{max}} = \eta \cdot f_{\text{N}}$  bleibt gleich. Die Augenblicksfrequenz schwankt jedoch langsamer als bei den Signalen gemäß den Kurven A bzw. B.

### V5 Nichtlineare Verzerrungen

a) 
$$r(t) = r_1(t) + r_2(t) + r_3(t) \text{ mit } r_1(t) = c_1 \cdot \hat{s} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) ,$$
  

$$r_2(t) = \frac{c_2 \cdot \hat{s}^2}{2} \cdot [1 + \cos(2\omega_0 \cdot t)] , \quad r_3(t) = \frac{c_3 \cdot \hat{s}^3}{4} \cdot [3 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + \cos(3\omega_0 \cdot t)] .$$

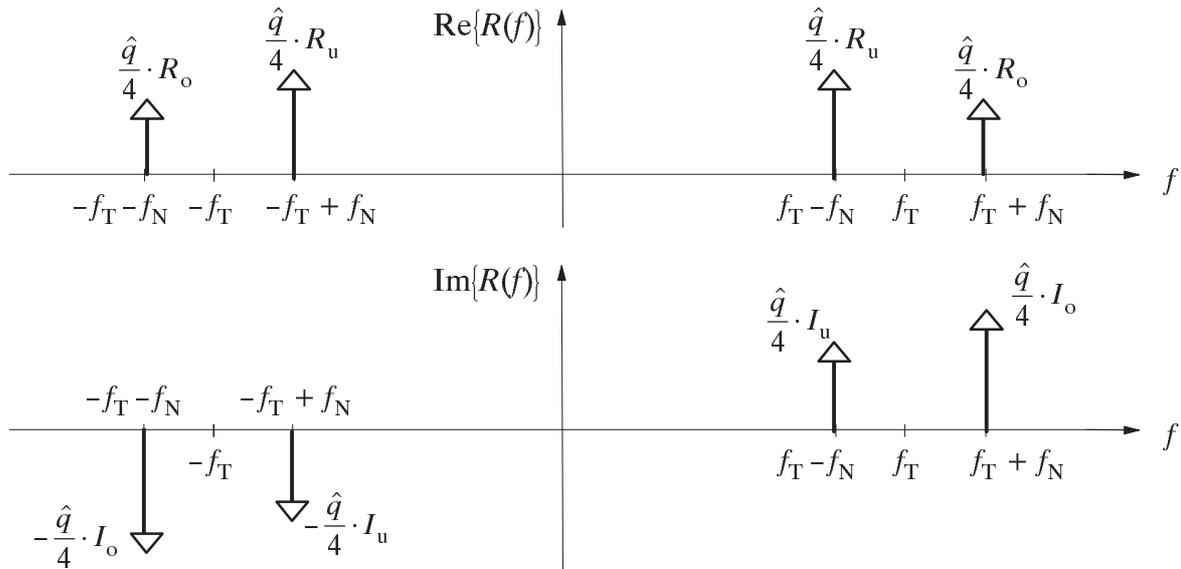
b) 
$$r(t) = \hat{r}_0 + \hat{r}_1 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + \hat{r}_2 \cdot \cos(2\omega_0 \cdot t) + \hat{r}_3 \cdot \cos(3\omega_0 \cdot t) .$$

Daraus folgt durch Koeffizientenvergleich mit Punkt a:

$$\hat{r}_0 = \hat{r}_2 = \frac{c_2 \cdot \hat{s}^2}{2} , \quad \hat{r}_1 = c_1 \cdot \hat{s} + \frac{3}{4} \cdot c_3 \cdot \hat{s}^3 , \quad \hat{r}_3 = \frac{1}{4} \cdot c_3 \cdot \hat{s}^3 .$$

Klirrfaktor 2. Ordnung: 
$$K_2 = \frac{|\hat{r}_2|}{|\hat{r}_1|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot \hat{s}^2}{c_1 \cdot \hat{s} + \frac{3}{4} \cdot c_3 \cdot \hat{s}^3} ,$$





b) 
$$V(f) = [R(f) * [\delta(f - f_T) + \delta(f + f_T)]] \cdot H_E(f)$$

$$= \frac{\hat{q}}{4} \cdot [R_o + j \cdot I_o] \cdot \delta(f - f_N) + \frac{\hat{q}}{4} \cdot [R_u + j \cdot I_u] \cdot \delta(f + f_N)$$

$$+ \frac{\hat{q}}{4} \cdot [R_o - j \cdot I_o] \cdot \delta(f + f_N) + \frac{\hat{q}}{4} \cdot [R_u - j \cdot I_u] \cdot \delta(f - f_N) .$$

Alle anderen Terme liegen um die doppelte Trägerfrequenz ( $2f_T$ ) und werden durch den Tiefpaß  $H_E(f)$  eliminiert. Nach Umsortieren und Zusammenfassen der Terme:

$$V(f) = \hat{q} \cdot \frac{R_o + R_u}{2} \cdot \frac{1}{2} [\delta(f - f_N) + \delta(f + f_N)] -$$

$$- \hat{q} \cdot \frac{I_o - I_u}{2} \cdot \frac{j}{2} [-\delta(f - f_N) + \delta(f + f_N)]$$

$$\Rightarrow v(t) = \hat{q} \cdot \frac{R_o + R_u}{2} \cdot \cos(\omega_N \cdot t) - \hat{q} \cdot \frac{I_o - I_u}{2} \cdot \sin(\omega_N \cdot t) .$$

c) Nach Gl. (1.75) gilt für  $f > 0$ :  $H_{MKD}(f) = \frac{1}{2} \cdot [H_K(f_T + f) + H_K^*(f_T - f)]$

$$H_{MKD}(f_N) = \frac{1}{2} \cdot [H_K(f_T + f_N) + H_K^*(f_T - f_N)] = \frac{1}{2} [(R_o + R_u) + j \cdot (I_o - I_u)]$$

$$H_{MKD}(-f_N) = H_{MKD}^*(f_N) = \frac{1}{2} [(R_o + R_u) - j \cdot (I_o - I_u)] .$$

$$V(f) = Q(f) \cdot H_{MKD}(f) = \frac{1}{2} [(R_o + R_u) + j \cdot (I_o - I_u)] \cdot \frac{\hat{q}}{2} \cdot \delta(f - f_N)$$

$$+ \frac{1}{2} [(R_o + R_u) - j \cdot (I_o - I_u)] \cdot \frac{\hat{q}}{2} \cdot \delta(f + f_N) .$$

Man erhält das gleiche Ergebnis wie unter a) und b), aber schneller.

d)  $I_o = I_u \Rightarrow v(t) = \hat{q} \cdot \frac{R_o + R_u}{2} \cdot \cos(\omega_N \cdot t)$

$\nwarrow$ 
 $\searrow$

Dämpfung                      keine Phasenverschiebung

e) Für  $f > 0$ :  $H_{\text{MKD}}(f) = \frac{1}{2} \cdot [H_{\text{K}}(f_{\text{T}} + f) + H_{\text{K}}^*(f_{\text{T}} - f)]$

$$H_{\text{MKD}}(f_{\text{N}}) = \frac{1}{2} \cdot [H_{\text{K}}(f_{\text{T}} + f_{\text{N}}) + H_{\text{K}}^*(f_{\text{T}} - f_{\text{N}})] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 - j \cdot \frac{f_{\text{N}}}{f_{\text{T}}}} + \frac{1}{1 + j \cdot (\frac{f_{\text{N}}}{f_{\text{T}}})^*} \right]$$

$$\Rightarrow H_{\text{MKD}}(f_{\text{N}}) = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{f_{\text{N}}}{f_{\text{T}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f_{\text{N}}}{f_{\text{T}}})^2}} \cdot e^{-j \cdot \arctan(f_{\text{N}}/f_{\text{T}})}$$

$$H_{\text{MKD}}(-f_{\text{N}}) = H_{\text{MKD}}^*(f_{\text{N}}) = \frac{1}{1 - j \cdot \frac{f_{\text{N}}}{f_{\text{T}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f_{\text{N}}}{f_{\text{T}}})^2}} \cdot e^{j \cdot \arctan(f_{\text{N}}/f_{\text{T}})}$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{\hat{q}}{\sqrt{1 + (\frac{f_{\text{N}}}{f_{\text{T}}})^2}} \cdot \cos(2\pi \cdot f_{\text{N}} \cdot t - \arctan \frac{f_{\text{N}}}{f_{\text{T}}}) .$$

Mit  $f_{\text{N}}/f_{\text{T}} = 0.1$ :

Dämpfung um den Faktor 0.995, Verzögerung um den Phasenwinkel von  $5.7^\circ$ .

## V7 Einfluß von Rauschstörungen

a)  $Q_v = 10 \cdot \lg \frac{P_{\text{E}}}{N_0 \cdot f_{\text{N}}}$  mit  $P_{\text{E}} = \alpha^2 \cdot P_{\text{S}}$  und  $\alpha = 10^{-7}$  (entsprechend 140 dB)

$$\Rightarrow Q_v = 10 \cdot \lg \frac{10^{-14} \cdot 10^4 \text{ W}}{10^{-18} \text{ W/Hz} \cdot 10^4 \text{ Hz}} = 10 \cdot \lg (10^4) = 40 \text{ dB} .$$

b) SNR wird um Faktor  $1 + 2/m^2 = 9$  geringer:  $Q_v = (40 - 10 \cdot \lg(9)) \text{ dB} = 30.5 \text{ dB}$ .

ZSB-AM mit Träger verschlechtert die Übertragungsqualität gegenüber ZSB-AM ohne Träger, wenn man von konstanter Sendeleistung ausgeht. Der einzige Grund für deren Einsatz ist die dadurch geschaffene Möglichkeit, beim Empfänger einen Hüllkurvenempfänger einsetzen zu können.

c) Man müßte die Sendeleistung um 9.5 dB, also um den Faktor 9 erhöhen:  $P_{\text{S}} = 90 \text{ kW}$ .

d) Modulationsindex:  $\eta = \frac{\Delta f_{\text{max}}}{f_{\text{N,max}}} = \frac{50 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 5$

$$Q_v = \frac{3}{2} \eta^2 \cdot \frac{\alpha^2 \cdot P_{\text{S}}}{N_0 \cdot f_{\text{N,max}}} \Rightarrow \Delta Q = Q_{\text{FM}} - Q_{\text{AM}, m \rightarrow \infty} = 10 \cdot \lg \left( \frac{3}{2} \cdot \eta^2 \right)$$

$$\Rightarrow \Delta Q = 10 \cdot \lg(37.5) = 15.7 \text{ dB} \Rightarrow Q_v = (40 + 15.74) \text{ dB} = 55.74 \text{ dB}$$

e) Bei PM ist das S/N-Verhältnis um den Faktor 3 (d.h. 4.77 dB) kleiner als bei FM. Daraus folgt:  $Q_v = 50.97 \text{ dB}$ . Um gleiches S/N-Verhältnis zu erhalten, muß man  $\eta$  um den Faktor  $\sqrt{3}$  erhöhen:  $\eta \approx 8.66$ .

## 5. Musterlösungen der Versuchsdurchführung

### Lösung D1:

a) Nach dem Satz von Euler gilt:

$$s_+(t) = \hat{s} \cdot e^{j\omega_T t} = \hat{s} \cdot \cos(\omega_T \cdot t) + j \cdot \hat{s} \cdot \sin(\omega_T \cdot t).$$

$$\hat{s} \cdot \cos(\omega_T t) \quad \text{---} \quad \frac{\hat{s}}{2} \cdot \delta(f - f_T) + \frac{\hat{s}}{2} \cdot \delta(f + f_T)$$

$$j \cdot \hat{s} \cdot \sin(\omega_T t) \quad \text{---} \quad \frac{\hat{s}}{2} \cdot \delta(f - f_T) - \frac{\hat{s}}{2} \cdot \delta(f + f_T)$$

$$s_+(t) \quad \text{---} \quad \hat{s} \cdot \delta(f - f_T)$$

Das reelle Signal  $s(t)$  und das Spektrum  $S(f)$  ist durch die erste Gleichung gekennzeichnet, das analytische Signal  $s_+(t)$  nebst Spektrum  $S_+(f)$  durch die dritte.  $S_+(f)$  ergibt sich aus  $S(f)$  durch Verdoppeln der positiven und Abschneiden der negativen Frequenzanteile.

c) Zum Zeitpunkt  $t = 0$  liegt der Zeiger der Länge nach in Richtung der positiven reellen Achse. Mit zunehmender Zeit  $t$  dreht er sich entgegen dem Uhrzeigersinn (in mathematisch positive Richtung) mit einer Umdrehung pro Periodendauer  $T_0 = 1/f_T = 20 \mu\text{s}$ .

d) Das reelle Signal ist gleich dem Realteil des analytischen Signals.

e) Die Ortskurve entartet bei unmoduliertem Signal zu einem Punkt auf der reellen Achse.

f) Es gilt:  $s_+(t) = \hat{s} \cdot e^{-j60^\circ} \cdot e^{j\omega_T t}$ .

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  liegt nun der Zeiger mit  $60^\circ$  nach rechts unten verdreht. Die Drehung erfolgt mit gleicher Geschwindigkeit wie bei c). Das reelle Zeitsignal ist bei  $t = 0$  gleich  $s(t = 0) = \text{Re}\{1 \text{ V} \cdot e^{-j60^\circ}\} = 0.5 \text{ V}$ . Mit zunehmender Zeit wird  $s(t)$  erst größer bis zum Maximalwert 1V (nach  $T_0/6 = 3.33 \mu\text{s}$ ). Anschließend dreht der Zeiger wie unter Punkt c).

g)  $\hat{s}$ : Länge des Drehzeigers,

$\omega_T$ : Kreisgeschwindigkeit des Drehzeigers,

$\varphi_T$ : Ausgangslage des Drehzeigers in der komplexen Ebene zum Zeitpunkt  $t = 0$ , nach unten aufgetragen.

### Lösung D2:

a) Das Signal  $s(t)$  ist das Produkt von  $q(t)$  und  $z(t)$ . Das Spektrum weist somit Linien bei  $\pm(f_T + f_N)$  und bei  $\pm(f_T - f_N)$  auf. Da sowohl das Nachrichten- als auch das Trägersignal cosinusförmig verlaufen (also jeweils die Phase  $0^\circ$  besitzen), sind die Impulsgewichte reell. Die Summe aller Gewichte ist gleich der Amplitude des Nachrichtensignals (2V).

b) Die Spektrallinien sind nun imaginär. Es gilt:

$$S(f) = j \cdot 0.5 \text{ V} \cdot \delta(f + 55 \text{ kHz}) - j \cdot 0.5 \text{ V} \cdot \delta(f + 45 \text{ kHz}) \\ + j \cdot 0.5 \text{ V} \cdot \delta(f - 45 \text{ kHz}) - j \cdot 0.5 \text{ V} \cdot \delta(f - 55 \text{ kHz})$$

Dies ist verständlich, da  $S(f)$  sich aus der Faltung des rein imaginären Spektrums  $Q(f)$  mit dem reellen Spektrum  $Z(f)$  ergibt.

c) Aufgrund der Faltung des reellen Spektrums  $Q(f)$  und des imaginären Spektrums  $Z(f)$  ist

$$S(f) = j \cdot 0.5V \cdot \delta(f + 55 \text{ kHz}) + j \cdot 0.5V \cdot \delta(f + 45 \text{ kHz}) \\ - j \cdot 0.5V \cdot \delta(f - 45 \text{ kHz}) - j \cdot 0.5V \cdot \delta(f - 55 \text{ kHz})$$

d) Im Zeitbereich ergibt sich stets die Multiplikation des niederfrequenten Nachrichtensignals  $q(t)$  mit dem hochfrequenten Trägersignal  $z(t)$ . Ebenso ist auch bei diesem, aus mehreren Frequenzanteilen zusammengesetzten Quellensignal die Faltung im Frequenzbereich zu erkennen. Aufgrund des sinusförmigen Trägers ist  $S(f)$  imaginär mit positiven Werten bei negativen Frequenzen und negativen Werten bei positiven Frequenzen.

Das Trapezsignal ist eine ungerade Funktion. Somit ist  $Q(f)$  rein imaginär. Das sich ergebende Spektrum  $S(f)$  ist somit aufgrund der Phasendrehung des Trägers reell.

### Lösung D3:

a) Das Spektrum  $R(f)$  ist aufgrund der Trägerphase von  $60^\circ$  komplex; durch Faltung mit dem konjugiert komplexen  $Z_E(f)$  ergibt sich für  $V(f)$  wieder das richtige, reelle Spektrum. Der Anteil bei der doppelten Trägerfrequenz wird durch den Tiefpaß herausgefiltert, so daß wegen des Faktors 2 tatsächlich  $v(t) = q(t)$  gilt.

b) Mit dieser Einstellung wird die doppelte Trägerfrequenz nicht herausgefiltert. Dies erkennt man sowohl im Signal  $v(t)$  als auch im Spektrum  $V(f)$ .

c) In beiden Fällen ergibt sich eine frequenzunabhängige Dämpfung um  $\cos(45^\circ) = 0.707$ . Dies läßt sich wie folgt erklären:  $v'(t) = q(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t) \cdot 2 \cos(\omega_T \cdot t \pm \Delta\varphi_T)$ . Daraus folgt:

$$v'(t) = q(t) \cdot \cos(\pm \Delta\varphi_T) + q(t) \cdot \cos(2\omega_T \cdot t \pm \Delta\varphi_T).$$

Der zweite Term wird durch das Tiefpaßfilter entfernt, so daß als Ergebnis verbleibt:

$$v(t) = q(t) \cdot \cos(\pm \Delta\varphi_T).$$

d) Da die Dämpfung aufgrund der Phasenabweichung für alle Frequenzen in gleicher Weise gilt, werden die Signale nicht verzerrt, sondern lediglich gedämpft.

e) Für das Signal vor dem Tiefpaß gilt nun folgendes:

$$v'(t) = q(t) \cdot z(t) \cdot z_E(t) \\ = q(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t) \cdot 2 \cdot \cos((\omega_T + \Delta\omega_T) \cdot t) \\ = q(t) \cdot \cos(\Delta\omega_T \cdot t) + q(t) \cdot \cos((2\omega_T + \Delta\omega_T) \cdot t)$$

$$\text{D.h.: } v'(t) = \hat{q} \cdot \cos(\omega_N \cdot t) \cdot \cos(\Delta\omega_T \cdot t) + \hat{q} \cdot \cos(\omega_N \cdot t) \cdot \cos((2\omega_T + \Delta\omega_T) \cdot t).$$

Nach dem Tiefpaß verbleibt nur der erste Term:  $v(t) = \hat{q} \cdot \cos(\omega_N \cdot t) \cdot \cos(\Delta\omega_T \cdot t)$ .

Das bedeutet: Es kommt zu einer Schwebung zwischen dem Nachrichtensignal und einem von der Fehlanpassung herreichenden Cosinusverlauf. Deshalb muß stets darauf geachtet werden, daß die zur Synchrondemodulation verwendete Trägerfrequenz exakt mit der sendeseitigen Trägerfrequenz übereinstimmt.

f) Auch hier zeigt sich: Stimmen die Frequenzen nicht exakt überein, lassen sich die Signale nicht mehr demodulieren.

g) Sind  $f_T$  und  $f_N$  gleich, so kommt es zu einer Addition im Gleichanteil, was bei der Synchrondemodulation nicht mehr rückgängig gemacht werden kann. Ist  $f_T > f_N$ , so erhält man wieder richtig  $v(t) = q(t)$ .

**Lösung D4:**

$$a) \quad S(f) = 0.5V \cdot \delta(f \pm 50 \text{ kHz}) + 0.2V \cdot \delta(f \pm 55 \text{ kHz}) + 0.2V \cdot \delta(f \pm 45 \text{ kHz}).$$

Der 1. Term beschreibt den Trägeranteil, der 2. Term das obere Seitenband (OSB), der letzte Term das untere Seitenband (USB).

$$b) \quad m = \hat{q} / q_0 = 0.8.$$

c) Entsprechend Gl. (1.26) und Gl. (1.32) gilt für das äquivalente Tiefpaßsignal:

$$s_{\text{TP}}(t) = q_0 + \frac{\hat{q}}{2} e^{j\omega_N t} + \frac{\hat{q}}{2} e^{-j\omega_N t}.$$

Die Ortskurve beschreibt die Änderung von  $s_{\text{TP}}(t)$  in der komplexen Ebene und berücksichtigt nicht die Drehung mit der Träger(kreis)frequenz. Der reelle Zeiger mit der Länge  $q_0$  repräsentiert den Spektralanteil bei  $f_T$  und liegt stets in Richtung der reellen Achse. Der 2. Term repräsentiert die Spektrallinie bei  $f_T + f_N$ . Diese bewirkt eine Drehung mit  $\omega_N$  in positiver Richtung, da ja in der Ortskurve die Drehung mit  $\omega_T$  eliminiert wurde. Der 3. Term von  $s_{\text{TP}}(t)$  steht für die Spektrallinie bei  $f_T - f_N$ . Diese dreht in der Ortskurve in mathematisch negativer Richtung (d.h. im Uhrzeigersinn). Die Spitze des resultierenden Zeigers liegt bei verzerrungsfreier ZSB-AM deshalb stets auf der reellen Achse zwischen den Werten 0.2V bis 1.8V.

d) Das Zeigerdiagramm ergibt sich aus der Ortskurve, wenn man diese mit der Träger(kreis)-frequenz dreht; es gibt die zeitliche Änderung des komplexen Signals  $s_+(t)$  an. Dessen Realteil (Projektion auf die reelle Zeitachse) ergibt das reelle Sendesignal  $s(t)$ .

e) Zum Zeitpunkt  $t = 0$  sind alle 3 Zeiger in Richtung der reellen Achse, somit ist

$$s_+(t) = q_0 + 2 \cdot \frac{\hat{q}}{2} = q_0 + \hat{q} = 1.8 \text{ V}.$$

Nach  $t = 20\mu\text{s}$  (Periodendauer des Trägersignals) hat sich der Träger einmal gedreht, steht also auch in Richtung der reellen Achse. Die beiden anderen Zeiger haben sich dagegen in unterschiedliche Richtungen nur um jeweils  $36^\circ$  gedreht (da  $f_N = f_T/10$ ). Daraus folgt:

$$s_+(t = 20\mu\text{s}) = q_0 + 2 \cdot \frac{\hat{q}}{2} \cdot \cos(36^\circ) = q_0 + \hat{q} \cdot 0.809 = 1.647 \text{ V}.$$

Nach  $t = 30\mu\text{s}$  haben sich die Zeiger der Seitenbänder jeweils um  $54^\circ$  gedreht. Der Gesamtzeiger liegt nun in Richtung der negativen reellen Achse. Daraus folgt:

$$s_+(t = 30\mu\text{s}) = -q_0 - 2 \cdot \frac{\hat{q}}{2} \cdot \cos(54^\circ) = -q_0 - \hat{q} \cdot 0.588 = -1.47 \text{ V}.$$

f) Der Zeiger des Trägers zeigt zum Startzeitpunkt  $t = 0$  nach unten, die beiden Seitenbänder liegen dazu relativ um  $\pm 60^\circ$  gedreht:  $s(t = 0) = 0$ . Die Ortskurve berücksichtigt nicht die Rotation mit der Trägerfrequenz und die Trägerphase. Sie ist somit die gleiche wie bei c). Aufgrund der Phase  $\varphi_N$  des Nachrichtensignals werden die Endpunkte der Ortskurve zu anderen Zeiten erreicht.

g) Das Nachrichtensignal  $q(t)$  ist wieder in der Hüllkurve erkennbar; auch im Spektrum  $S(f)$  erkennt man das kontinuierliche Spektrum  $Q(f)$ . Die im Zeigerdiagramm rotierenden Zeiger sind nach aufsteigenden Frequenzen (OSB) bzw. absteigenden Frequenzen (USB) angeordnet und berücksichtigen die unterschiedlichen Amplituden und Phasen. Die Ortskurve ist wieder eine horizontale Gerade, jedoch mit komplizierterer Bewegung als vorher.

**Lösung D5:**

- a) Hüllkurvendemodulation ist anwendbar, da der Modulationsgrad  $m = 0.8$ , also kleiner als 1 ist. Wie aus der Ortskurve ersichtlich ist, ist das Sinkensignal in diesem Fall gleich dem Betrag  $|r_{TP}(t)|$  des äquivalenten Tiefpaßsignals. Das Sinkensignal beinhaltet weiterhin noch den Gleichanteil  $q_0$ .
- b) Durch einen Bandpaß anstelle der Tiefpaßfilterung, untere Grenzfrequenz z.B. 0.5 kHz.
- c) Auch beim Mustersignal ist der maximale Betrag gleich 1V. Mit  $q_0 = 1V$  ergibt sich der Modulationsgrad  $m = 1$  (Grenzfall, für den der HKD gerade noch richtig arbeitet).
- d) Mit dieser Konstellation ist der Modulationsgrad  $m = 2$ . Daher kommt es zu nichtlinearen Verzerrungen; aus einem reinen Cosinussignal wird ein Signal mit Oberwellen. Der Grund hierfür ist: Die Ortskurve ist zwar weiterhin eine horizontale Gerade, aber diese reicht in den negativen Bereich hinein. Dadurch kommt es zu Phasensprüngen.
- e) Für die einzelnen Klirrfaktoren ergibt sich aus den Spektrallinien von  $V(f)$ :

$$K_2 = \frac{|\hat{v}_2|}{|\hat{v}_1|} = \frac{0.11}{0.244} = 0.45, \quad K_3 = \frac{|\hat{v}_3|}{|\hat{v}_1|} = \frac{0.055}{0.244} = 0.225, \quad K_4 = \frac{|\hat{v}_4|}{|\hat{v}_1|} = \frac{0.011}{0.244} = 0.0455$$

Für den Gesamtklirrfaktor erhält man somit:

$$K = \sqrt{K_2^2 + K_3^2 + K_4^2} = \sqrt{0.45^2 + 0.225^2 + 0.045^2} \approx 0.5.$$

- f) Der Gleichanteil ist zu klein, so daß der Verlauf von  $q(t)$  in der Hüllkurve von  $s(t)$  nicht exakt zu erkennen ist. Bei Verwendung eines Hüllkurvendemodulators kommt es auch hier wieder zu nichtlinearen Verzerrungen.
- g) Die optimale Zeitkonstante kann man näherungsweise mit (1.39) berechnen:  $\tau = 0.1$  ms. Es entstehen nichtlineare Verzerrungen, die zu einem Klirrfaktor von 17% führen. Bei einem kleineren Verhältnis (z.B.  $f_T/f_N = 10$ ) wären die Verzerrungen noch dramatischer.
- h) Die nichtlinearen Verzerrungen werden kleiner; der Klirrfaktor beträgt nur mehr 1%.

**Lösung D6:**

- a) Bei OSB-Modulation fehlt das untere Seitenband. In der komplexen Ebene dreht sich außer dem Träger (mit Amplitude 1V) nur noch ein Zeiger (mit Amplitude 0.5V). Daraus ergibt sich als Ortskurve ein Kreis um den Wert (1, 0) mit Radius 0.5; der Modulationsgrad bei ESB beträgt  $\mu = 0.5$  im Gegensatz zum Modulationsgrad  $m = 1$  bei ZSB.

Der Betrag des äquivalenten Tiefpaßsignals  $r_{TP}(t)$  gibt bei ESB das Nachrichtensignal  $q(t)$  nicht richtig wieder (HKD bei ESB nicht anwendbar). Wie in V2(h) gezeigt werden sollte, schwankt bei den gegebenen Parametern die Phasenfunktion  $\phi(t)$  zwischen  $+30^\circ$  und  $-30^\circ$ .

- b) Aufgrund des Phasenverlaufs  $\phi(t) \neq 0$  verändern sich die Nulldurchgänge gegenüber dem ZSB-Signal. Zunächst kommen die Nulldurchgänge früher (positives  $\phi$ ), zwischen  $T_0/2$  und  $T_0$  (negatives  $\phi$ ) treten die Nulldurchgänge gegenüber dem Trägersignal später auf. Mit dem Ergebnis aus a) folgt, daß die maximale Abweichung  $T_0/12$  beträgt.
- c) Bei einem OSB-modulierten Signal sind die Abstände zwischen zwei Nulldurchgängen größer, wenn die Hüllkurve klein ist.
- d) Ein USB-moduliertes Signal unterscheidet sich vom OSB-Signal durch einen spiegelbildlichen Phasenverlauf  $\phi(t)$ ; die Abstände zwischen benachbarten Nulldurchgängen sind dann größer, wenn die Hüllkurve relativ groß ist. Ansonsten gibt es keinen Unterschied.

- e) Unter der Voraussetzung, daß der Gleichanteil entfernt wird, ist Hüllkurvendemodulation des ZSB-Signals gerade noch verzerrungsfrei möglich ( $m = 1$ ). Dagegen treten bei OSB nichtlineare Verzerrungen auf, obwohl der OSB-Modulationsgrad lediglich  $\mu = 0.5$  ist. Entsprechend Gl. (1.80) erhält man für den Klirrfaktor  $K = \mu/4 = 12.5\%$ .
- f) Durch Faltung des Sendespektrums  $S(f)$  mit dem Spektrum  $Z_E(f)$  des empfangsseitigen Trägersignals werden die Spektrallinien wieder genau richtig zusammengesetzt.
- Das Sinkensignal ist bei ESB nur halb so groß wie bei ZSB. Durch Verstärkung des Sinkensignals  $v(t)$  um den Faktor 2 ist in beiden Fällen  $v(t) = q(t)$ .
- g) Das Ergebnis von f) wird bestätigt.

### Lösung D7:

- a) 
$$\eta = K_{PM} \cdot \hat{q} = \frac{1}{V} \cdot 0.8V = 0.8.$$
- b) Man erkennt die Phasenabweichungen des modulierten Signals  $s(t)$  gegenüber  $z(t)$ . Ist  $q(t)$  positiv, so kommen die Nulldurchgänge von  $s(t)$  früher als die von  $z(t)$ . Dagegen ist bei  $q(t) < 0$  die Phase  $\phi(t)$  ebenfalls negativ und  $s(t)$  ist gegenüber  $z(t)$  nachlaufend.
- c) Das Spektrum  $S(f)$  setzt sich aus (komplexen) Bessellinien zusammen. Diese liegen um Vielfache von  $f_N = 5\text{kHz}$  von der Trägerfrequenz  $f_T = 50\text{kHz}$  entfernt. Der Betrag der Bessellinien ergibt sich aus den Besselfunktionen  $J_n(\eta = 0.8)$ , multipliziert mit  $\hat{s}/2$ :
- $$J_0(0.8) = 0.846; J_1(0.8) = 0.368; J_2(0.8) = 0.076; J_3(0.8) = 0.010;$$
- Alle anderen Linien sind kleiner als 0.001. Entgegen der Konstellation in Abschnitt 1.4.6 sind die Bessellinien komplex (da hier das Nachrichtensignal ein Cosinussignal ist).
- d) Bei idealer PM mit dem Modulationsindex  $\eta = 0.8$  ist die Ortskurve ein Kreisbogen, der einen Winkel von  $\pm 0.8$  rad (entspricht ca.  $\pm 45^\circ$ ) einnimmt. Bei der Ortskurvenberechnung ergibt sich dieser Kreisbogen tatsächlich, wenn die verschiedenen Bessellinien (ein Träger, 3 OSB-Zeiger und 3 USB-Zeiger) entsprechend ihren Kreisfrequenzen rotieren. Die Betragsfunktion  $a(t)$  ist konstant 1 und die Phasenfunktion  $\phi(t)$  proportional zu  $q(t)$ .
- Im Zeigerdiagramm dreht sich der in der Ortskurve dargestellte Zeigerverbund zusätzlich mit der Träger(kreis)frequenz. Der Realteil hiervon ist das reelle Sendesignal  $s(t)$ . Die maximale Abweichung der Nulldurchgänge im Sendesignal  $s(t)$  gegenüber der Sollage von  $z(t)$  beträgt  $\pm 0.8/(2\pi) = \pm 12.7\%$  der Periodendauer des Trägersignals.
- e) Das Differenzsignal  $v(t) - q(t)$  ist hier identisch Null.
- f) Der Phasenverlauf  $\phi(t)$  der Ortskurve verändert sich entsprechend dem Nachrichtensignal  $q(t)$ ; damit kommt es auch zu einer Verschiebung der Nulldurchgänge.
- g) Die Hüllkurve  $a(t)$  ist nun nur mehr näherungsweise konstant, der Phasenverlauf  $\phi(t)$  nicht mehr exakt gleich dem Nachrichtensignal. Auch bei idealer Phasendemodulation verbleibt ein gewisser Fehler (nichtlineare Verzerrungen).
- h) Bei  $K_{PM} = 3$  ist der Phasenhub dreimal so groß. Es ergibt sich ein breiteres Spektrum. Die Spektrallinie bei der Trägerfrequenz ist sehr klein, da  $J_0(2.4)$  ungefähr Null ist. Der ideale Phasendemodulator kann auch dieses Signal rekonstruieren.
- i) Der Phasenhub ist nun so groß, daß die Nulldurchgänge von den Sollagen um mehr als eine Trägersymboldauer abweichen. Da so die Phase größer als  $\pm\pi$  sein kann, ist auch der ideale Phasendemodulator überfordert. Mit PLL kann verzerrungsfrei demoduliert werden.

**Lösung D8:**

a) Mit den angegebenen Werten berechnet sich der Modulationsindex zu

$$\eta = \frac{K_{\text{FM}} \cdot \hat{q}}{\omega_{\text{N}}} = \frac{90 \text{ kHz/V} \cdot 0.8 \text{ V}}{2\pi \cdot 5 \text{ kHz}} \approx 2.3.$$

Dies erkennt man an der Ortskurve, die einen Kreisbogen mit den Phasenwinkeln zwischen  $131.8^\circ$  und  $-131.8^\circ$  beschreibt. Der Betrag der Ortskurve ist konstant, die Phasenfunktion verläuft exakt entsprechend dem Nachrichtensignal  $q(t)$ .

b) Die Frequenzmodulation dieses Signals führt zu einem komplexen Besselspektrum, wobei die einzelnen Bessellinien entsprechend  $J_n(2.3)$  gewichtet sind. Der Anteil bei  $f_{\text{T}} = 50 \text{ kHz}$  ist aufgrund des gewählten Modulationsindex ( $\eta = 2.3$ ) relativ klein.

c) Verzerrungsfreie Demodulation:  $q(t) = v(t)$ .

d) Der ideale FM-Demodulator ist gleich dem idealen PM-Demodulator und anschließendem Differentiationsglied. Verwendet man anstelle des FM-Demodulators einen PM-Demodulator, so ist das Sinkensignal  $v(t)$  proportional dem integrierten Quellensignal:

$$\begin{aligned} v(t) &= K \cdot 0.8 \text{ V} \cdot \int \cos(2\pi \cdot f_{\text{N}} \cdot t - 60^\circ) dt \\ &= K \cdot \frac{0.8 \text{ V}}{2\pi \cdot f_{\text{N}}} \sin(2\pi \cdot f_{\text{N}} \cdot t - 60^\circ) = K \cdot \frac{0.8 \text{ V}}{2\pi \cdot f_{\text{N}}} \cos(2\pi \cdot f_{\text{N}} \cdot t - 150^\circ). \end{aligned}$$

Die Konstante  $K$  berücksichtigt, daß  $K_{\text{PM}}$  und  $K_{\text{FM}}$  unterschiedliche Einheiten aufweisen. Mit  $K = 31.41/\text{kHz}$  ist die Amplitude des Ausgangssignals wieder  $0.8 \text{ V}$ .

e) Der ideale Frequenzmodulator setzt sich aus einem Integrator und einem idealen Phasenmodulator zusammen. Wählt man als Eingangssignal der PM das integrierte Signal des FM-Modulators, so ergibt sich das gleiche Sendesignal:  $q(t) = 0.8 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot f_{\text{N}} t - 150^\circ)$ .

Dies erkennt man auch an der Ortskurve. Wegen

$$\frac{90 \text{ kHz/V}}{2\pi \cdot 5 \text{ kHz}} \approx 3/\text{V}$$

passen bei der Nachrichtenfrequenz  $5 \text{ kHz}$  die Modulatorkonstanten  $K_{\text{FM}} = 90 \text{ kHz/V}$  und  $K_{\text{PM}} = 3/\text{V}$  näherungsweise zusammen.

f) Um gleiches Sendesignal  $s(t)$  mit der Phasenmodulatorkonstante  $K_{\text{PM}} = 5/\text{V}$  zu erreichen, muß man die Amplitude des Nachrichtensignals um den Faktor  $0.6$  vermindern:

$$q(t) = 0.48 \text{ V} \cdot \cos(2\pi f_{\text{N}} t - 150^\circ).$$

**Lösung D9:**

a) Das Spektrum  $S(f)$  besitzt komplexe diskrete Linien bei der Trägerfrequenz  $f_{\text{T}}$  und in Abständen von  $5 \text{ kHz}$  davon entfernt. Die Impulsgewichte ergeben sich aus den Besselfunktionen mit dem Modulationsindex  $\eta = 1$ . Bei negativen Frequenzen sind die Linien hierzu konjugiert komplex.

|                  |         |        |         |       |         |        |         |
|------------------|---------|--------|---------|-------|---------|--------|---------|
| Frequenz in kHz: | 35      | 40     | 45      | 50    | 55      | 60     | 65      |
| Gewicht:         | -j·0.01 | -0.057 | j·0.022 | 0.383 | j·0.222 | -0.057 | -j·0.01 |

b) Wegen  $\eta = 0.5$  ergibt sich ein Spektrum mit weniger Spektrallinien (im Abstand  $10 \text{ kHz}$ ). Dieses Spektrum ist rein reell, da es sich um die PM einer Sinusfunktion handelt.

|                  |        |       |        |       |        |       |       |
|------------------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|-------|
| Frequenz in kHz: | 20     | 30    | 40     | 50    | 60     | 70    | 80    |
| Gewicht:         | -0.001 | 0.015 | -0.121 | 0.469 | -0.121 | 0.015 | 0.001 |

c) Da nun die Grundfrequenz wie unter Punkt a) wieder 5 kHz ist, beträgt der Abstand der einzelnen Spektrallinien wieder 5 kHz. Da sich nun  $q(t)$  aus der Summe zweier harmonischer Schwingungen zusammensetzt, unterscheiden sich die Spektrallinien oberhalb und unterhalb der Trägerfrequenz nicht nur durch die Phase, sondern auch durch den Betrag:

|                  |         |       |          |        |         |       |
|------------------|---------|-------|----------|--------|---------|-------|
| Frequenz in kHz: | 25      | 30    | 35       | 40     | 45      | 50    |
| Gewicht:         | j·0.009 | 0.027 | -j·0.056 | -0.148 | j·0.051 | 0.359 |
| Frequenz in kHz: | 55      | 60    | 65       | 70     | 75      |       |
| Gewicht:         | j·0.262 | 0.037 | j·0.151  | -0.001 | j·0.005 |       |

d) Mit Hilfe des idealen FM-Demodulators läßt sich das Quellensignal wieder herstellen. Das Differenzspektrum  $V(f) - Q(f)$  sowie das Differenzsignal  $v(t) - q(t)$  sind jeweils Null.

e) Die Winkelfunktion beinhaltet jetzt außer der Trägerfrequenz noch 2 Anteile. Deshalb gilt auch für das äquivalente Tiefpaßsignal mit der Amplitude 1:

$$s_{TP}(t) = e^{j(\eta_1 \cdot \cos(\omega_1 t) + \eta_2 \cdot \sin(\omega_2 t))}$$

f) Dieses äquivalente Tiefpaßsignal kann wie folgt umgeformt werden:

$$s_{TP}(t) = e^{j\eta_1 \cdot \cos(\omega_1 t)} \cdot e^{j\eta_2 \cdot \sin(\omega_2 t)}$$

Im Zeitbereich ergibt sich also die Multiplikation der beiden Signalanteile. Daraus folgt: Das Spektrum kann durch die Faltung der beiden Spektralanteile von a) und b) berechnet werden. Damit ergeben sich genau die Frequenzen und Amplituden nach Punkt c).

**Lösung D10:**

a) Bei gegebenem Modulationsindex ( $\eta = 3$ ) reicht  $S(f)$  etwa von 20 bis 80 kHz. Es ist ein Besselspektrum im Abstand 5 kHz. Da der Kanal ideal ist, gilt  $R(f) = S(f)$  und  $v(t) = q(t)$ , d.h. es treten keine linearen Verzerrungen auf; die Ortskurve ist ein Kreisbogen.

b) Es bleiben im Spektrum  $R(f)$  nur die diskreten Anteile zwischen 35 und 65 kHz. Das Signal  $v(t)$  beinhaltet neben der gewünschten Cosinusschwingung mit der Frequenz 5kHz auch Oberwellen (Harmonische). Diese erkennt man auch im Spektrum  $V(f)$ .

| Frequenz | Gewicht |
|----------|---------|
| ±5kHz    | 0.485   |
| ±15kHz   | 0.023   |
| ±25kHz   | 0.017   |

Der Klirrfaktor beträgt  $K \approx 6\%$ .

c) Es bleiben im Spektrum  $R(f)$  nur die diskreten Spektralanteile zwischen 40 und 60 kHz.

| Frequenz | Gewicht |
|----------|---------|
| ±5kHz    | 0.445   |
| ±15kHz   | 0.028   |
| ±25kHz   | -0.046  |

Der Klirrfaktor erhöht sich auf  $K \approx 12\%$ . Wie bei Punkt b) hier sind auch hier die nicht-linearen Verzerrungen von ungerader Ordnung:  $K_2 = K_4 = \dots = 0$ .

- d) Bei der gewählten Einstellung besteht das Empfangsspektrum  $R(f)$  nicht mehr aus unendlich vielen Bessellinien, sondern nur noch aus den Linien:

$$J_0(\eta = 3) = -0.130,$$

$$J_1(3) = j \cdot 0.17 = J_{-1}(3),$$

$$J_2(3) = -0.243 = J_{-2}(3)$$

Deshalb drehen im Zeigerdiagramm nicht mehr unendlich viele Zeiger, sondern nur mehr 5. Die Ortskurve ist jetzt kein Kreisbogen mehr, sondern ein Parabelabschnitt.

- e) Die Bandbreite  $B_K$  muß nach Gl. (1.83) etwa 50 kHz sein. Für die Spektrallinien des Sinkensignals gilt dann:

| Frequenz           | Gewicht |
|--------------------|---------|
| $\pm 5\text{kHz}$  | 0.5     |
| $\pm 15\text{kHz}$ | 0.001   |
| $\pm 25\text{kHz}$ | -0.002  |
| $\pm 35\text{kHz}$ | -0.001  |

Damit ergibt sich der Klirrfaktor zu  $K \approx 0.5\%$ .

### Lösung D11:

- a) Die Ortskurve ist eine Gerade und schwankt im Bereich von 0.2 V bis 1.8 V.
- b) Aufgrund des symmetrischen Gaußtieffpasses werden die Spektrallinien sowohl des oberen als auch des unteren Seitenbandes um den Faktor 0.82 verringert. Die Ortskurve ist nach wie vor eine Gerade, jetzt aber zwischen 0.34V und 1.66V. Das Sinkensignal  $v(t)$  ist deshalb ebenfalls um den Faktor 0.82 gegenüber dem Quellensignal  $q(t)$  gedämpft. Es ergeben sich keine Verzerrungen, da das Eingangssignal nur eine Frequenz beinhaltet.
- c) Das Sinkensignal lautet nun:  $v(t) = 0.66 \cdot \cos(2\pi \cdot 5 \text{ kHz} \cdot t) + 0.18 \cdot \cos(2\pi \cdot 10 \text{ kHz} \cdot t)$ . Es kommt zu linearen Verzerrungen (linear deshalb, weil im Ausgangssignal die gleichen Frequenzen vorkommen wie im Eingangssignal, aber unterschiedlich gedämpft sind). Dies erkennt man deutlich bei einem Vergleich zwischen Quellen- und Sinkensignal.
- d) Bei dieser Parameterwahl wird das obere Seitenband (Faktor 0.45) gedämpft, während das untere Seitenband unverändert bleibt. Der Träger wird ebenfalls gedämpft. Die Ortskurve ist dementsprechend eine Ellipse. Daraus wird bereits deutlich, daß das Empfangssignal  $r(t)$  keine äquidistanten Nulldurchgänge mehr aufweisen wird und außerdem nach der Hüllkurvendemodulation nichtlineare Verzerrungen auftreten werden. Der Klirrfaktor beträgt ca. 3%.
- e) Hier werden beide Seitenbänder gedämpft, das obere aber stärker als das untere. Die Ortskurve ist auch hier eine Ellipse und es ergeben sich im Gegensatz zu Punkt c) nun nichtlineare Verzerrungen. Dies erkennt man z.B. am Spektralanteil bei 15 kHz (dritte Oberwelle von 5 kHz).
- f) Die Verzerrungen erkennt man an den Kanten (hohe Frequenzen), die stärker gedämpft werden als die niedrigen.